JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES

Par **E. Catalan.**

Ces théorèmes datent de 1848. A cette époque, ils ont été publiés dans un ouvrage lithographié, intitulé: *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, épuisé depuis longtemps. En 1852, afin de *prendre date*, je les ai reproduits, sans démonstration, dans les *Nouvelles Annales* (t. XI, p. 173).

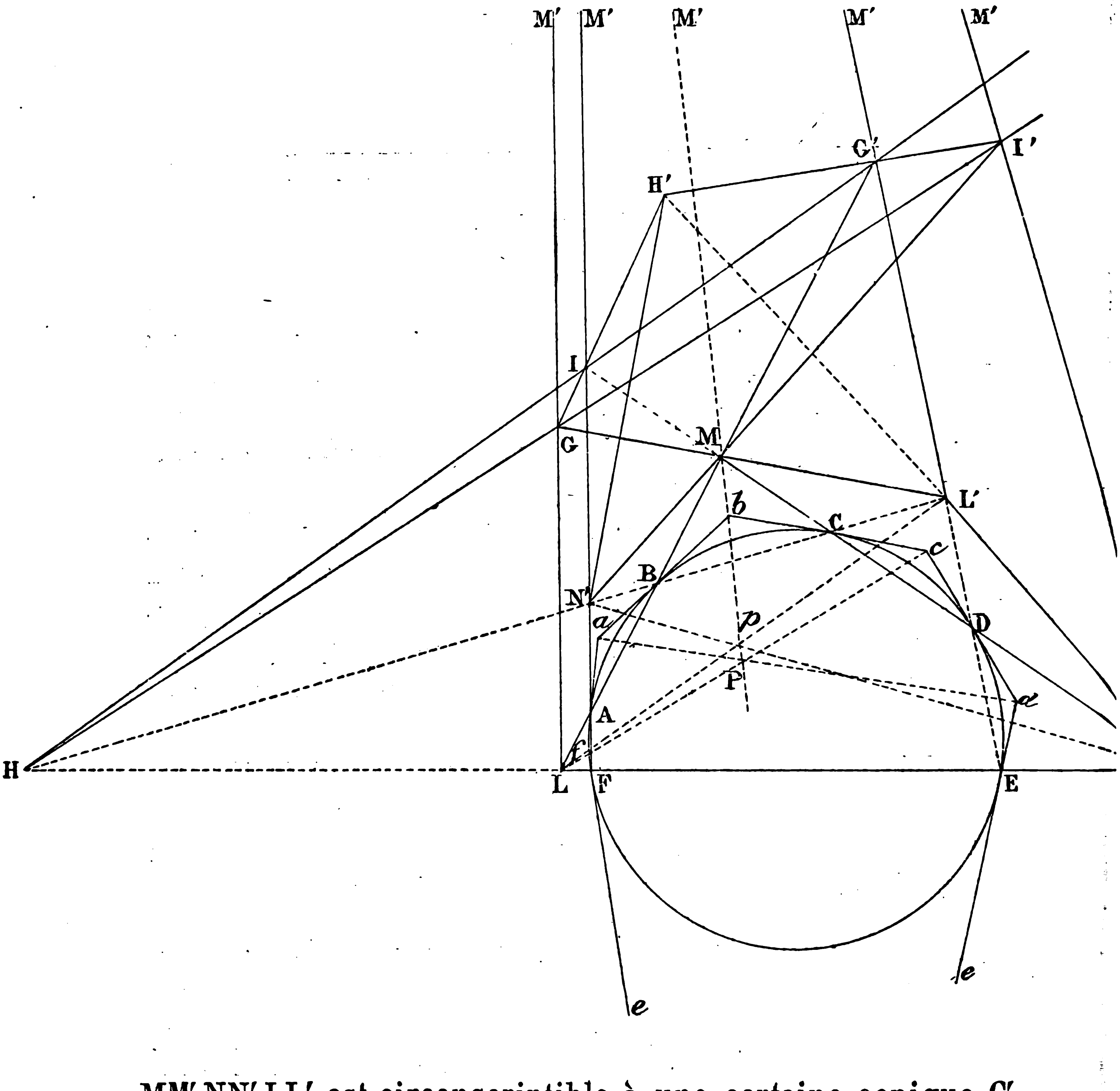
Malgré cette précaution, ils ont été si bien oubliés (même par l'auteur) que M. Folie, mon savant confrère à l'Académie de Belgique, a *réinventé* les deux premiers (*Bulletin de l'Académie*, août 1877, p. 186). Un peu plus tard, M. Folie a spontanément reconnu mes droits (*Restitution de priorité en faveur de M. Catalan. — Bulletin*, octobre 1878).

Les théorèmes dont il s'agit étant intimement liés à ceux de Pascal et de Brianchon, M. de Longchamps a pensé qu'ils pourraient intéresser les élèves; c'est pourquoi je les publie de nouveau. Puissent-ils en faire découvrir d'autres! (*)

I. — Soit ABCDEF un hexagone inscrit à une conique C, et dont les côtés se rencontrent en H, G, I. Prolongeons les côtés alternatifs AB, CD, EF : nous obtiendrons un triangle MNL. De même, les côtés BC, DE, FA, prolongés, forment un triangle M'N'L'.

(*) Sauf quelques légères corrections et abréviations, le texte qu'on va lire est conforme au texte primitif.

Les points G, H, I, situés sur une même droite (Th. de Pascal), sont ceux où se coupent les côtés correspondants de ces deux triangles; donc les droites MM′, NN′, LL′ concourent en un même point p (Th. de Desargues); donc aussi, par la réciproque du Théorème de Brianchon, l'hexagone



MM′ NN′ LL′ est circonscriptible à une certaine conique C′. Ainsi :

Théorème I. — *Les intersections successives des côtés* *alternants d'un hexagone de Pascal sont les sommets successifs d'un hexagone de Brianchon* (*).

II. — La réciproque est vraie. Par exemple, les droites MN, L'N', NL,... diagonales de l'hexagone circonscrit ML'NM'LN', forment l'hexagone inscrit ABCDEF. Autrement dit :

Théorème II. — *Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal.*

III. — Par les sommets de l'hexagone ABCDEF, menons des tangentes à la conique C : nous formerons un hexagone circonscrit, *abcdef*. Considérons, avec celui-ci, l'hexagone ML'NM'LN'. Les points *a*, *c* sont, respectivement, les pôles des cordes AB, CD ; donc le point M, où concourent ces cordes, est le pôle de *ac* (**). De même, M' est le pôle de *df*. Donc MM' est la polaire du point de concours, *s*, des droites *ac*, *df*.

Semblablement, NN' est la polaire du point de concours, *t*, des droites *ce*, *bf*; LL' est la polaire du point de concours, *u*, des droites *db*, *ae*. D'ailleurs, MM', NN', LL' concourent en un même point P; donc *les points* s, t, u *sont situés sur une même droite, polaire de* p.

Les diagonales *ac*, *bd* sont, d'après ce qui a été démontré plus haut, les côtés d'un hexagone inscriptible ; et les points *s*, *t*, *u* sont ceux où concourent les côtés opposés de cet hexagone. En conséquence :

Théorème III. — *Lorsque deux hexagones* H, H' *sont l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique* C, *de manière que les sommets du premier soient les points de contact*

(*) Comme dans la *Note sur les hexagones de Pascal et de Brianchon* (*Bulletin* décembre 1878), j'adopte, presque textuellement, les énoncés de M. Folie, qui ont le double avantage d'être concis et clairs.

(**) On a omis les droites *ac*, *df*, *be*, pour ne pas trop compliquer la figure.

des côtés du second; l'hexagone de Brianchon, déduit de H (Th. I), *et l'hexagone de Pascal, déduit de* H' (Th. II), *sont polaires réciproquement, relativement à la conique* C.

IV (*). — Voici, je pense, la manière la plus simple de formuler les relations entre les théorèmes de Pascal, de Desargues et de Brianchon :

Dans deux triangles homologiques : 1° les côtés sont ceux d'un hexagone de Pascal ; 2° les sommets sont ceux d'un hexagone de Brianchon.

THÉORÈME D'ALGÈBRE

Par M. **Cretin**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

1. — *Soient* F (x, y, z ...) *et* f (x, y, z ...) *deux fonctions entières, la deuxième étant du premier degré par rapport à chacune des variables séparément. Si* F *s'annule chaque fois que* f *est nul, on a*

$$F = fQ,$$

Q étant un polynôme entier.

La démonstration de ce théorème pour le cas d'une seule variable est très facile et bien connue; il me paraît utile de l'exposer pour un nombre quelconque de variables.

Nous l'admettrons pour les variables y, z ... ; et nous allons faire voir qu'il est encore vrai, si l'on introduit une variable de plus, x. Posons

$$F = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$
$$f = ax + b,$$

Faisons la division de ces deux polynômes en ordonnant successivement par rapport aux puissances décroissantes et aux puissances croissantes. Nous serons ainsi conduits aux deux égalités :

(*) *Bulletin de l'Académie de Belgique*, décembre 1878.