$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

alors $$A = 60^\circ,$$

et par conséquent le triangle est équilatéral.

(A suivre.)

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **E. Catalan** (*).

1. — *Annexes d'un triangle.* — Soient M, N, P les points

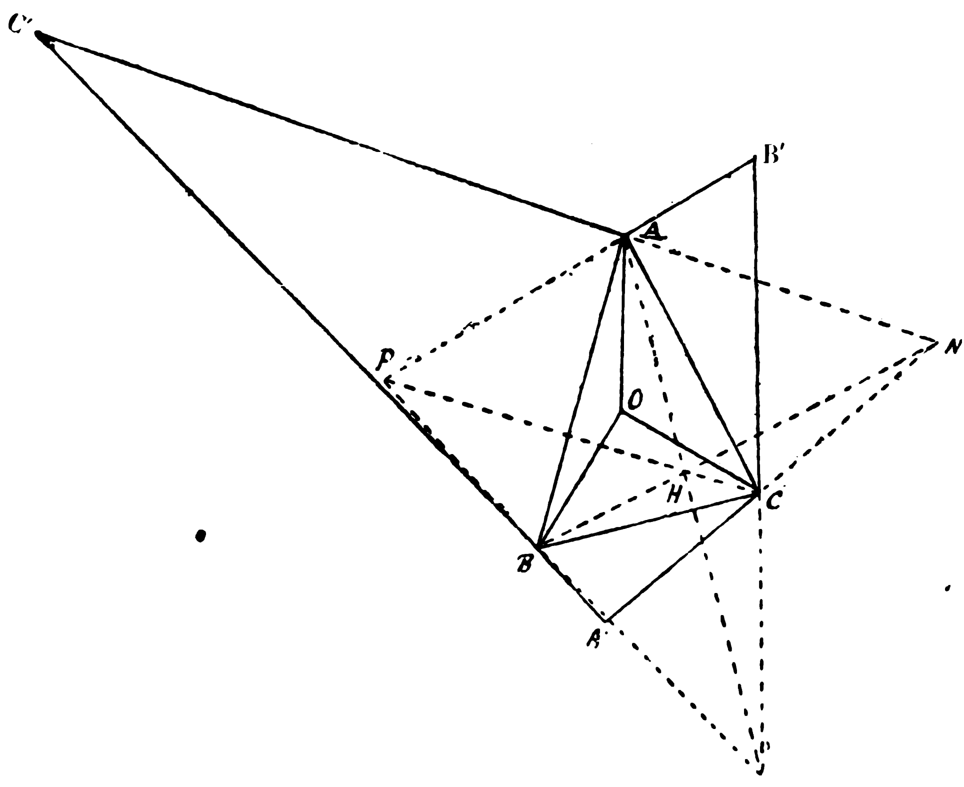

Fig. 1.

symétriques des sommets A, B, C d'un triangle, relativement aux côtés BC, CA, AB. Si l'on mène les droites PB, NC,

---

(*) Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. IV, nos 9, 10, 1882.

elles déterminent en général, avec BC, un triangle BCA′ (*), que l'on peut appeler *annexe* de ABC, suivant BC. De même, CAB′, ABC′ sont des annexes. Ces triangles jouissent de propriétés assez remarquables.

2. — *Angles des annexes.* — Soit Bx le prolongement de AB. D'après la construction,

$$A'Bx = PBA = CBA = B;$$

donc $$A'BC = 2^d - 2B.$$

De même, $$BCA' = 2^d - 2C.$$

Par conséquent, $$A' = 2^d - 2A. \qquad (^{**})$$

Ainsi. *les angles de l'annexe suivant* BC *sont les suppléments des doubles des angles de* ABC. Il en est de même pour les deux autres annexes. Conséquemment, *les trois annexes sont semblables ;* et, en outre :

$$A'BC = ABC' = B',$$
$$BCA' = ACB' = C',$$
$$BAC' = CAB' = A'.$$

3. — Remarque. — Soit O le centre du cercle ~~inscrit~~ circonscrit au triangle ABC. L'angle *au centre*, BOC, est double de A. Donc $BOC + A' = 2^d$: *le quadrilatère* BOCA′ *est inscriptible.* De même COAB′, AOCA′ sont des *quadrilatères inscriptibles* (***).

4. — *Hexagone des annexes.* — Dans l'hexagone

$$A'C\ B'A\ C'B\ A',$$

les angles en A′, B′, C′ ont pour valeur, respectivement :

$$2^d - 2A,\ 2^d - 2B,\ 2^d - 2C.$$

L'angle en A égale

$$CAB' + A + BAC' = 2A' + A = 4^d - 3A.$$

Donc *l'angle extérieur* (****) B′AC′ *est le triple de* A. Semblablement : angle ext. $B'CA = 3C$,

angle ext. $C'BA' = 3B$.

(*) Il est visible que, si l'angle A est droit, les lignes PB, NC sont parallèles entre elles. Cette conclusion résulte, d'ailleurs, des valeurs suivantes.

(**) Lorsque $A = 1^d$, A′ est nul, conformément à la remarque précédente.

(***) Nous reviendrons sur cette propriété.

(****) L'expression : *angle extérieur*, n'a pas, ici, la signification habituelle.

5. — Remarques. — I. La somme des angles *intérieurs*, en A, B, C, est $12^d - 3(A + B + C) = 6^d$; donc *un au moins de ces trois angles surpasse deux droits.*

II. *L'hexagone est non convexe.*

III. *La somme des angles intérieurs, en* A′, B′, C′, *égale deux droits.*

6. — Théorème. — *1° La droite* AA′, *qui joint un sommet de* ABC *au sommet correspondant d'une annexe* BCA′, *contient le centre* O *de la circonférence circonscrite au premier triangle et le centre* α *de la circonférence inscrite à l'annexe ; 2° le second centre est situé sur la première circonférence.*

Soient Bf perpendiculaire à BA, Cg perpendiculaire à CA. D'après la *définition* (1), ces droites sont bissectrices des angles CBA′, BAC′; dont elles se coupent au centre α du cercle inscrit à l'annexe.

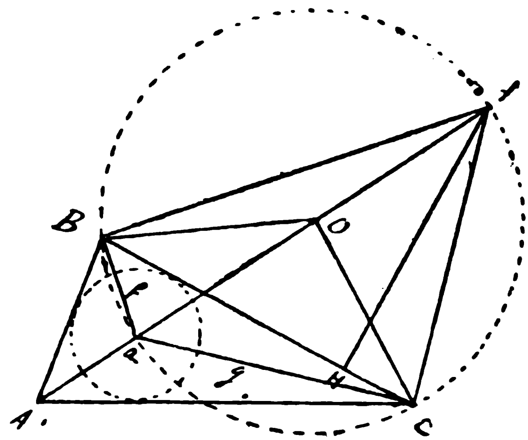

Fig. 2.

En second lieu, la circonférence décrite sur $A\alpha$, comme diamètre, contient les sommets B, C : elle est circonscrite au triangle ABC.

Menons la droite $\alpha A'$, laquelle est bissectrice de l'angle A′. Nous aurons

$$B\alpha A' = 2^d - \frac{1}{2}(A' + B') = A + B;$$

et, parce que $B\alpha A$, BCA sont inscrits au même segment,

$$B\alpha A = BCA = C.$$

Donc $\quad B\alpha A' + B\alpha A = A + B + C = 2^d,$

$A'\alpha OA$ *est une ligne droite.*

7. — Corollaires. — I. *Si, dans le cercle* O, *la corde* BC *est fixe, et que le point* A *soit mobile, le lieu du point* A′ *est un arc de la circonférence* BOC (3).

II. *Si, au contraire, le point* A *est fixe, et que la corde* BA *soit mobile, le lieu du point* A′ *est le prolongement du diamètre passant en* A (*).

8. — *Autre construction de l'annexe.* — Soit α le point diamétralement opposé à A, dans la circonférence circons-

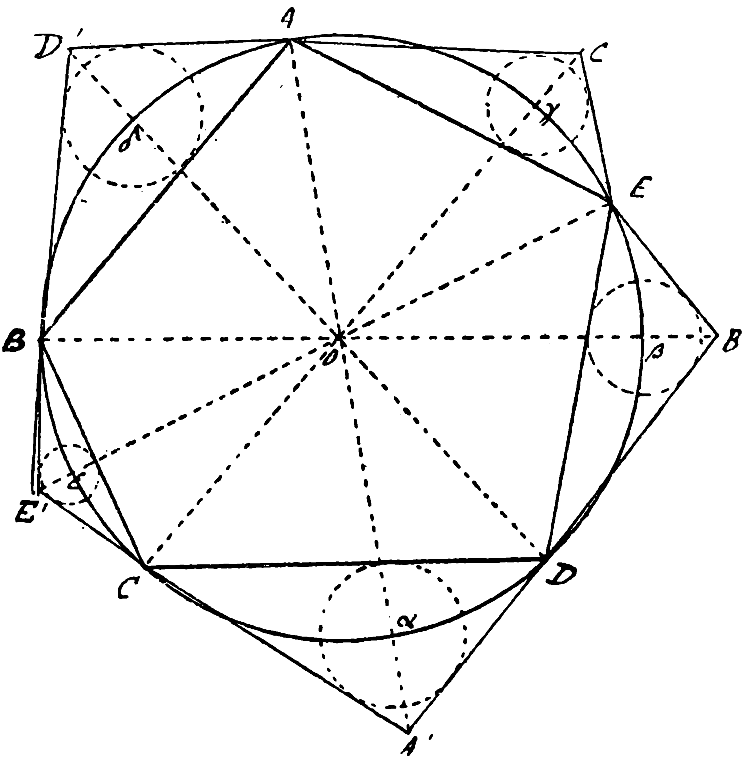

Fig 3.

crite au triangle ABC. De ce point, comme centre, décrivez la circonférence tangente au côté BC. Des extrémités de ce côté menez les tangentes BA′, CA′ : elles se coupent en un point A′, situé sur AOα ; et BA′. C'est l'annexe demandée.

9. — *Annexes d'un polygone inscrit, ayant un nombre impair de côtés.* — Soit, par exemple, le pentagone ABCDE, inscrit à la circonférence O. La construction indiquée ci-contre détermine les annexes DA′C, EB′D, ... ; puis le décagone AC′EB′D ..., dans lequel *les diagonales se coupent au centre du cercle donné* (*). *(A suivre.)*

(*) On verra, tout à l'heure, comment on doit prendre la *corde mobile* pour que le point A′ soit *fixe*.