Statique.

Un triangle ABC a l'un de ses sommets, A, qui est fixe. Déterminer la force à appliquer au point B pour que le côté BC soit horizontal.

— On donne un triangle quelconque; on demande quel est le cercle qu'il faut enlever autour du centre du cercle circonscrit pour que le centre de gravité de la partie restante soit au point de concours des hauteurs.

Arithmétique.

Extraire la racine carrée de $43 + \frac{5}{11}$ à $\frac{1}{7}$ près. Raisonnement.

Algèbre.

On coupe un cône par un plan parallèle à la base et on considère le cylindre droit ayant même base que le cône, et sa base supérieure sur le plan sécant. Étudier la variation de la somme de la surface latérale du cylindre et de la surface latérale du cône supérieur.

Trigonométrie.

Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.

Géométrie descriptive.

On donne un plan formant un angle de 39° avec le plan horizontal et dont la trace horizontale fait un angle de 53° avec la ligne de terre. Trouver les projections d'une pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier ayant son centre et le milieu d'un des côtés sur la trace du plan. Cet hexagone est situé dans le plan; la hauteur de la pyramide est 15 centimètres, le côté de l'hexagone a 3 centimètres, et le sommet de la pyramide est dans le second dièdre. On cherchera la projection de la section par le plan bissecteur du premier dièdre.

SUR DEUX PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

Par **E. Catalan** (*).

I. Premier problème. — *De* 1 *à* n (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés*, a, b, c, ... k, l?

Ce problème est loin d'être nouveau. On en trouve une

(*) Cette Note a pour origine un travail de M. Minine (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 58). Touchant ce travail, je ferai une seule remarque : les énoncés adoptés par l'auteur peuvent être remplacés par ceux-ci :

De 1 *à* p (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers, donnés ?*

Quelle est la somme des nombres compris entre 1 *et* p (inclusivement), *et non divisibles par des nombres premiers, donnés ?*

solution dans mes *Mélanges mathématiques* (p. 133), calquée sur celle d'un problème plus simple (N. A. 1842, p. 466).

En appelant $f(n)$ le nombre cherché, et en désignant par $\left(\frac{A}{B}\right)$ (*) le plus grand entier contenu dans $\frac{A}{B}$, on a

$$f(n) = n - \sum\left(\frac{n}{a}\right) + \sum\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum\left(\frac{n}{abc}\right) + \ldots \quad (A)$$

II. *Exemple.* — Soient : $n = 60$, $a = 5$, $b = 7$, $c = 13$. La formule donne

$$f(60) = 60 - (12 + 8 + 4) + 1 = 37.$$

En effet, de 1 à 60, il y a 37 nombres premiers avec 5, 7 et 13 ; savoir :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 41, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 53, 54, 56, 58, 59.

III. *Remarque.* — L'inspection de la formule (A) suggère une autre solution, basée sur un raisonnement bien connu (**).

Le nombre cherché serait

$$n - \left(\frac{n}{a}\right) - \left(\frac{n}{b}\right) - \left(\frac{n}{c}\right) - \ldots = n - \sum\left(\frac{n}{a}\right),$$

si chaque multiple de a n'avait été *supprimé qu'une fois* ; si chaque multiple de b n'avait été supprimé qu'une fois ; etc. Mais, parmi les multiples de a, il en est qui sont multiples de b, c'est-à-dire multiples de ab. Ces derniers multiples (aussi bien que les multiples de ac, de bc,...) ont donc été *supprimés à tort* : en les rétablissant, on trouve, au lieu de l'expression précédente,

$$n - \sum\left(\frac{n}{a}\right) + \sum\left(\frac{n}{ab}\right).$$

Cette application singulière de la *méthode des approximations successives* donne, finalement, la formule (A) (***).

(*) Ainsi que je l'ai déjà fait observer, le symbole $\left(\frac{A}{B}\right)$ équivaut à celui-ci : $E\left(\frac{A}{B}\right)$, adopté par Legendre.

(**) Laplace en a fait usage, dans la *Théorie des probabilités*.

(***) Afin d'abréger, je ne fais qu'indiquer la marche à suivre.

IV. *Cas particulier.* — Si $a, b, c, \ldots$ sont les *facteurs premiers de* n (inégaux), $f(n)$ devient la fonction numérique $\varphi(n)$ (*);

$$\varphi(n) = n - \sum \frac{n}{a} + \sum \frac{n}{ab} - \sum \frac{n}{abc} + \ldots;$$

ou $$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\ldots; \qquad \text{(B)}$$

ce qui est la formule connue (**).

V. Second problème. — *Quel est la somme,* S(n), *des nombres considérés dans le premier problème?*

1° La somme des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$ est $\frac{1}{2} n(n+1)$.

2° La somme des multiples de a égale

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{a}\right)\left[\left(\frac{n}{a}\right) + 1\right] a.$$

3° La somme des multiples de ab est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{ab}\right)\left[\left(\frac{n}{ab}\right) + 1\right] ab, \text{ etc.}$$

En répétant, mot à mot, le raisonnement indiqué ci-dessus (III), on trouve

$$2S(n) = n(n+1) - \sum a\left(\frac{n}{a}\right)\left[\left(\frac{n}{a}\right) + 1\right]$$
$$+ \sum ab\left(\frac{n}{ab}\right)\left[\left(\frac{n}{ab}\right) + 1\right] - \ldots \qquad \text{(C)}$$

VI. *Exemple.* — Soient encore : $n = 60$, $a = 3$, $b = 7$, $c = 13$. Nous aurons

$$2S(60) = 60 \cdot 61 - 5 \cdot 12 \cdot 13 - 7 \cdot 8 \cdot 9 - 13 \cdot 4 \cdot 5$$
$$+ 35 \cdot 1 \cdot 2 = 3\,660 - 780 - 504 - 260 + 70,$$

ou $$S(60) = 1093;$$

comme on peut le vérifier sur les nombres donnés plus haut.

VII. *Cas particulier.* — Lorsque $a, b, c, \ldots$ sont les facteurs premiers de n, le second membre de (C) se réduit à

(*) De Gauss, si mes souvenirs sont fidèles.

donc

(**) N. A. (1842, p. 46).

$$u\left\{n+1-\sum\left[\frac{n}{a}+1\right]+\sum\left[\frac{n}{ab}+1\right]\right.$$
$$\left.-\sum\left[\frac{n}{abc}+1\right]+\dots\right\}$$

La quantité entre *accolades* peut être écrite ainsi :

$$n\left[1-\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{1}{ab}-\sum\frac{1}{abc}+\dots\right]$$
$$+1-\sum 1+\sum 1-\sum 1+\dots$$
$$=n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\dots$$
$$+(1-1)(1-1)(1-1)\dots$$
$$=\varphi(n).$$

Donc, σ désignant la somme cherchée,

$$\sigma=\frac{1}{2}n\varphi(n),$$

ou
$$\sigma=\frac{1}{2}\varphi(n^2),$$

conformément à un théorème connu (*).

QUESTIONS D'EXAMENS

Établir par la géométrie la surface du quadrilatère inscrit en fonction des quatre côtés.

Je mène la diagonale BD ; j'ai, en appelant S la surface du quadrilatère
$$S=\frac{ch}{2}+\frac{ah'}{2}.$$

Les triangles semblables BFC, ADE me donnent
$$\frac{h}{h'}=\frac{b}{d};$$
d'où je tire
$$h'=\frac{hd}{b}.$$

(*) Ce théorème, que l'on peut démontrer en *trois lignes*, est dû, je pense, à M. H. Postula. (N. C. M., t. IV, pp. 207 et 208).