deux divisions homographiques déterminées par trois couples de points $c'$ et $c''$. Un de ces points doubles étant déterminé, on le joindra au point $b$ par une droite qui rencontrera la circonférence au point $m$ cherché. Comme il y a deux points doubles, il y aura deux points $m$ si les points doubles sont réels.

La même question a été résolue par MM. Frédéric Amoder, élève de l'École de Magistero, de Naples; Ferdinando Pisani, professeur du Royal Institut technique de Messine; Lez; Herzogue, du Lycée de Rouen.

---

## *Question* 1489

(voir 3e série, t. III, p. 351);

PAR M. CATALAN.

*$p$ étant un nombre premier, et* P *un polynôme entier, à coefficients entiers, l'équation*

$$(x+y)^p - x^p - y^p = pxy(x+y)\mathrm{P}^2 \tag{1}$$

*n'est vérifiée que par*

$$p = 7,\quad \mathrm{P} = x^2 + xy + y^2.$$

*Solution.* — Si l'équation (1) est identique, $x$ et $y$ étant quelconques, elle le sera pour $x = 1$, $y = 1$. Mais alors cette équation prend la forme

$$2^{p-1} - 1 = p.\mathrm{N}^2, \tag{2}$$

N étant un *nombre entier*.

Celle-ci exige que

$$p = 7,\quad \mathrm{N} = 3\ [1].$$

---

[1] *Mathesis*, t. III, p. 41 et 81.
L'équation

$$2^{p-1} - 1 = p.\mathrm{N}^2 \tag{2}$$

*Remarques.* — I. En 1881, j'ai proposé, dans *Mathesis*, la question suivante :

*D'après le théorème de Fermat,*

$$2^{p-1} - 1 = pN.$$

*Comment doit-on prendre le nombre* premier $p$, *pour que* N *soit un carré?*

Si mes souvenirs sont exacts, la solution due à M. Édouard Lucas, publiée dans ce Recueil, diffère peu de celle que j'avais trouvée de mon côté.

II. Lorsque $p = 7$, l'équation (1) se réduit, tout de suite, à

$$x^5 + 3x^4y + 5x^3y^2 + 5x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 = (x+y)P^2;$$

puis à

$$x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = P^2;$$

etc.

III. En général,

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)^p - x^p - y^p}{xy(x+y)} &= [C_{p-1,1} + 1]x^{p-3} + [C_{p-1,2} - 1]x^{p-4}y \\ &\quad + [C_{p-1,3} + 1]x^{p-5}y^2 + \ldots + [C_{p-1,1} + 1]y^{p-3}.\end{aligned}$$

Et si, comme on l'a supposé, $p$ est un nombre premier, *tous les coefficients,* dans le second membre, *sont divisibles par* $p$ [1].

---

est vérifiée par $p = 3$, $N = 1$. Mais cette valeur de $p$ ne conduit pas à une solution de l'équation (1) proposée, car elle donne $P^2 = 1$.

Il faut donc admettre l'inégalité $p > 3$.

En supposant $p > 3$, on trouve la solution $p = 7$ au moyen d'un calcul qui ne présente aucune difficulté (*voir* p. 523). (G.)

[1] Proposition connue, évidente à l'inspection du polynôme

$$\frac{p}{1}x^{p-1}y + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}y^2 + \ldots + \frac{p}{1}xy^{p-1}.$$

Si, par exemple, $p = 11$, on trouve

$$\frac{(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}}{xy(x+y)} = 11x^8 + 44x^7y + 121x^6y^2 + 209x^5y^3 + 253x^4y^4 + 209x^3y^5 + 121x^2y^6 + 44xy^7 + 11y^8,$$

ou

$$\frac{(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}}{11xy(x+y)} = x^8 + 4x^7y + 11x^6y^2 + 19x^5y^3 + 23x^4y^4 + 19x^3y^5 + 11x^2y^6 + 4xy^7 + y^8.$$

IV. Plus généralement,

$$\begin{aligned}\frac{(x+y+z)^p-x^p-y^p-z^p}{(x+y)(y+z)(z+x)} &= (x+y+z)^{p-3} + H_1(x+y+z)^{p-4} \\ &\quad + H_2(x+y+z)^{p-5} + \ldots + H_{p-3} + 2H_{\frac{p-3}{2}}(x^2, y^2, z^2).\end{aligned}$$

Dans le second membre, $H_1$, $H_2$, ..., $H_{p-3}$ sont des polynômes *homogènes*, dont tous les coefficients sont égaux à l'unité; savoir :

$$H_1 = x+y+z, \quad H_2 = x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy, \quad \ldots.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\frac{(x+y+z)^7-x^7-y^7-z^7}{(x+y)(y+z)(z+x)} &= (x+y+z)^4 + (x+y+z)(x+y+z)^3 \\ &\quad + (x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)(x+y+z)^2 \\ &\quad + (x^3+y^3+z^3+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2+xyz)(x+y+z) \\ &\quad + x^4+y^4+z^4+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3+x^3y+xy^3 \\ &\quad + x^2yz+y^2zx+z^2xy+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2 \\ &\quad + 2(x^4+y^4+z^4+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2) \text{ [1]}.\end{aligned}$$

V. D'après une formule connue [2], les nombres de termes des polynômes

$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ \ldots,\ H_{p-4},\ H_{p-3},\ H_{\frac{p-3}{2}}$$

---

[1] *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 182.

[2] *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 44.

sont, respectivement,

$$3,\ 6,\ 10,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3),\ \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2),\ \tfrac{1}{8}(p+1)(p-1).$$

Donc, si l'on suppose $x=y=z=1$, on aura

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{8}(3^{p-1}-1) = 3^{p-3} + 3.3^{p-4} + 6.3^{p-5} + \ldots + \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3).3 \\ + \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2) + \tfrac{1}{4}(p+1)(p-1);\end{aligned}$$

puis, comme le dernier binôme égale $\frac{3}{4}(p-1)^2$ :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{8}(3^{p-1}-1) = 3^{p-4} + 3.3^{p-5} + 6.3^{p-6} + \ldots \\ + \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3) + \tfrac{1}{4}(p-1)^2.\end{aligned}$$

VI. En vertu du théorème de Fermat, le premier membre est divisible par $p$ (1). Le second membre jouit donc de la même propriété, laquelle n'est, peut-être, pas évidente *a priori*.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. J. Neuberg, Moret-Blanc; Juhel-Renoy.

## NOTE.

Sur la *résolution en nombres entiers et positifs de l'équation*

$$(1) \qquad 2^{p-1} - 1 = p.N^2,$$

*où p représente un nombre premier, plus grand que* 3.

L'équation (1) proposée revient à

$$(2) \qquad \left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right) = p.N^2.$$

Les deux facteurs $\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$, $\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)$ sont premiers entre eux, parce qu'ils sont impairs et que leur différence est 2. Par conséquent, il faut, d'après l'équa-

(1) On suppose $p > 3$.

tion (2), que l'un d'eux soit carré exact, et l'autre, le produit d'un carré par le nombre premier $p$.

Or, c'est, nécessairement, le premier facteur $\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$ qui doit être un carré exact, car le second, $2^{\frac{p-1}{2}}-1$, est un nombre de la forme $4n+3$.

Soit donc

$$2^{\frac{p-1}{2}}+1 = M^2;$$

d'où

$$2^{\frac{p-1}{2}} = M^2-1 = (M+1)(M-1).$$

Il est évident que $M+1$ et $M-1$ sont des puissances du nombre 2. Et il résulte de l'identité $(M+1)-(M-1)=2$ que $(M-1)$ ne peut être une puissance de 2 supérieure à la première. Donc

$$M-1=2; \quad M=3; \quad M^2-1=8=2^3;$$

et, par suite,

$$2^{\frac{p-1}{2}}=2^3, \quad \frac{p-1}{2}=3, \quad p=7.$$

C'est ce qu'il fallait trouver.

---

## *Question* 1500

(voir 3e série, t. III, p. 400);

*Les projections orthogonales d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit déterminent une circonférence qui passe par le centre de la courbe.* (P. Terrier.)

*Note de M.* H. Brocard.

Cette proposition n'est pas nouvelle. On la trouve énoncée et démontrée par Bobillier, dans un *Mémoire sur l'hyperbole équilatère,* inséré au t. XIX (juin 1829) des *Annales de Gergonne,* p. 349-359.