Question 1480

(voir 3e série, t. II, p. 480);

PAR M. E. CATALAN.

THÉORÈME. — *La somme des puissances $4n$, de deux nombres entiers, inégaux, est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.*

La propriété énoncée résulte, immédiatement, de l'identité

$$x^{4n}+y^{4n}=\left(\frac{x^{2n+2}\pm y^{2n+2}}{x^2+y^2}\right)^2$$
$$+2\left(xy\,\frac{x^{2n}\mp y^{2n}}{x^2+y^2}\right)^2+\left(x^2y^2\,\frac{x^{2n-2}\pm y^{2n-2}}{x^2+y^2}\right)^2,$$

dont la vérification est facile (1). D'ailleurs, pour que toutes les fractions se réduisent à des nombres entiers, on doit prendre les *signes supérieurs* si n est *pair*. Enfin, n doit surpasser 1.

Application. Soient $n=8$, $x=2$, $y=1$:

$$2^{32}+1=\left(\frac{2^{18}+1}{2^2-1}\right)^2+2\left(2.\,\frac{2^{16}-1}{2^2+1}\right)^2+\left(4.\,\frac{2^{14}+1}{2^2+1}\right)^2$$
$$=\left(\frac{262\,145}{5}\right)^2+2\left(2.\,\frac{65\,535}{5}\right)^2+\left(4.\,\frac{16\,385}{5}\right)^2$$
$$=52\,429^2+2.26\,214^2+13\,108^2$$
$$=2\,748\,800\,041+2.687\,173\,796+171\,819\,644,$$

ou

$$2^{32}+1=4\,294\,967\,297,$$

résultat connu (2).

---

(1) Pour l'effectuer, il suffit de faire disparaître les dénominateurs, et de développer les carrés des quatre binômes.

(2) LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, t. I, p. 223.