NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Sur les questions 1248 et 1249

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 252-258.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__252_1>

SUR LES QUESTIONS 1248 ET 1249;

Par M. E. CATALAN.

J'ai lu, avec un vif intérêt, les deux Notes de M. le capitaine Moreau (*). Elles m'ont semblé susceptibles de certains *compléments*, que je soumets à l'appréciation de l'honorable auteur.

(*) *Nouvelles Annales*, mars 1878.

I. M. Moreau considère les séries

$$(1)\quad S = (1+q)\sum_0^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n+1}}, \quad s = (1-q)\sum_0^\infty \frac{(-q)^n}{1-q^{2n+1}},$$

q désignant la plus petite racine de l'équation

$$(2)\qquad x^2 - ax + 1 = 0 \quad (a > 2)\,(*).$$

Posant

$$(3)\qquad \frac{1}{1+q} + \frac{q}{1+q^3} + \frac{q^2}{1+q^5} + \ldots = f(q),$$

$$(4)\qquad \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q^3} + \frac{q^2}{1-q^5} - \ldots = \varphi(q),$$

M. Moreau prouve que

$$f(q) = \varphi(q).$$

En conséquence,

$$(5)\qquad \frac{S}{s} = \frac{1+q}{1-q}.$$

Or les séries (3), (4) sont connues : si l'on fait, avec Jacobi,

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad \omega' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}},$$

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad q = e^{-\pi\frac{\omega}{\omega'}},$$

on a

$$f(q) = \varphi(q) = \frac{k\omega}{2\pi\sqrt{q}}\,(**).$$

Ainsi

$$(6)\qquad S = \frac{1+q}{\sqrt{q}}\,\frac{k\omega}{2\pi}, \qquad s = \frac{1-q}{\sqrt{q}}\,\frac{k\omega}{2\pi}.$$

(*) On verra tout à l'heure pourquoi nous avons modifié les notations employées par M. Moreau.

(**) *Fundamenta nova*.... p. 103.

II. On a aussi

$$(7)\qquad \frac{k\omega}{2\pi} = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}\, q^{2n+\frac{1}{2}} \ (^*).$$

Dans cette formule, ε_{4n+1} *est l'excès du nombre des diviseurs de* $4n+1$, *ayant la forme* $4\mu+1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $4\mu-1$ (**). Conséquemment, les formules (6) équivalent à celles-ci :

$$(8)\quad S = (1+q)\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}\, q^{2n}, \qquad s = (1-q)\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}\, q^{2n}.$$

La *question* 1248, proposée par M. Édouard Lucas, suppose $a = 3$.

Il résulte, de cette valeur,

$$q = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \ldots, \qquad s = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{29} + \ldots.$$

Ainsi ces deux séries, à termes fort simples, ont mêmes limites que les séries (8), ordonnées suivant les puissances du nombre $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

III. D'après la relation

$$D_{n+2} - a D_{n+1} + D_n = 0,$$

si les deux premiers dénominateurs sont entiers, tous le seront (***). Or

$$D_0 = 1, \quad D_1 = \frac{1+q^3}{q(1+q)} = \frac{q^2-q+1}{q} = a - 1 = \text{entier}.$$

(*) *Fundamenta*, p. 105. — *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 115.

(**) *Recherches...*, p. 75.

(***) Nous supposons a entier.

Ainsi, l'énoncé de la question 1248 peut être modifié d'une infinité de manières (*).

Exemples. — 1° $a = 4$, $D_1 = 3$, $q = 2 - \sqrt{3}$:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{41} + \frac{1}{153} + \ldots,$$

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{19} - \frac{1}{71} + \frac{1}{265} - \ldots \;(**);$$

$$\frac{S}{s} = \sqrt{3}.$$

2° $a = 6$, $D_1 = 5$, $d_1 = 7$, $q = 3 - \sqrt{8}$:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{169} + \frac{1}{985} + \ldots,$$

$$s = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{41} - \frac{1}{239} + \frac{1}{1393} - \ldots;$$

$$\frac{S}{s} = \sqrt{2}.$$

IV. Dans son élégante solution de la *question* 1249, M. le capitaine Moreau fait observer que :

1° *On satisfait à l'équation*

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2,$$

en prenant

$$y_n = x^{(2n)} + x^{-(2n)},$$

si

$$x^2 - y_0 x + 1 = 0;$$

(*) Remarque déjà faite par le capitaine Moreau.

(**) En général, le dénominateur du deuxième terme de s est, en valeur absolue,

$$d_1 = \frac{1 - q^3}{q(1 - q)} = a + 1$$

$$2^{\circ}\quad \frac{1}{y_0}+\frac{1}{y_0y_1}+\frac{1}{y_0y_1y_2}+\ldots=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}.$$

De là résultent, par exemple, les sommations suivantes, assez remarquables :

$$\sqrt{24}=5-\frac{1}{10}-\frac{1}{10.98}-\frac{1}{10.98.9602}-\ldots,$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{4}{5.17}+\frac{4.16}{5.17.259}+\frac{4.16.256}{5.17.257.65.537}+\ldots.$$

V. Comme l'a remarqué M. Gerono (*), l'énoncé de la *question* 1181 n'est pas complet. D'autre part, la démonstration publiée dans les *Nouvelles Annales* (**) est un peu longue. On peut, comme il suit, trouver rapidement la formule exacte, et même une formule un peu plus générale.

On a, *identiquement*,

$$1=\frac{a-1}{a}+\frac{1}{a},$$

$$1=\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{ab}+\frac{1}{ab},$$

$$1=\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{ab}+\frac{c-1}{abc}+\frac{1}{abc},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par conséquent : 1° *Si les produits* ab, abc, $abcd$,... *croissent au delà de toute limite,*

$$\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{ab}+\frac{c-1}{abc}+\ldots=1;$$

(*) *Nouvelles Annales,* t. XV, p. 181.

(**) T. XV, p. 135.

2° *Si ces produits tendent vers une limite* λ,

$$(A) \qquad \frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{ab}+\frac{c-1}{abc}+\ldots=1-\frac{1}{\lambda}.$$

On trouve, de la même manière,

$$(B) \qquad \frac{a-\alpha}{a}+\frac{b\alpha-\beta}{ab}+\frac{c\beta-\gamma}{abc}+\ldots=1-\lim\frac{\theta}{abc\ldots t}.$$

VI. Pour appliquer la formule (A), prenons

$$a=1+q,\quad b=1+q^2,\quad c=1+q^3,\quad d=1+q^4,\ \ldots.$$

De là résulte

$$\lambda=\lim(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots;$$

ou, avec les notations de Legendre (*),

$$\lambda=\beta\beta'=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2^{\frac{1}{6}}k^{-\frac{1}{12}}k'^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{24}}}.$$

Ainsi

$$\frac{q}{1+q}+\frac{q^2}{(1+q)(1+q^2)}+\frac{q^3}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)}+\ldots$$
$$=1-2^{\frac{1}{6}}k^{-\frac{1}{12}}k'^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{24}}.$$

Le second membre peut être écrit autrement. On sait (**) que

$$\alpha=\sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n=1-\sum_1^\infty \varphi_i(n)(-1)^{n-1}q^n,$$

$\varphi_i(n)$ représentant *le nombre des décompositions de*

(*) *Recherches sur quelques produits*... (p. 1 et 2).

(**) *Recherches*..., p. 4.

n, *en parties impaires*, *inégales*; par conséquent,

$$\frac{q}{1+q} + \frac{q^2}{(1+q)(1+q^2)} + \frac{q^3}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)} + \dots$$
$$= \sum_1^\infty \varphi i(n)(-1)^{n-1} q^n.$$

Il est clair que l'on pourrait indéfiniment multiplier ces applications.

P. S. En lisant l'énoncé de la *question* 1181, il m'avait semblé avoir déjà vu le théorème qu'il exprime. En effet, ce théorème est compris dans une transformation générale, due à Stern, et publiée dans les *Nouvelles Annales* (1[re] série, t. VI, p. 438).