

CATALAN

Sur une question proposée par M. Bourguet

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16 (1877), p. 416-421.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__416_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. BOURGUET ;

PAR M. CATALAN.

La solution donnée par M. Muffat, dans le numéro de juillet des *Nouvelles Annales*, a reporté mon attention sur l'énoncé suivant :

Trouver les racines de l'équation

$$(1) \quad 0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \dots,$$

au sujet duquel je vais présenter quelques remarques.

I.

Quand on propose de résoudre une équation

$$\varphi(x) = 0,$$

il est sous-entendu que $\varphi(x)$ est une fonction, sinon bien déterminée, au moins bien définie. En est-il ainsi dans le cas actuel? Autrement dit, la série (1) est-elle convergente pour toutes les valeurs positives de x ? C'est là une question préliminaire sur laquelle je ne me prononce pas, faute de temps, mais que M. Bourguet doit avoir examinée et résolue. Je me bornerai à cette seule indication : si x croît indéfiniment, l'équation (1)

devient à la limite

$$0 = \frac{1}{2} - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

ce qui est absurde.

II.

Si l'on attribue à x une valeur n entière et positive, la série (1) se réduit à ses $n + 1$ premiers termes, savoir :

$$\frac{1}{2} - \frac{n}{n+1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} - \dots \pm \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots 2n}.$$

M. Muffat a prouvé que cette quantité est nulle. En conséquence, *n étant un nombre entier quelconque, on a identiquement*

$$(2) \quad \frac{n}{n+1} - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + \dots \mp \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots 2n} = \frac{1}{2}.$$

Cette proposition remarquable est comprise dans l'un des théorèmes de Stirling (*).

III.

D'après la Note de M. Muffat, la question proposée admet comme solutions $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, Mais rien ne prouve que l'équation $\varphi(x) = 0$ (**) n'ait pas de racines fractionnaires, incommensurables, imaginaires, etc. Le problème reste donc à résoudre ou peu s'en faut.

(*) BINET, *Journal de l'École Polytechnique*, XXVII^e Cahier, p. 154. Il suffit, pour retrouver l'égalité (2), de changer a en $-p$ dans la formule de Stirling.

(**) Encore une fois, nous admettons l'existence de la fonction $\varphi(x)$.

IV.

Après avoir rappelé que les racines de l'équation $\sin x = 0$ sont $x = 0, x = \pm \pi, x = \pm 2\pi, \dots$, Euler déduit de cette simple remarque (*) la formule

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

En appliquant ce procédé (qui n'est nullement rigoureux), pourrait-on transformer $\varphi(x)$ en un *produit indéfini, admettant les facteurs*

$$1 - x, \quad 1 - \frac{x}{2}, \quad 1 - \frac{x}{3}, \quad \dots, \quad 1 - \frac{x}{n}, \quad \dots$$

J'appelle sur ce point l'attention de M. Bourguet.

Note par le Rédacteur. — On a identiquement

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n,$$

de sorte que, si α_n a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, la série

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \dots$$

sera convergente et aura pour somme $\frac{1}{2}$.

Posons

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \frac{2-x}{2+x} \dots \frac{p-x}{p+x},$$

(*) *Introduction à l'Analyse*, p. 119.

il en résultera, pour l'expression du terme général $(\alpha_{p-1} - \alpha_p)$,

$$\alpha_{p-1} - \alpha_p = \frac{x}{1+x} \frac{1-x}{2+x} \cdots \frac{p-1-x}{p+x}.$$

Quel que soit x , soit k un nombre entier immédiatement supérieur à sa valeur absolue; posons

$$A = \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \frac{2-x}{2+x} \cdots \frac{k-1-x}{k-1+x},$$

le terme complémentaire α_n , n dépassant $k-1$, pourra s'écrire

$$\alpha_n = A \frac{k-x}{k+x} \frac{k+1-x}{k+1+x} \cdots \frac{n-x}{n+x}.$$

On voit immédiatement que, si x est négatif, chacune des fractions $\frac{k-x}{k+x}, \dots, \frac{n-x}{n+x}$ est supérieure à l'unité, de sorte que α_n , au lieu de tendre vers zéro, va en augmentant : la série proposée est donc divergente.

Si x est positif, il est facile de montrer que α_n a pour limite zéro. En effet, de la formule connue

$$\log(1+y) - \log(1-y) = 2 \left(y + \frac{y^3}{3} + \dots \right),$$

on conclut, y étant positif et plus petit que 1, .

$$\log \frac{1+y}{1-y} > 2y \quad \text{ou} \quad \frac{1+y}{1-y} > e^{2y},$$

puisque les nombres $\frac{1+y}{1-y}$ et e^{2y} sont supérieurs à l'unité.

Remplaçons dans cette inégalité y successivement par $\frac{x}{k}$,

$\frac{x}{k+1}, \dots, \frac{x}{n}$, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{k+x}{k-x} &> e^{\frac{2x}{k}}, \\ \frac{k+1+x}{k+1-x} &> e^{\frac{2x}{k+1}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{n+x}{n-x} &> e^{\frac{2x}{n}}, \end{aligned}$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{k+x}{k-x} \frac{k+1+x}{k+1-x} \dots \frac{n+x}{n-x} > e^{2x \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n} \right)}.$$

Or l'exposant de e admet en facteur la série harmonique : donc le premier membre peut devenir supérieur à toute quantité donnée, et par suite α_n inférieur à toute quantité donnée; la série est donc convergente et a pour somme $\frac{1}{2}$; d'où il résulte que, pour $x > 0$, l'équation proposée par M. Bourguet est une identité.

Si l'on désigne, comme précédemment, par k un nombre entier immédiatement supérieur à x ($x > 0$), par B le produit

$$(1-x) \left(1 - \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{k-1}\right),$$

on pourra écrire, n dépassant $k-1$,

$$\begin{aligned} (1-x) \left(1 - \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{n}\right) \\ = B \left(1 - \frac{x}{k}\right) \left(1 - \frac{x}{k+1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{n}\right). \end{aligned}$$

Chacun des facteurs qui suit B est inférieur à l'unité, de sorte qu'en passant d'un produit quelconque au suivant,

l'expression considérée diminue; nous allons voir qu'elle a pour limite zéro.

On a, en effet, pour $0 < y < 1$, d'après un développement connu,

$$1 - y < \frac{1}{e^y}.$$

On en conclut

$$1 - \frac{x}{k} < \frac{1}{e^{\frac{x}{k}}},$$

$$1 - \frac{x}{k+1} < \frac{1}{e^{\frac{x}{k+1}}},$$

.....

$$1 - \frac{x}{n} < \frac{1}{e^{\frac{x}{n}}},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\left(1 - \frac{x}{k}\right) \left(1 - \frac{x}{k+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{n}\right) < \frac{1}{e^{x\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}}.$$

Or l'exposant de e admet en facteur la série harmonique; donc le premier membre peut devenir inférieur à toute quantité donnée, et l'on a le droit d'écrire

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \cdots$$

$$= (1-x) \left(1 - \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{3}\right) \cdots$$

pour toute valeur positive de x .

C. H. B.