

E. CATALAN

**Propositions relatives à la théorie
des nombres**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 518-523.

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__518_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROPOSITIONS RELATIVES A LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. E. CATALAN.

I.

1. Soit l'équation

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + (6z \mp 1)^2 = 3(2n + 1)^2,$$

dans laquelle les inconnues ne peuvent recevoir que des valeurs entières, nulles ou positives. L'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de $x + y + z$ égale $(2n + 1)(-1)^n$.

2. Soit l'équation

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + (6z \mp 1)^2 = 24N + 3,$$

dans laquelle les valeurs des inconnues sont encore assujetties aux conditions précédentes. Si le second membre n'est pas le triple d'un carré, la somme $x + y + z$ admet autant de valeurs paires que de valeurs impaires. (JACOBI.)

3. Le triple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés de la forme $(6\mu \mp 1)^2$. Si le nombre donné est $3(2n + 1)^2$, il y a au moins autant de décompositions que l'indique le plus grand entier contenu dans $\frac{2n + 1}{6}$.

4. Soit l'équation

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + 4(6z \mp 1)^2 = 6(2n + 1)^2 \quad (*).$$

(*) Les conditions relatives aux valeurs que peuvent recevoir les inconnues sont les mêmes que précédemment.

L'excès du nombre des valeurs paires de

$$x + y + z + \frac{3y^2 \mp y}{2},$$

sur le nombre des valeurs impaires, égale $(2n + 1)(-1)^n$.

5. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + 4(6z \mp 1)^2 = 24N + 6.$$

Si le second membre n'est pas le sextuple d'un carré, la quantité

$$x + y + z + \frac{3y^2 \mp y}{2}$$

admet autant de valeurs paires que de valeurs impaires.

6. *Le sextuple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés. Les deux premiers ont la forme $(6\mu \mp 1)^2$, et le troisième la forme $4(6\nu \mp 1)^2$.*

7. *Soit l'équation*

$$(2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + 16z^2 = (2n + 1)^2.$$

Soit, pour $z = 0$, ε l'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de $\frac{y(y+1)}{2}$.

Soit, semblablement, ε' l'excès du nombre des valeurs paires de $\frac{y(y+1)}{2} + z$ sur le nombre des valeurs impaires, z étant positif. On a

$$\varepsilon + 2\varepsilon' = (2n + 1)(-1)^n.$$

8. *L'excès du nombre des valeurs paires de x , satisfaisant à l'équation*

$$4x^2 + 4y^2 + (2z + 1)^2 = (2n + 1)^2,$$

sur le nombre des valeurs impaires, est

$$\varepsilon = \frac{(2n+1)(-1)^n - 1}{4} (*).$$

9. Si un nombre premier, P , n'est pas la somme de deux carrés, P^2 est décomposable en trois carrés.

10. Si un nombre premier, P , est égal à la somme de trois carrés, P^2 est généralement égal aussi à la somme de trois carrés.

11. L'équation

$$4x^2 + 4y^2 + (2z+1)^2 = 8N+1,$$

dans laquelle le second membre n'est pas carré, est vérifiée par un même nombre de valeurs paires et de valeurs impaires de x (**).

12. a étant le nombre des solutions de l'équation

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 2(2n+1)^2,$$

l'excès du nombre des valeurs paires de z , qui vérifient

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 8z^2 = 2(2n+1)^2,$$

sur le nombre des valeurs impaires, est

$$\varepsilon = \frac{(2n+1)(-1)^n - a}{2}.$$

13. Si l'on fait $n = di$, le nombre des solutions de l'équation

$$i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 + \dots + i_8^2 = 8n$$

(*) Dans l'application de ce théorème, on peut faire $y = 0$, mais non $x = 0$. En outre, à cause de la valeur de ε , n doit être pair. On peut donc remplacer l'équation par $4x^2 + 4y^2 + (2z+1)^2 = (4\mu+1)^2$, et alors la formule devient $\varepsilon = \mu$.

(**) On fait toujours abstraction de $x = 0$.

est égal à la somme des cubes des diviseurs d (*).

14. Si, de plus, $4n = i' + i''$, alors

$$\Sigma (f i' \times f i'') = 8 \Sigma d^3 (**).$$

15. La somme des diviseurs d'un nombre impair, i , est égale à la somme des produits deux à deux des excès relatifs aux nombres impairs dont la somme est $2i$ (***)).

II.

Les propositions précédentes sont extraites d'un Mémoire intitulé : *Recherches sur quelques produits indéfinis*. MM. Le Besgue et Chabanel ont fait voir que la proposition 10, corollaire du théorème 8, est tout simplement la traduction de l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 (****).$$

Ce moyen de démonstration, basé sur de simples identités, est-il applicable à quelques-unes des propositions énoncées ci-dessus? Cela est désirable. Quoiqu'il en soit,

(*) i, i_1, i_2, i_3, \dots désignent des nombres impairs.

(**) La notation $f p$, employée par Euler, représente la somme des diviseurs de p .

(***) J'appelle excès relatif à un nombre impair N l'excès du nombre des diviseurs de N , ayant la forme $4\mu + 1$, sur le nombre de ceux qui ont la forme $4\mu - 1$.

(****) En outre, comme le fait observer M. Chabanel : 1° il est inutile que le nombre $a^2 + b^2 + c^2$ soit premier ; 2° on peut permuter les lettres a, b, c . Cette seconde remarque donne lieu, par exemple, aux trois décompositions suivantes :

$$(4^2 + 3^2 + 2^2)^2 = 24^2 + 16^2 + 3^2,$$

$$(4^2 + 3^2 + 2^2)^2 = 24^2 + 12^2 + 11^2,$$

$$(4^2 + 3^2 + 2^2)^2 = 21^2 + 16^2 + 12^2.$$

(523)

$$(11) \left\{ \begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 &= (bc + ca - ab)^2 + (a^2 + bc)^2 \\ &+ (b^2 + ca)^2 + (c^2 - ab)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(12) \left\{ \begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 &= (ca + ab - bc)^2 + (b^2 + ca)^2 \\ &+ (c^2 + ab)^2 + (a^2 - bc)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(13) \left\{ \begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 &= (ab + bc - ca)^2 + (c^2 + ab)^2 \\ &+ (a^2 + bc)^2 + (b^2 - ca)^2. \end{aligned} \right.$$

III.

Puisque l'occasion s'en présente, je rappellerai ici les énoncés de deux théorèmes d'Arithmétique démontrés dans des recueils peu répandus :

1° a, b étant deux nombres entiers, premiers entre eux, la fraction

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a + b - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots a \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots b}$$

est réductible à un nombre entier.

2° a, b étant deux nombres entiers quelconques, la fraction

$$\frac{(a + 1)(a + 2) \dots 2a \times (b + 1)(b + 2) \dots 2b}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a + b)}$$

est réductible à un nombre entier.