

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13 (1874), p. 59-60.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__59_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Catalan.

Parmi toutes les manières de démontrer la *formule du binôme*, a-t-on remarqué celle-ci?

Soit

$$(1) \quad y = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots,$$

x étant compris entre $+1$ et -1 (exclusivement), de manière que la série soit convergente.

Si l'on prend les dérivées des deux membres, on a

$$y' = m \left[1 + \frac{m-1}{1} x + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \right];$$

puis, en multipliant par $1+x$,

$$(1+x)y' = m \left[\begin{array}{c|c|c} 1 + \frac{m-1}{1} & x + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} & x^2 + \dots \\ + & 1 & + \frac{m-1}{1} \end{array} \right];$$

(60)

c'est-à-dire, à cause de l'égalité (1),

$$(1+x)y' = my,$$

ou

$$(2) \quad \frac{y'}{y} = m \frac{1}{1-x}.$$

On conclut, de cette équation *caractéristique*,

$$(3) \quad y = (1+x)^m.$$

2. On sait, depuis Dirichlet (?), qu'il n'est pas toujours permis de grouper, d'une manière arbitraire, les termes d'une série. L'exemple suivant me paraît très-propre à démontrer cette proposition.

Soit

$$\begin{aligned} l_2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \\ &\quad - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \dots, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} 2l_2 &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} \\ &\quad - \frac{1}{6} + \frac{2}{13} - \frac{1}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}$$

Si l'on réduit les termes semblables, il semble que l'on a

$$2l_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots,$$

ou, en groupant différemment les termes,

$$2l_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots,$$

c'est-à-dire $2l_2 = l_2$!