

E. CATALAN

Sur quelques développements en séries

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9 (1870), p. 199-202.

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__199_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES;

PAR M. E. CATALAN.

Soit

$$(1) \quad f(x) = af(bx) + \alpha\varphi(x),$$

a, b, α étant des constantes données.

Il résulte, de cette relation :

$$\begin{aligned}
 af(bx) &= a^2f(b^2x) + a\alpha\varphi(bx), \\
 a^2f(b^2x) &= a^3f(b^3x) + a^2\alpha\varphi(b^2x), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 a^{n-1}f(b^{n-1}x) &= a^n f(b^nx) + a^{n-1}\alpha\varphi(b^{n-1}x);
 \end{aligned}$$

puis

$$(2) \quad f(x) = a^n f(b^nx) + \alpha[\varphi(x) + a\varphi(bx) + \dots + a^{n-1}\varphi(b^{n-1}x)].$$

On trouve, par un calcul semblable,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned}
 af(bx) &= \frac{f\left(\frac{x}{b^n}\right)}{a^n} \\
 &- \alpha \left[\varphi(x) + \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x}{b}\right) + \dots + \frac{1}{a^{n-1}}\varphi\left(\frac{x}{b^{n-1}}\right) \right].
 \end{aligned} \right.$$

Cela posé, si le produit $a^n f(b^nx)$ tend vers une limite λ quand n augmente indéfiniment, on conclut, de l'équation (2),

$$f(x) = \lambda + \alpha \lim[\varphi(x) + a\varphi(bx) + \dots + a^{n-1}\varphi(b^{n-1}x)].$$

Ainsi la série

$$\varphi(x) + a\varphi(bx) + a^2\varphi(b^2x) + \dots$$

est convergente; et l'on a

$$(A) \quad \varphi(x) + a\varphi(bx) + a^2\varphi(b^2x) + \dots = \frac{f(x) - \lambda}{\alpha}.$$

Quand, au contraire, le produit $a^n f(b^n x)$ ne tend vers aucune limite, la série est *divergente* ou *indéterminée*.

De même, si le rapport $\frac{f\left(\frac{x}{b^n}\right)}{a^n}$ a une limite μ ,

$$(B) \quad \varphi(x) + \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{1}{a^2} \varphi\left(\frac{x}{b^2}\right) + \dots = \frac{\mu - a f(bx)}{a}.$$

Les formules (A), (B), probablement connues, permettent de sommer certaines séries (*).

Applications.

Supposons que l'équation (1) soit :

$$1^o \quad \sin x = 3 \sin^{\frac{1}{3}} x - 4 \sin^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} x;$$

de manière que

$$f(x) = \sin x, \quad \varphi(x) = \sin^{\frac{1}{3}} x, \quad a = 3, \quad \alpha = -4, \quad b = \frac{1}{3}.$$

On a

$$\lambda = \lim \left[3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \right] = x, \quad \mu = \lim \frac{\sin(3^n x)}{3^n} = 0;$$

et, en conséquence,

$$(C) \quad \sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + 3^2 \sin^3 \frac{x}{3^3} + \dots = \frac{x - \sin x}{4},$$

$$\sin^3 \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{3^2} \sin^3 3x + \dots = \frac{3}{4} \sin^3 \frac{x}{3},$$

ou plutôt

$$(D) \quad \sin^3 x + \frac{1}{3} \sin^3 3x + \frac{1}{3^2} \sin^3 3^2 x + \dots = \frac{3}{4} \sin^3 x.$$

(*) Je crois avoir communiqué à M. Gerono, il y a quelques mois, la formule (A).

$$2^{\circ} \quad \cos x = -3 \cos \frac{x}{3} + 4 \cos^3 \frac{x}{3};$$

$$f(x) = \cos x, \quad \varphi(x) = \cos^3 \frac{x}{3}, \quad a = -3, \quad \alpha = 4, \quad b = \frac{1}{3}.$$

Le produit $(-3)^n \cos \frac{x}{3^n}$ croît indéfiniment avec n (en valeur absolue). Ainsi la série

$$\cos^3 \frac{x}{3} - 3 \cos^3 \frac{x}{3^2} + 3^2 \cos^3 \frac{x}{3^3} - \dots$$

est *divergente*.

Au contraire, $\lim \frac{\cos^3 3^n x}{(-3)^n} = \mu = 0$; donc, par le changement de x en $3x$,

$$(E) \quad \cos^3 x - \frac{1}{3} \cos^3 3x + \frac{1}{3^2} \cos^3 3^2 x - \frac{1}{3^3} \cos^3 3^3 x + \dots = \frac{3}{4} \cos x.$$

Cette formule résout la question 987, proposée par M. Laisant.

$$3^{\circ} \quad \cot x = 2 \cot 2x + \operatorname{tang} x;$$

$$f(x) = \cot x, \quad \varphi(x) = \operatorname{tang} x, \quad a = 2, \quad \alpha = 1, \quad b = 2.$$

Le produit $2^n \cot(2^n x)$ ne tend vers aucune limite; le

rapport $\frac{\cot \frac{x}{2^n}}{2^n}$ a pour limite $\frac{1}{x}$; donc la formule (B) est seule applicable. Elle donne

$$(F) \quad \operatorname{tang} x + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tang} \frac{x}{2^2} + \dots = \frac{1}{x} - \frac{2}{\operatorname{tang} 2x};$$

et, en particulier,

$$(G) \quad \operatorname{tang} \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{\pi}{32} + \dots = 2 \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right).$$

$$4^{\circ} \quad \text{arc tang } x = \text{arc tang}(bx) + \text{arc tang} \frac{(1-b)x}{1+bx^2}.$$

Si la constante b , supposée positive, est inférieure à l'unité, cette relation conduit à la formule

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{arc tang} \frac{(1-b)x}{1+bx^2} + \text{arc tang} \frac{(1-b)bx}{1+b^3x^2} \\ + \text{arc tang} \frac{(1-b)b^2x}{1+b^5x^2} + \dots = \text{arc tang } x; \end{array} \right.$$

d'où l'on conclut, par exemple,

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{arc tang} \frac{1}{3} + \text{arc tang} \frac{2}{9} + \text{arc tang} \frac{4}{33} + \dots \\ + \text{arc tang} \frac{2^{n-1}}{2^{2n-1}+1} + \dots = \frac{\pi}{4}. \end{array} \right.$$

Au contraire, b étant plus grand que 1, on trouve

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{arc tang} \frac{(b-1)x}{1+bx^2} + \text{arc tang} \frac{(b-1)bx}{1+b^3x^2} \\ + \text{arc tang} \frac{(b-1)b^2x}{1+b^5x^2} + \dots = \text{arc cot } x, \end{array} \right.$$

formule qui ne diffère pas de (H).

Liège, 23 février 1870.