NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Note sur la partition des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 407-414.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__407_0>

NOTE SUR LA PARTITION DES NOMBRES (*);

PAR E. CATALAN,

Professeur à l'Université de Liége.

PROBLÈME. — *De combien de manières peut-on former une somme n, avec q nombres entiers, égaux ou inégaux?*

I. Désignons par $N_{n,q}$ le nombre cherché, et considérons l'équation

(1) $$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_q = n.$$

En supposant que les valeurs des inconnues soient rangées par ordre de grandeur *non décroissante,* nous pourrons attribuer à x_1, successivement, les α valeurs entières

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad \alpha,$$

α représentant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{q}$; de sorte que

(2 $$\alpha = \left(\frac{n}{q}\right) (**).$$

Soit, en particulier, $x_1 = a$: les valeurs de x_2, $x_3, \ldots, x_q$ ne pouvant être inférieures à a, nous ferons

$$x_2 = y_2 + a - 1, \quad x_3 = y_3 + a - 1, \ldots, \quad x_q = y_q + a - 1;$$

(*) Cette Note est extraite d'un volume de *Mélanges mathématiques,* qui va paraître.

(**) La notation $\left(\frac{n}{q}\right)$ equivaut à celle-ci : $E\left(\frac{n}{q}\right)$, adoptée par Legendre.

et nous aurons ainsi, au lieu de (1), α équations de la forme

$$(3)\qquad y_2 + y_3 + \ldots + y_q = n - 1 - (a - 1)q,$$

dans lesquelles les $q - 1$ inconnues pourront recevoir les valeurs 1, 2, 3.... Le nombre des solutions de l'équation (3) étant $N_{n-1-(a-1)r,q-1}$, il s'ensuit

$$(4)\qquad N_{n,q} = \sum_{a=1}^{a=\alpha} N_{n-1-(a-1)q,q-1},$$

ou

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} N_{n,q} &= N_{n-1,q-1} + N_{n-1-q,q-1} + N_{n-1-2q,q-1} + \ldots \\ &\quad + N_{n-1-(\alpha-1)q,q-1}. \end{aligned}\right.$$

II. Le nombre des termes du second membre, dans l'équation (5), est α. Si $q = 2$, chacun de ces termes se réduit à 1; donc $N_{n,2} = \alpha$, ou

$$(6)\qquad N_{n,2} = \left(\frac{n}{2}\right),$$

relation évidente.

III. Si $q = 3$, l'équation (5) devient

$$(7)\quad N_{n,3} = N_{n-1,2} + N_{n-4,2} + N_{n-7,2} + \ldots + N_{n+2-3\alpha,2};$$

ou, d'après la formule (6),

$$(8)\ N_{n,3} = \left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n-4}{2}\right) + \left(\frac{n-7}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{n+2-3\alpha}{2}\right);$$

par exemple :

$$\begin{aligned} N_{19,3} &= \left(\frac{18}{2}\right) + \left(\frac{15}{2}\right) + \left(\frac{12}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{6}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) \\ &= 9 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 = 30; \end{aligned}$$

à cause de $\alpha = \left(\frac{19}{3}\right) = 6$.

En effet, les décompositions du nombre 19 sont :

1+1+17,	2+2+15,	3+3+13,	4+4+11,	5+5+9,	6+6+7.
1+2+16,	2+3+14,	3+4+12,	4+5+10,	5+6+8,	
1+3+15,	2+4+13,	3+5+11,	4+6+ 9,	5+7+7,	
1+4+14,	2+5+12,	3+6+10,	4+7+ 8,		
1+5+13,	2+6+11,	3+7+ 9,			
1+6+12,	2+7+10,	3+8+ 8,			
1+7+11,	2+8+ 9,				
1+8+10,					
1+9+ 9,					

IV. Pour trouver le second membre de l'equation (8), on doit considérer les diverses formes du nombre n, relatives au diviseur 6. On trouve ainsi, sans difficulté :

$$(9)\quad \begin{cases} \text{Pour } n = 6n', & N_{n,3} = N = 3n'^2; \\ n = 6n' + 1, & N = n'(3n' + 1); \\ n = 6n' + 2, & N = n'(3n' + 2); \\ n = 6n' + 3, & N = (n' + 1)^3 - n'^3; \\ n = 6n' + 4, & N = (n' + 1)(3n' + 1); \\ n = 6n' + 5, & N = (n' + 1)(3n' + 2). \end{cases}$$

V. *Remarque*. — Au lieu de ce système de formules, on peut prendre celui-ci :

$$(10)\quad \begin{cases} n = 6n', & N = \dfrac{n^2}{12}; \\ n = 6n' + 1, & N = \dfrac{n^2 - 1}{12}. \\ n = 6n' + 2, & N = \dfrac{n^2 - 4}{12}; \\ n = 6n' + 3, & N = \dfrac{n^2 + 3}{12}; \\ n = 6n' + 4, & N = \dfrac{n^2 - 4}{12}; \\ n = 6n' + 5, & N = \dfrac{n^3 - 1}{12}. \end{cases}$$

Il en résulte ce théorème curieux, proposé par M. Vachette (*) :

Parmi les quatre nombres n^2, n^2-1, n^2-4, n^2+3, il en est un divisible par 12 : le quotient égale le nombre des manières différentes de partager n en trois parties entières, positives, égales ou inégales.

VI. Quand q surpasse 3, il paraît difficile d'exprimer le nombre des solutions de l'équation (1), au moyen d'une formule qui ne soit pas illusoire, et l'on est réduit à faire usage, une ou plusieurs fois, de la relation (5). Soit, par exemple, $n=39$, $q=4$; d'où $\alpha=9$. Cette relation devient

$$N_{39,4}=N_{38,3}+N_{34,3}+N_{30,3}+N_{26,3}+N_{22,3}+N_{18,3}$$
$$+N_{14,3}+N_{10,3}+N_{6,3}.$$

Mais par les formules (10) :

$$N_{38,3}=\frac{38^2-4}{18}=120,$$
$$N_{34,3}=\frac{34^2-4}{12}=96,$$
$$N_{30,3}=\frac{30^2}{12}=75,$$
$$N_{26,3}=\frac{26^2-4}{12}=56,$$
$$N_{22,3}=\frac{22^2-4}{12}=40,$$
$$N_{18,3}=\frac{18^2}{12}=27,$$
$$N_{14,3}=\frac{14^2-4}{12}=16,$$
$$N_{10,3}=\frac{10^2-4}{12}=8,$$
$$N_{6,3}=\frac{6^2}{12}=3;$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, octobre 1867.

donc

$$N_{39,4} = 120 + 96 + 75 + 56 + 40 + 27 + 16 + 8 + 3 = 441,$$

résultat conforme à celui que donne Euler (*).

VII. Si, comme l'a fait ce grand géomètre, on veut construire une *table* des valeurs de la fonction $N_{n,q}$, on peut, au lieu de la relation (5), appliquer avec avantage l'équation suivante :

$$(11) \qquad N_{n,q} = N_{n-1,q-1} + N_{n-q,q},$$

ou bien celle-ci :

$$(12) \qquad N_{n+q,q} = N_{n+q-1,q-1} + N_{n,q} \text{ (**)}.$$

Au moyen de cette relation et des valeurs initiales

$$N_{n,1} = 1, \quad N_{n+1,1} = 1, \quad N_{n,n} = 1,$$

on forme aisément la table suivante, qui contient les valeurs de $N_{n+q,q}$.

(*) *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, t. I, p. 252.

(**) Les équations (11) et (12) sont des conséquences immédiates de la relation (5).

Table des valeurs de $N_{n+q,q}$.

Valeurs de q.	Valeurs de n.															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
3	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30
4	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64
5	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101
6	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136
7	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164
8	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186
9	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201
10	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212
11	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219
12	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224
13	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227
14	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229

D'après la formule (12) :

Un terme quelconque de la troisième ligne horizontale est égal à celui qui le précède de trois rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus;

Un terme quelconque de la quatrième ligne horizon-

tale est égal à celui qui le précède de quatre rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus ;

Etc.

VIII. De la relation (11), on peut déduire très-facilement la *fonction génératrice* de $N_{n,q}$. En effet, soient

$$F(x, q) = x^q + N_{q+1,q}x^{q+1} + \ldots + N_{n,q}x^n + \ldots,$$
$$F(x, q-1) = x^{q-1} + N_{q,q-1}x^q + \ldots + N_{n-1,q-1}x^{n-1} + \ldots.$$

Multipliant la première égalité par $1 - x^q$, la seconde par x, on trouve deux développements qui doivent être identiques ; donc

$$F(x, q) = \frac{x}{1-x^q}F(x, q-1);$$

et comme

$$F(x, 1) = x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x},$$

la fonction génératrice cherchée est

$$(13) \quad F(x, q) = \frac{x^q}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^q)} \; (*).$$

IX. Le second membre de la dernière équation est égal au produit des séries

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots,$$
$$x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \ldots,$$
$$x + x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13} + \ldots,$$
$$x + x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x + x^{q+1} + x^{2q+1} + x^{3q+1} + x^{4q+1} + \ldots.$$

L'exposant de x^n, dans ce produit, étant la somme des

(*) Ce théorème est dû à Euler.

exposants de x dans les facteurs de chacun des produits partiels, on a ce théorème remarquable (*) :

Il y a autant de manières de décomposer un nombre n en q parties entières, égales ou inégales, qu'il y en a de décomposer ce même nombre en q parties appartenant respectivement aux progressions

$$
\begin{array}{llllll}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6,\ldots, \\
1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11,\ldots, \\
1, & 4, & 7, & 10, & 13, & 16,\ldots, \\
1, & 5, & 9, & 13, & 17, & 21,\ldots, \\
\multicolumn{6}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
1, & (q+1), & (2q+1), & (3q+1), & (4q+1),\ldots.
\end{array}
$$

Par exemple, nous avons trouvé que le nombre 19 admet 30 décompositions en 3 parties. Or ce nombre 19 admet aussi les décompositions suivantes :

$1+1+17$,	$4+1+14$,	$7+1+11$,	$10+1+8$,	$13+1+5$,	$16+1+2$,
$1+3+15$,	$4+3+12$,	$7+3+9$,	$10+3+6$,	$13+3+3$,	
$1+5+13$,	$4+5+10$,	$7+5+7$,	$10+5+4$,	$13+5+1$,	
$1+7+11$,	$4+7+8$,	$7+7+5$,	$10+7+2$,		
$1+9+9$,	$4+9+6$,	$7+9+3$,			
$1+11+7$,	$4+11+4$,	$7+11+1$,			
$1+13+5$,	$4+13+2$,				
$1+15+3$,					
$1+17+1$.					

et celles-ci sont également au nombre de 30.

(*) Il a été donné, sous une autre forme, par Euler (*Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 244).