NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Sur l'équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 341-343.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__341_0>

SUR L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. E. CATALAN.

Dans l'un des derniers numéros du *Journal de Mathématiques*, M. Schlömilch ramène la résolution de l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

à la résolution d'une équation réciproque. La méthode suivante, qui ne diffère pas de celle de Descartes (*), me paraît préférable, sous le rapport de la simplicité, non-seulement à celle de M. Schlömilch, mais encore à tous les procédés connus.

I. Pour résoudre l'équation

$$(1) \qquad x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

à coefficients réels, posons

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + px + q)(x^2 - px + q'):$$

nous devrons trouver, pour les inconnues p, q, q', *au moins un système de valeurs réelles.*

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x, dans les deux membres, nous obtenons

$$q' + q = A + p^2, \quad q' - q = \frac{B}{p}, \quad qq' = C;$$

puis, en éliminant q et q',

$$(2) \qquad (A + p^2)^2 - \frac{B^2}{p^2} = 4C.$$

(*) SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, 2^e édition, p. 242.

Soit

$$(3)\qquad A + p^2 = q' + q = z;$$

l'équation (2) devient

$$(4)\qquad z^3 - Az^2 - 4Cz - (B^2 - 4AC) = 0.$$

Telle est la *réduite* de l'équation (1).

II. D'après la relation (3), *l'équation* (4) *a au moins une racine plus grande que* A (*). Si l'on désigne par γ cette racine, on trouve

$$(5)\qquad \begin{cases} p = \sqrt{\gamma - A}, \\ q' = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{B}{\sqrt{\gamma - A}}\right), \\ q = \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{B}{\sqrt{\gamma - A}}\right); \end{cases}$$

etc.

III. L'équation

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = 0$$

a pour réduite

$$z^3 - z^2 + 60z - 124 = 0$$

Celle-ci donne $\gamma = 2$. Donc

$$p = 1,\quad q' = 5,\quad q = -3;$$

et enfin

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 5).$$

IV. *Remarque.* — Lorsque la réduite (4) a ses trois racines réelles et plus grandes que A, la proposée (1) a toutes ses racines réelles. Mais alors les formules de

(*) On reconnaît aisément qu'elle en a un nombre impair.

Cardan (*) deviennent illusoires, et les valeurs de p, q, q' ne peuvent être exprimées sous forme réelle en fonction des coefficients A, B, C. Il en est de même si la réduite a ses racines réelles, mais non supérieures, toutes trois, à A. C'est donc seulement quand l'équation (4) a une seule racine réelle que les formules de Cardan peuvent être appliquées utilement à la résolution de l'équation (1) (**). Ce cas est celui où les coefficients A, B, C satisfont à la condition

$$-16(A^2-4C)^2C+4AB^2(A^2-36C)+27B^4>0.$$