

PERFORMANCES BALISTIQUES DES FUSÉES

PAR

B. FRAEYS de VEUBEKE

Professeur à l'Université de Liège

Université de Liège
BST - Sciences Appliquées et Mathématique
1, Chemin des Chevreuils; Bât B52/4
B-4000 LIEGE

Extrait de la *Revue Universelle des Mines*
(9^e Série, tome XIV, n^o 6, 1958, pages 174 à 193)



LIÈGE

IMPRIMERIE H. VAILLANT-CARMANNE, S. A., 4, PLACE ST-MICHEL, 4

1958

29106

PERFORMANCES BALISTIQUES DES FUSÉES ⁽¹⁾

par B. FRAEYS de VEUBEKE,

Professeur à l'Université de Liège

Résumé. — *Les performances balistiques des fusées peuvent être évaluées en première approximation en négligeant les pertes aérodynamiques. On élimine aussi les pertes de gravitation en supposant l'impulsion du moteur-fusée concentrée au point d'être équivalente à une percussion. La loi simple qui relie alors le gain de vitesse à la perte de masse (par. 2) met en évidence l'intérêt d'une vitesse effective d'éjection des produits de combustion aussi élevée que possible (par. 1). Les trajectoires idéales d'engins balistiques (par. 3) et les trajectoires optimales de transfert pour satellites artificiels (par. 4) s'en déduisent par des calculs simples (appendices I et II). Du point de vue de la charge utile, une théorie de la décomposition optimale (appendice III) permet de fixer les domaines de supériorité des fusées gigognes à un, deux, trois et quatre étages (par. 5). La nécessité d'étaler les impulsions pour réduire les dimensions du moteur fait intervenir une théorie des pertes de gravitation (appendice IV) qui permet d'estimer l'importance de ces pertes et de fixer le poids unitaire du moteur idéal (par. 6). Les paragraphes suivants sont consacrés à quelques considérations sur les pertes aérodynamiques, sur la détermination exacte des trajectoires optimales et sur l'échauffement cinétique. Les conclusions plaident en faveur d'une conception des fusées plus inspirée par la technique aéronautique.*

1. — Le moteur-fusée

Le lancement d'un satellite artificiel ou d'un engin balistique intercontinental impose le choix d'un mode de propulsion répondant à des caractéristiques très particulières. A égalité de poids et d'encombrement du propulseur, la poussée fournie doit être aussi grande que possible. Le fonctionnement doit être assuré dans des conditions extérieures très variables, sans qu'un ajustement mécanique compliqué ne soit nécessaire.

Le moteur-fusée répond admirablement à ces exigences. Il ne compte pratiquement pas d'organes mobiles, sa géométrie est fixe et son fonctionnement est indépendant de la vitesse de vol. A l'encontre des autres propulseurs qui utilisent aussi l'énergie libérée dans une réaction chimique, il n'est tributaire de l'air atmosphérique ni comme comburant, ni comme intermédiaire nécessaire à la production de l'effet de réaction.

Rappelons en effet que dans les turbo-propulseurs, turbo-réacteurs et stato-réacteurs la poussée provient en ordre principal d'un accroissement de vitesse communiqué au débit d'air qui les traverse. Le fonctionnement du moteur-fusée est donc aussi, dans une large mesure, indépendant de la pression, température et masse spécifique de l'atmosphère.

Sa capacité de fonctionner dans le vide en a fait naturellement le propulseur indiqué pour l'aéronautique, mais son domaine d'utilisation s'est étendu à l'aviation, soit comme auxiliaire au décollage, soit comme élément d'une propulsion mixte, fusée et turbo-réacteur, pour les besoins de l'interception pilotée à grande vitesse et grande altitude.

La nécessité d'emporter le comburant nécessaire à la réaction chimique et remplaçant l'air atmosphérique donne malheureusement au moteur-fusée une consommation spécifique élevée. La consommation des ergols (comburant et combustible) se situe entre 4 et 5 kilos par tonne de poussée et par seconde.

Sans entrer dans les détails de fonctionnement, il est nécessaire d'introduire avec quelque précision certaines notions qui joueront un rôle essentiel par la suite.

La figure 1 explique schématiquement la convention usuelle par laquelle on sépare l'aérodynamique externe de l'aérodynamique interne de la fusée. Le premier dessin montre la fusée soumise sur la totalité de sa surface, aire de sortie de la tuyère comprise, à la pression atmosphérique ambiante. La résultante de ces pressions est évidemment nulle. Le deuxième dessin montre la façon dont la traînée aérodynamique D est définie. C'est la résultante des différences Δp entre la pression réelle, due au mouvement de l'engin, et la pression ambiante, étendues à la surface externe à l'exclusion de l'aire de sortie A_s de la tuyère. Sur cette dernière agit réellement la pression de sortie p_s des produits de combustion, dont la différence avec la pression ambiante fournit une résultante $A_s(p_s - p_a)$ comptée comme terme propulsif (troisième dessin).

Enfin le terme propulsif principal provient d'une application du théorème de la quantité de mouvement au système matériel constitué par la fusée et les produits de combustion qu'elle contient à un instant déterminé. A un instant $t + dt$ ultérieur, le même système matériel (quatrième dessin) comporte la masse $M - mdt$ pour la fusée, portée à une vitesse $V + dV$ et la

(1) Conférence faite le 30 janvier 1958 à la Section de Liège de l'A. I. Lg.

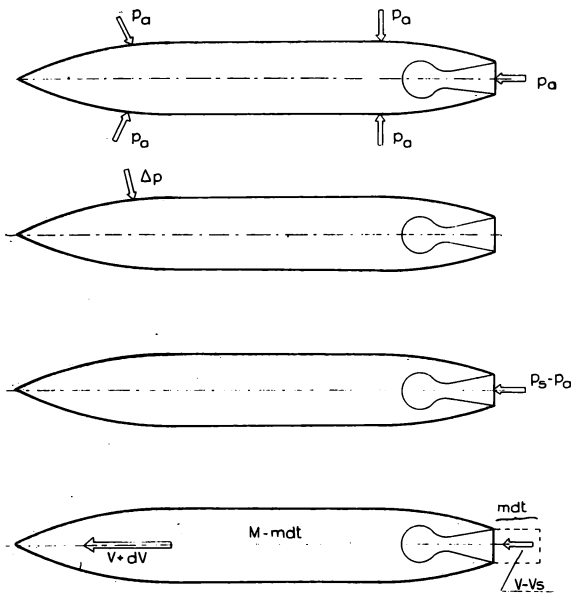


Fig. 1. — Séparation de l'aérodynamique externe de l'aérodynamique interne d'une fusée.

masse mdt de produits expulsés ayant une vitesse absolue $V - V_s$, où V_s est la vitesse d'éjection relative.

Egalant la variation de quantité de mouvement à la somme des forces extérieures appliquées (2)

$$\frac{1}{dt} [(M - mdt)(V + dV) + mdt(V - V_s) - MV] = A_s(p_s - p_a) - D.$$

Cette équation du mouvement peut être mise sous la forme newtonienne

$$M \frac{dV}{dt} = T - D \quad (1)$$

quoique la masse M soit variable

$$dM = - mdt \quad (2)$$

à condition de définir la force propulsive totale T par

$$T = mV_s + A_s(p_s - p_a). \quad (3)$$

Il est usuel de caractériser la poussée par une vitesse d'éjection « effective » c , telle que $T = mc$.

La vitesse effective et la vitesse réelle sont identiques si le moteur est adapté, c'est-à-dire si $p_s = p_a$.

Plus généralement l'expression

$$c = V_s + \frac{A_s}{m}(p_s - p_a)$$

(*) Si la fusée est dans un champ de gravitation, il faut évidemment ajouter aux forces extérieures la composante axiale de la pesanteur.

peut, en cas d'évolution isentropique, être mise sous la forme d'un produit

$$c = V_L F$$

dont les facteurs mettent en jeu respectivement le processus de combustion proprement dit et le processus de détente des produits de combustion. Le premier facteur est la vitesse limite qui serait atteinte par détente isentropique jusqu'à pression nulle

$$V_L = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{\mathcal{M}} T_0}$$

Elle est proportionnelle à la racine carrée de la température absolue T_0 de combustion, et inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse molaire \mathcal{M} des gaz produits. R désigne la constante universelle des gaz ($8,32 \cdot 10^7$ cm²/sec² par degré) et γ le rapport des chaleurs spécifiques.

La vitesse limite dépend donc essentiellement de la nature chimique des ergols en présence (3). Pour une dimension de moteur donnée, l'obtention d'un débit massique m et corrélativement d'une pression de chambre p_o , aussi élevés que possible est à la fois un problème de cinétique chimique et un problème technologique (résistance de la chambre à haute température).

Le second facteur est explicitement

$$F = c/V_L = \sqrt{1-a} \left[1 + \left(1 - \frac{p_a}{p_s} \right) \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{a}{1-a} \right]$$

avec $a = \left(\frac{p_s}{p_o} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

Il est illustré à la figure 2 pour une valeur de $\gamma = 1,21$. Le rapport de détente, qui figure en abscisse, est fixé par la géométrie de la tuyère de Laval. Les courbes correspondent à diverses valeurs du rapport p_a/p_o .

Les maxima de ces courbes correspondent à l'égalité $p_s = p_o$, c'est-à-dire au cas d'une tuyère adaptée; auquel cas on voit que le rendement augmente rapidement avec la diminution du rapport p_a/p_o . Cependant les moteurs-fusée appelés à fonctionner avec des rapports p_a/p_o diminuant rapidement par effet d'altitude, peuvent difficilement être munis de tuyères à géométrie variable. Une tuyère de géométrie fixe ne peut être adaptée qu'à une altitude déterminée. On se déplace alors suivant une verticale dans le diagramme et les gains de rendement sont moins sensibles. En fixant la meilleure altitude d'adaptation, il faut tenir compte du fait que le moteur supporte mal une contrepression à l'échappe-

(*) La température de combustion et la masse molaire varient toutes deux suivant la proportion des ergols mis en présence. Le rapport T_0/\mathcal{M} passe généralement par un maximum pour une proportion qui n'est pas nécessairement stœchiométrique.

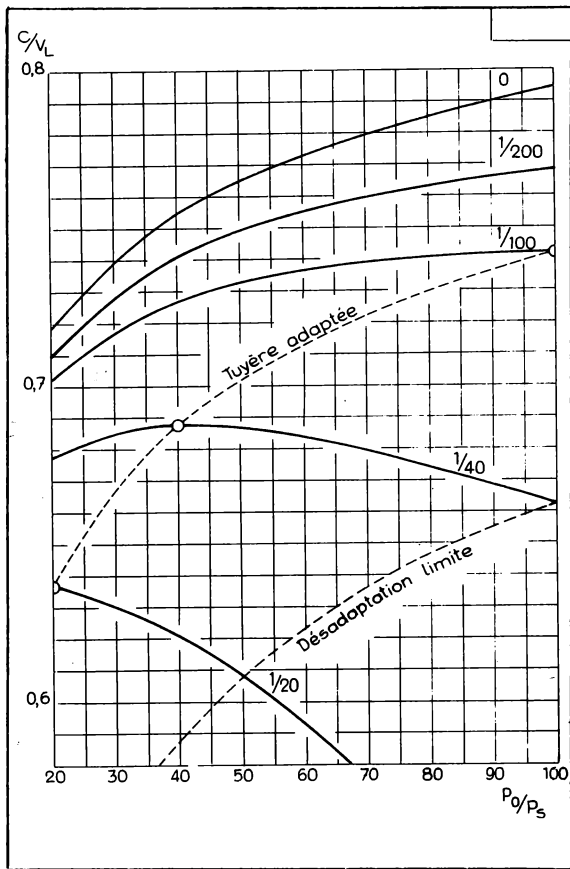


Fig. 2. — Rapport de la vitesse effective d'éjection à la vitesse limite en fonction du rapport de détente de la tuyère (abscisses) et du rapport de la pression ambiante à dans la chambre. Conditions isentropiques.

ment. Les ondes de choc de recompression à la sortie de la tuyère peuvent provoquer un décollement prématuré de la veine. Ce phénomène se produit en pratique quand la pression de sortie devient inférieure aux quatre dixièmes de la pression ambiante.

Si un moteur-fusée n'est appelé à fonctionner qu'à haute altitude, il peut donc bénéficier d'une augmentation sérieuse de rendement thermodynamique par l'accroissement possible du rapport de détente. C'est le cas pour les moteurs des étages supérieurs des fusées gigognes. Cela explique aussi partiellement l'intérêt du projet américain « Farside » consistant à transporter une fusée par ballon jusqu'à 40 kilomètres d'altitude avant de la lancer.

Il existe pourtant une limitation supérieure au rapport de détente intéressant. D'une part, l'aire de sortie de la tuyère prend des proportions exagérées d'autre part, on s'écarte de plus en plus des conditions d'une détente isentropique et le gain finit par s'annuler. Pour ces raisons, le diagramme ne s'étend pas au-delà du rapport 100. La valeur maximum qu'on peut atteindre pour c/V_L ne dépasse pas alors 0,795.

Pour tenir compte des pertes, les valeurs isentropiques obtenues pour la vitesse effective d'éjection sont à affecter d'un coefficient compris entre 0,93 et 0,99.

Pour fixer l'ordre de grandeur de c , examinons le cas d'un mélange oxygène liquide-hydrocarbure ayant une température de combustion de 3000° K et une masse molaire de 21 pour les produits de combustion avec $\gamma = 1,21$. La vitesse limite calculée est

$$V_L = 3,7 \text{ km/sec.}$$

Pour une pression de chambre de 20 kg/cm² et une adaptation au niveau de la mer, nous pouvons prendre un rapport de détente de 20. Au niveau de la mer et à très haute altitude, les vitesses d'éjection effectives deviendraient alors respectivement

$$\begin{aligned} 0,63675 \times 3,7 &= 2,356 \text{ km/sec} \\ 0,7178 \times 3,7 &= 2,656 \text{ km/sec} \end{aligned}$$

Il est plus usuel d'exprimer les performances d'un moteur-fusée en terme d'impulsion spécifique. L'impulsion spécifique est le produit de la poussée par le temps divisé par le poids d'ergols consommé pendant ce temps.

Dans notre exemple, cette impulsion spécifique prendrait les valeurs respectives de $\frac{2356}{9,81} = 240$ secondes et $\frac{2656}{9,81} = 270$ secondes.

Il est cependant utile d'observer que les impulsions spécifiques sont liées à la valeur de l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre et perdent par conséquent de leur signification dans les problèmes d'astronautique ; tandis que les vitesses effectives d'éjection conservent un sens absolu et doivent donc être considérées comme des données plus fondamentales. Les références (1) et (2) contiennent une analyse plus détaillée sur le fonctionnement des moteurs-fusées.

2. — Vitesse idéale et rapport de masse

S'il n'y a pas d'atmosphère, la traînée D peut être posée nulle et la vitesse effective d'éjection constante. Si, en outre il n'y a pas de champ de gravitation, ou, plus généralement, si la trajectoire suit une équipotentielle du champ gravifique, l'équation du mouvement (1) possède une intégrale élémentaire. Il suffit en effet d'y remplacer T par mc , et d'éliminer mdt par (2) pour la mettre sous la forme

$$dV + c \frac{dM}{M} = 0$$

avec l'intégrale immédiate

$$\Delta V = V - V_1 = C \ln \frac{M_1}{M} \quad (4)$$

A chaque instant le gain de vitesse est donc lié par une loi logarithmique au rapport entre la masse initiale de la fusée et sa masse actuelle.

Si la vitesse initiale V_1 est nulle, la vitesse instantanée livrée par cette formule s'appelle la « vitesse idéale » ou « vitesse caractéristique » et la formule porte le nom de « loi du rapport des masses ». Il est important de remarquer que, dans les conditions qui viennent d'être précisées, cette loi est valable quelle que soit l'intensité, même variable, du débit massique m , pourvu que c soit constant. La variation du débit n'influe que sur le temps mis à atteindre la vitesse idéale. Si ce temps est sans importance, la fusée peut être équipée d'un micromoteur, réservant ainsi un maximum d'espace et de poids pour la charge utile.

Quand la fusée doit acquérir de l'énergie potentielle dans un champ de gravitation et que la présence d'une atmosphère oblige à prendre en considération la traînée aérodynamique et la variation de c avec l'altitude, la loi de la vitesse idéale ne peut être conservée que si la vitesse est impartie dans un temps très court ; le travail de la pesanteur et de la traînée étant alors négligeables. Il faut pour cela un moteur tellement puissant que la masse d'ergols nécessaire pour communiquer la vitesse idéale soit consommée presque instantanément. L'impulsion reçue dans ces conditions se rapproche du cas limite de la percussion, pour lequel la formule (4) reste valable.

Cependant, une telle solution requiert un moteur énorme, dont le poids vient en déduction de la charge utile. Nous examinerons plus loin la nature du compromis qui se pose pour cette charge utile ; nous utiliserons en attendant le principe de la percussion pour fixer l'ordre de grandeur des rapports de masse nécessaires au lancement d'engins balistiques et de satellites artificiels.

3. — Trajectoires et rapports de masse pour le lancement d'engins balistiques

La terre est supposée sphérique et la fusée lancée par une percussion initiale. L'effet postérieur de la traînée aérodynamique est négligé ainsi que la rotation de la terre. Dans ces conditions se pose le problème de l'angle de lancement assurant la plus grande portée pour une percussion donnée.

Il généralise celui, bien connu, du projectile lancé dans un champ de gravitation uniforme, pour lequel la portée horizontale maximum correspond à un angle de site de 45° . La solution, établie à l'appendice I, montre que la trajectoire elliptique, dont un des foyers est nécessairement le centre C de la terre, a pour second foyer le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur la droite joignant le point de lancement au point

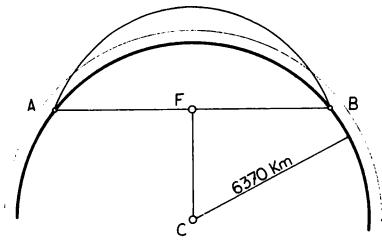


Fig. 3. — Trajectoire balistique de portée maximum.

d'impact (fig. 3). Pour les portées intercontinentales, l'altitude maximum atteinte est telle que le projectile sort effectivement de la pellicule atmosphérique pendant la plus grande partie de sa trajectoire. La figure 4 résume les principales caractéristiques de ces trajectoires idéales en portant l'angle de site, l'altitude maximum atteinte et la vitesse initiale requise en fonction de la portée. L'angle de site, dont la valeur à portée nulle est de 45° , conformément à l'approximation du champ de gravitation uniforme, décroît linéairement avec la portée pour s'annuler quand celle-ci devient un demi-arc de grand cercle. Le projectile se comporte alors comme un satellite rasant la surface de la terre et sa vitesse demeure égale à sa vitesse initiale, qui est la

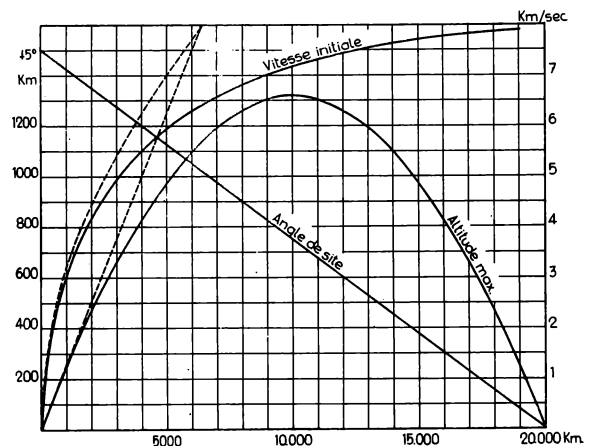


Fig. 4. — Caractéristiques des trajectoires balistiques idéales en fonction de leur portée.

vitesse orbitale correspondant au rayon de la terre ($\sqrt{gr_0} = 7,9$ km/sec.).

La figure 5 donne, en fonction de la portée, le rapport de masse nécessaire à l'obtention de la vitesse initiale correspondante et calculé par la loi (4) avec $c = 2,35$ km/sec (impulsion spécifique 240). La réalisation d'une portée balistique intermédiaire (2500 km) demande donc un rapport de masse d'environ 7, une portée balistique intercontinentale (9000 km) un rapport d'environ 20.

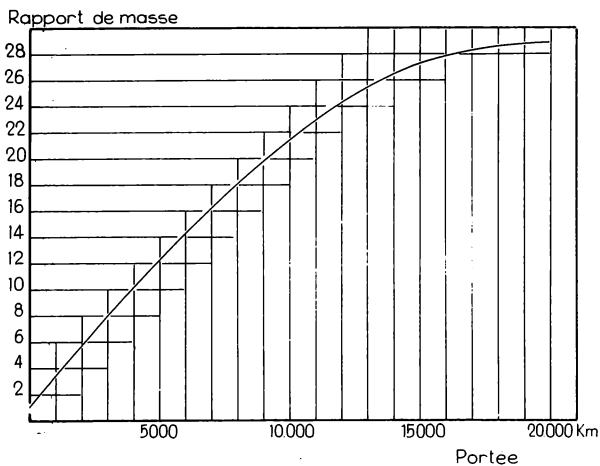


Fig. 5. — Rapports de masse pour un engin balistique en fonction de la portée ($c = 2,35$ km/sec).

4. — Trajectoires et rapports de masse pour le lancement de satellites artificiels

Le lancement d'un satellite peut être obtenu à l'aide de deux impulsions successives. Une première lance la fusée sur une trajectoire elliptique de « transfert » qui, prolongée, reviendrait couper la surface de la terre en un point symétrique du point de lancement L par rapport au grand axe. Une deuxième impulsion, au moment où l'ellipse de transfert touche l'orbite proposée, est nécessaire pour maintenir le satellite sur celle-ci. La famille de solutions possibles comporte essentiellement deux paramètres : l'angle de lancement et la position du point de contact sur l'orbite. Si l'on se propose de varier ces paramètres pour obtenir le rapport de masse total le plus faible possible, le calcul (appendice II) montre qu'il faut communiquer une impulsion initiale importante, tangentielle à la sur-

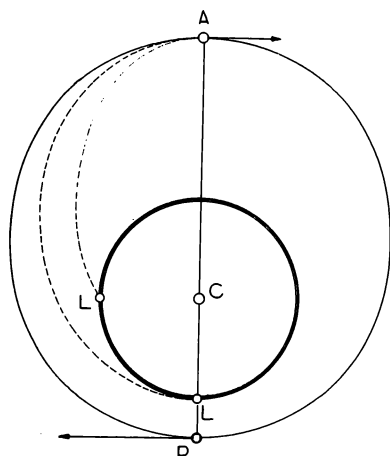


Fig. 6. — Injection d'un satellite sur son orbite par une ellipse de transfert.

face de la terre. Après avoir parcouru une demi-ellipse de transfert, la fusée doit alors subir une petite impulsion à l'apogée de l'orbite. Cette trajectoire correspond dans la figure 6 au point de lancement inférieur. Physiquement cette solution indique que l'énergie potentielle importante à dépenser pour amener une unité de mélange d'ergols à l'apogée, est compensée par la réduction en importance de l'impulsion, et donc de la quantité de mélange, requise à cet endroit.

Cette trajectoire a aussi comme caractéristiques théoriquement séduisantes que les deux impulsions se font tangentiellement à des équipotentielles du champ de gravitation. En étalant ces impulsions le long de segments finis, mais suffisamment courts, de trajectoire, la loi du rapport des masses resterait pratiquement vérifiée tandis que les moteurs pourraient être ramenés à des dimensions normales. Cependant, même en continuant à négliger les effets aérodynamiques, un départ quasi-tangentiel à la surface de la terre présenterait des difficultés sérieuses, parmi lesquelles la nécessité d'une longue rampe de lancement. On sait que pour supprimer celle-ci, le départ d'une fusée se fait généralement en équilibre vertical. La stabilité est obtenue par l'action de vanes défectrices dans le jet du moteur ou par un montage de l'ensemble moteur sur cardan. Ces méthodes d'autostabilisation, éventuellement secondées par l'action de gouvernes aérodynamiques quand la vitesse est devenue suffisante, permettent aussi d'incurver la trajectoire après le départ.

Il est intéressant d'examiner la pénalité que représente un mode de lancement idéalisé, dans lequel la première percussio n se ferait plus tangentielle à la surface de la terre. L'ellipse de transfert est alors plus tendue et se prête davantage à l'observation et au contrôle optique ou par radar.

Le calcul théorique établit que le raccord de l'ellipse de transfert à l'orbite doit être maintenu à l'apogée, tant que l'angle de lancement qu'on s'impose demeure inférieur à une valeur critique dépendant des caractéristiques de l'orbite. L'intensité de l'impulsion initiale diminue avec l'accroissement de l'angle de lancement, mais l'impulsion finale augmente plus rapidement. L'angle critique passé, il y a intérêt à raccorder l'ellipse de transfert au périgée. La seconde impulsion devient très importante, mais l'énergie potentielle unitaire dépensée pour amener les ergols en place est minimum.

L'application des formules de l'appendice II à un cas pratique permet de dresser le tableau I.

On peut observer que jusqu'à 30° la pénalité sur le rapport de masse n'est pas excessive. De plus, le moteur du dernier étage de la fusée, qui doit fournir l'impulsion finale, peut non seulement avoir un rendement thermodynamique

Tableau I

Altitude de l'apogée : 955 km.
 Altitude du périégée : 637 km.

Angle de lancement	Vitesse en fin de première impulsion km/sec.	Vitesse terminale sur la trajectoire de transfert km/sec.	Vitesse en fin de seconde impulsion km/sec.	Rapport de masse totale ($c = 2,35$ km/sec)
0°	8,18	apogée 7,11	7,30	35
12°45'	} 7,62	apogée 6,47	7,30	36,5
(critique)		périégée 6,47	7,62	36,5
30°	5,47	périégée 4,31	7,62	42
60°	3,79	— 1,72	—	62
90°	3,37	— 0	—	107

excellent, mais ses dimensions peuvent être réduites au profit de la charge utile par étalement de l'impulsion le long d'une équipotentielle du champ de gravitation comme il a été expliqué antérieurement. Enfin la réduction substantielle de la première impulsion est de nature à réduire les difficultés provoquées par l'échauffement cinétique dans les couches denses de l'atmosphère et dont nous aurons l'occasion de dire un mot pour terminer.

La trajectoire proposée pour la fusée lance-satellite du projet américain « Vanguard », la seule sur laquelle des renseignements assez précis ont été communiqués (3), est effectivement telle que 50 pour cent de la vitesse orbitale au périégée sont communiqués par le dernier étage.

En cas de lancement vers l'Est, dans le plan équatorial, on bénéficie de l'aide apportée par la rotation de la terre. Elle représente une vitesse initiale gratuite de 0,466 km/sec. Ce bénéfice est maximum pour un angle de lancement de 0°. Dans l'exemple traité, ceci réduirait le rapport de masse à 29. Dans le projet Vanguard, où la fusée doit être lancée à une latitude nord de 25°28' avec un angle de 40° sur le plan équatorial, le bénéfice représente environ 3 % de la vitesse orbitale.

5. — Etagement optimum des fusées

Quand une fusée à un seul étage a épuisé ses ergols, sa masse terminale M_2 est constituée d'une partie appartenant au système propulsif que nous appelons la masse moteur M_m , d'une partie M_s constituant la structure proprement dite (réservoirs et éléments chargés de transmettre les efforts) et enfin d'une partie M_u constituant la charge utile :

$$M_2 = M_m + M_s + M_u$$

Nous désignerons respectivement par

$$\mu = M_m/M_1 \quad \sigma = M_s/M_1 \quad u = M_u/M_1$$

le rapport de chacune de ces masses à la masse ravitaillée M_1 que possède la fusée au départ. Il sera commode de les appeler les masses unitaires de moteur, de structure et masse utile unitaire. Le gain de vitesse obtenu par la combustion complète des ergols peut alors, suivant la loi idéale, être mis sous la forme

$$V_2 - V_1 = c \ln \frac{1}{\mu + \sigma + u}$$

L'ordre de grandeur du rapport de masse nécessaire pour les portées balistiques intercontinentales ou le lancement d'un satellite ne permet pas d'envisager des réalisations au moyen de fusées à un seul étage. Pour un rapport de masse total de 25 par exemple, on a $\mu + \sigma + u = 1/25$; autrement dit quatre % seulement du poids total au départ seraient disponibles pour le moteur, la structure et la charge utile. On verra dans un instant que le moteur à lui seul représente probablement entre 4 et 9 % du poids au départ. En admettant même l'utilisation d'un super-carburant d'impulsion spécifique égale à 400 secondes (4) ($c = 3,924$ km/sec.), le rapport de masse pour le lancement d'un satellite avec angle initial de 30° est encore égal à 10 et ne laisserait que 10 % à partager entre le moteur, la structure et la charge utile.

Le principe de l'étagement, qui remédie à cette situation, est connu depuis les premières études sur les performances des fusées par Oberth en Allemagne et Goddard aux États-Unis. Il consiste à abandonner progressivement les masses devenues fonctionnellement inutiles et qui, sinon, absorberaient une partie de l'énergie cinétique et potentielle à communiquer. Dans la fusée gigogne, le fonctionnement se fait en étages emboîtés en série. Chaque étage possède son moteur dont la mise à feu se fait après que l'étage

(4) Ce chiffre est considéré comme le maximum qui pourra jamais être atteint par réactions chimiques.

inférieur, qui assurait seul la propulsion de l'ensemble, se soit séparé, ses réserves d'ergols étant épuisées. Par la multiplication des moteurs, on augmente sérieusement la complexité de l'ensemble, mais on peut utiliser les possibilités d'accroissement de rendement thermodynamique et de réduction des dimensions relatives antérieurement signalées.

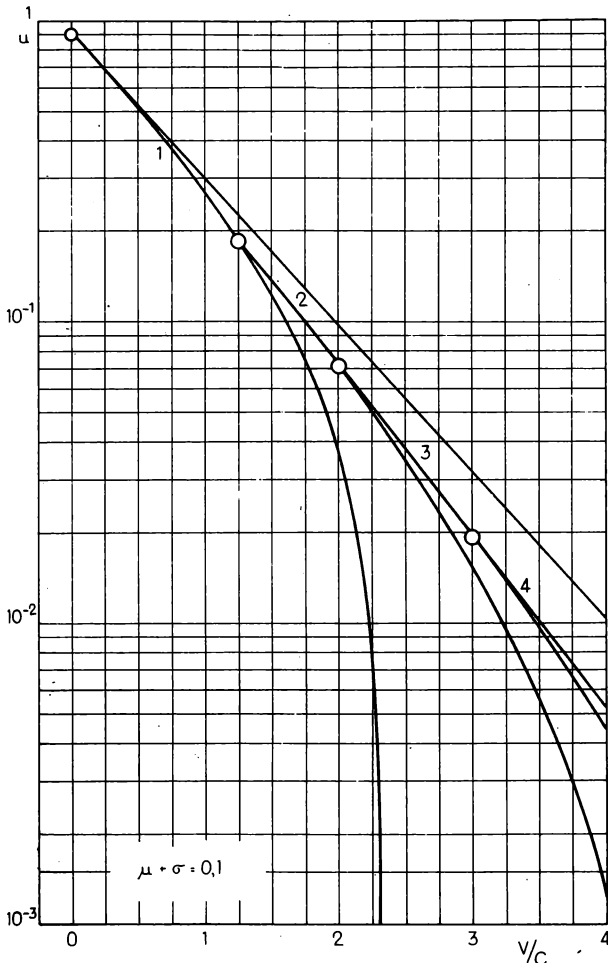


Fig. 7. — Charge utile unitaire en fonction des performances terminales de vitesse et du nombre d'étages. Pertes de gravitation et aérodynamiques négligées. La droite supérieure résulte d'une théorie de la fusée parallèle continue.

Le fractionnement peut aussi se faire en schéma parallèle. Dans ce cas, les moteurs des fusées accouplées en parallèle participent tous à la propulsion dès le départ. Ce schéma longtemps abandonné par suite de l'augmentation de traînée de la configuration au départ, peut devenir intéressant pour les grosses fusées comme la I. C. B. M. « Atlas », dont les problèmes de traînée aérodynamique s'effacent devant ceux des pertes de gravitation.

Le fractionnement optimum d'une fusée gigogne se traite simplement sur la base de la loi de vitesse idéale (Appendice III).

On considère que la charge utile de chaque étage est constituée par l'ensemble des étages suivants, dont il assure pendant un certain temps la propulsion. Si chaque étage a la même somme pour la masse unitaire de moteur et de structure et une même vitesse effective d'éjection, le résultat est particulièrement simple à commenter. Le gain de vitesse idéale est partagé également entre les divers étages et la charge utile unitaire de chaque étage est la même.

Si par exemple la charge utile réelle d'une fusée triple représente 10 % du troisième et dernier étage, les masses de la charge utile et des étages trois, deux plus trois, et un plus deux plus trois, ou fusée complète, seront respectivement proportionnelles aux nombres 1, 10, 100 et 1000. De la sorte la charge utile unitaire de la fusée complète serait de 1 ‰ (chiffre cité pour le satellite porté par la fusée triple Vanguard).

Les figures 7 et 8 supposent simplement que c ait la même valeur pour les moteurs.

La figure 7 représente en diagramme semi-logarithmique la charge utile unitaire en fonction du nombre d'étages et du gain de vitesse total à réaliser (en unités réduites V/c). La valeur 0,1 indiquée pour μ + σ représente la moyenne géométrique admise pour l'ensemble des μ + σ des différents étages. Dans la zone de performances 0 ≤ V/c < 1,2 la fusée à un étage a la meilleure charge utile unitaire. Elle doit ensuite rapidement céder le pas à la fusée à deux étages. A partir de V/c = 2, la fusée à trois étages est meilleure. La différence qui se marque en faveur de la fusée à quatre étages à partir de V/c = 3 est peu prononcée. La droite qui limite supérieurement le diagramme est en quelque sorte la limite absolue qu'on peut espérer obtenir par fractionnement des masses. Elle est basée sur

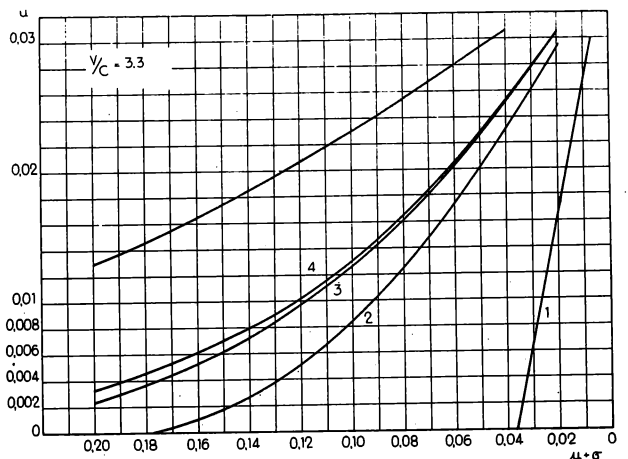


Fig. 8. — Charge utile unitaire en fonction de la somme des poids unitaires de moteur et de structure et du nombre d'étages pour une performance donnée. La courbe supérieure est relative à la fusée parallèle continue.

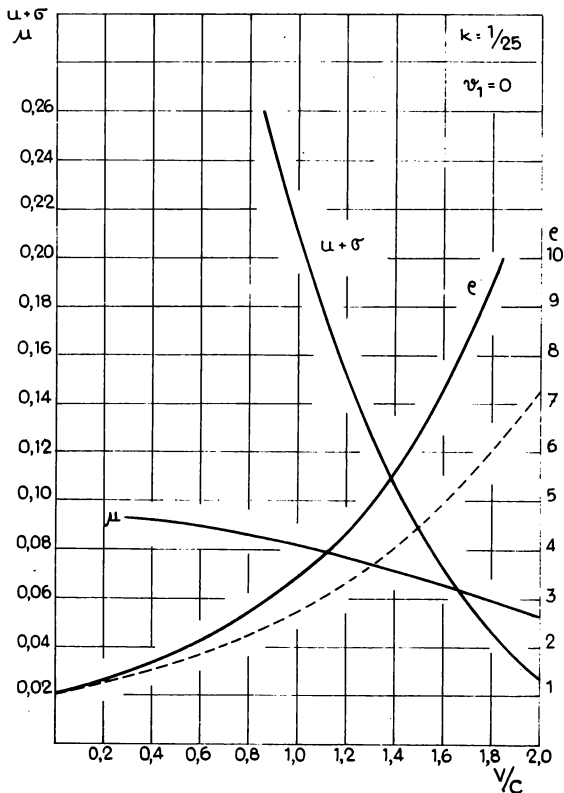


Fig. 9. — Poussée du moteur optimisée pour les pertes de gravitation en vol vertical; vitesse initiale nulle. Rapport de masse réel (trait plein) et idéal (traits interrompus), poids unitaire du moteur et somme des poids unitaires utile + structure en fonction de l'énergie terminale totale exprimée en vitesse équivalente.

une théorie de la fusée parallèle continue que l'on trouvera aussi traitée à l'appendice III.

La figure 8 présente une information similaire. On y a cette fois arrêté la valeur de la performance à $V/c = 3,3$ (7,755 km/sec pour $c = 2,35$ km/sec) et présenté la charge utile unitaire en fonction des valeurs de la moyenne géométrique de $\mu + \sigma$.

6. — Pertes de gravitation et choix optimum du moteur

Nous avons déjà signalé à la fin de la section 2 l'existence d'un compromis sur les dimensions du moteur quand la fusée est appelée à traverser les équipotentielles du champ de gravitation. De fait si le moteur est petit et que l'impulsion est étalée sur un long segment de trajectoire, on dépense inutilement une partie de l'énergie chimique à l'accroissement d'énergie potentielle de la fraction d'ergols non encore consommée. Il y a donc des « pertes de gravitation » qui doivent être introduites pour corriger la loi de la vitesse idéale. Par contre, si le moteur est trop grand,

il réduit la charge utile disponible et on peut dire qu'une partie de l'énergie chimique a été dépensée pour accroître l'énergie cinétique et potentielle d'une masse dont l'utilité finale est nulle.

Ce compromis peut être tranché analytiquement dans les hypothèses suivantes :

la composante de l'accélération de la pesanteur suivant l'axe de la fusée est constante ;

la vitesse effective d'éjection et le débit massique et donc aussi la poussée sont maintenus constants ;

la traînée aérodynamique est négligeable ;

le poids propre d'un moteur est une fraction déterminée de la poussée maximum qu'il peut fournir.

Nous basant sur les données publiées pour le moteur de la V2 (4) qui fournit une poussée

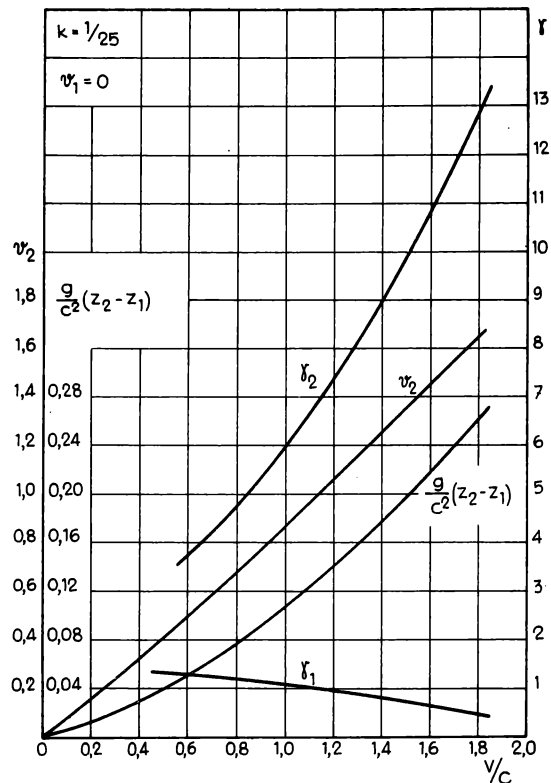


Fig. 10. — Accélération nettes en unités g en début et fin de combustion, vitesse terminale réduite et gain d'altitude terminale réduite dans les conditions de la figure 9.

de 25 tonnes pour un poids propre d'une tonne (550 kilos pour le générateur de poussée proprement dit et 450 kilos pour le dispositif d'alimentation) le rapport 1/25 a été adopté pour l'application numérique des formules d'optimum établies à l'appendice IV.

Les figures 9 et 10 présentent les résultats pour une fusée s'élevant à la verticale, départ arrêté.

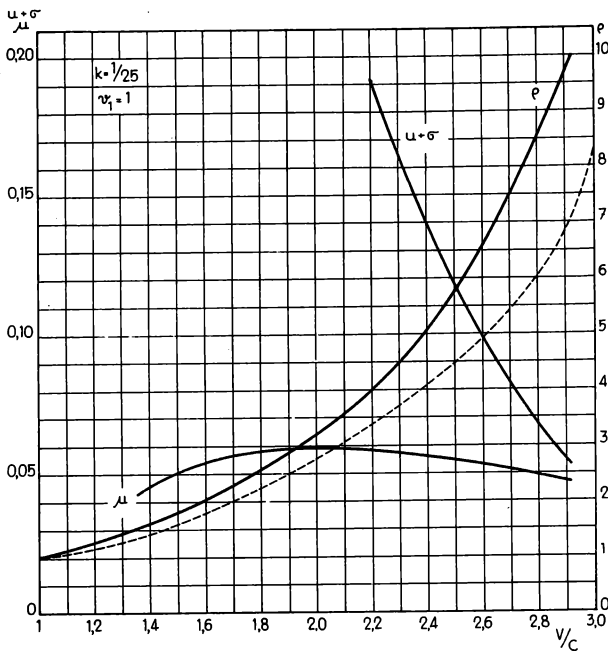


Fig. 11. — Modification de la figure 9 quand la vitesse initiale est égale à la vitesse effective d'éjection.

Les figures 11 et 12 pour une fusée s'élevant à la verticale, mais dont la vitesse initiale est égale à la vitesse effective d'éjection.

Dans tous les cas, l'échelle des abscisses représente l'énergie totale acquise en fin de combustion (cinétique et potentielle) convertie en vitesse réduite équivalente. L'importance des pertes de gravitation est visible sur l'écart entre la courbe des rapports de masse réels ρ et des rapports de

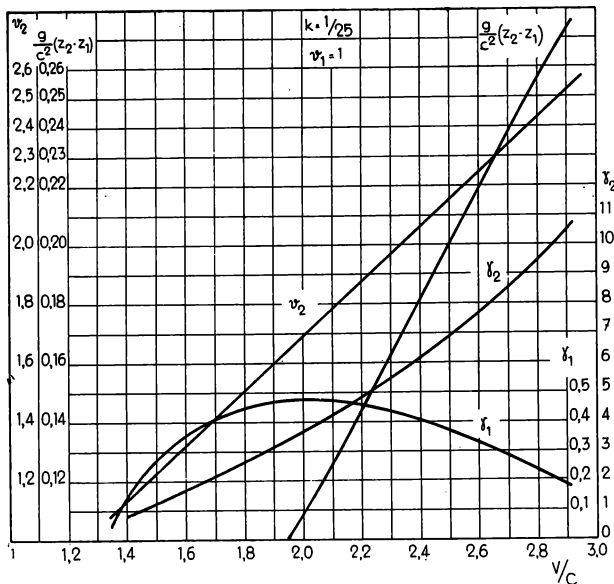


Fig. 12. — Modification de la figure 10 quand la vitesse initiale est égale à la vitesse effective d'éjection.

masse prévus par la loi de vitesse idéale (traits interrompus). Le poids unitaire du moteur oscille entre 9 et 5 % du poids total.

A noter aussi comme très caractéristique la faible valeur de l'accélération initiale nette γ_1 de la fusée et sa diminution avec l'accroissement des performances demandées à l'étage. L'accélération γ_2 en fin de combustion augmente par contre fortement. L'échelle des accélérations est en unités g .

7. — Pertes aérodynamiques

La réduction des pertes de gravitation demande que l'énergie acquise en fin de combustion soit le plus possible sous forme cinétique et le moins possible sous forme potentielle.

Or une grande vitesse à basse altitude, où l'atmosphère est dense, peut représenter une traînée aérodynamique importante. A l'inverse des pertes de gravitation, les pertes aérodynamiques demandent pour être réduites que l'énergie soit acquise surtout sous forme potentielle, l'ascension ayant lieu à la vitesse la plus faible possible. L'introduction des forces aérodynamiques dans nos considérations peut donc déplacer le compromis sur le choix du moteur vers des poussées plus modérées que celles prévues par la seule théorie des pertes de gravitation. L'effet de la traînée peut donc être double : d'une part elle dissipe directement une partie de la puissance utile fournie par le moteur-fusée ; d'autre part, la réduction de poussée qu'elle peut imposer augmente indirectement les pertes de gravitation. L'analyse mathématique du meilleur compromis est du ressort du calcul des variations. On peut soit établir directement une fonctionnelle, dont on recherchera le minimum (5), soit utiliser une méthode générale capable d'intégrer automatiquement toutes les liaisons différentielles auxquelles les variables sont soumises(6). Quelle que soit la méthode suivie, il en découle un résultat fondamental d'une remarquable simplicité, que nous pouvons appeler l'équation d'équilibre des pertes :

$$Ma = V \frac{\partial D}{\partial V} - D \left(1 - \frac{V}{c} \right)$$

C'est une relation idéale entre la composante axiale du poids instantané de l'engin d'une part et une fonction de la traînée aérodynamique D d'autre part. Toute inégalité entre les deux membres de cette équation implique soit qu'il y aurait avantage à augmenter la vitesse (à la même altitude) pour réduire les pertes de gravitation, soit au contraire à la diminuer pour réduire les pertes aérodynamiques. La traînée, nulle au départ, augmente rapidement avec la vitesse de la fusée. Elle finit cependant par

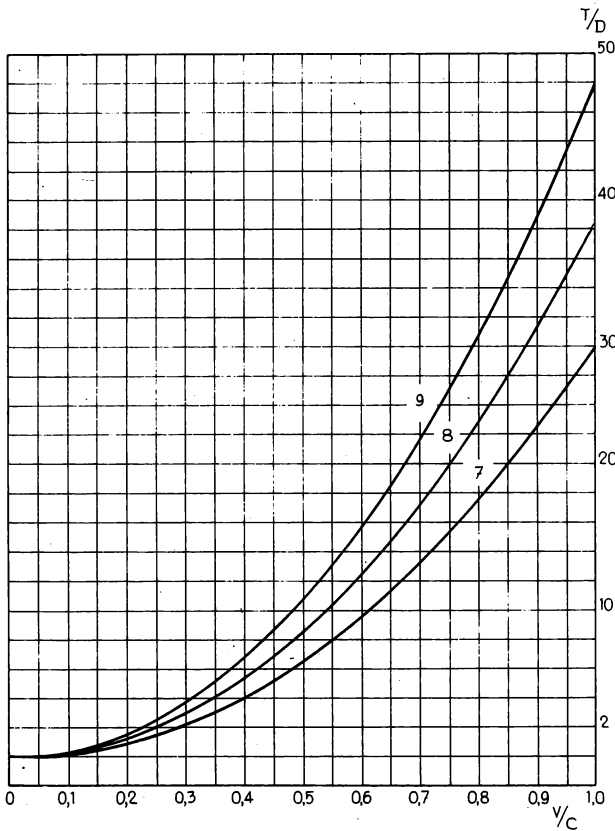


Fig. 13. — Rapport poussée-trainée d'une fusée en vol vertical avec équilibre entre les pertes de gravitation et les pertes aérodynamiques pour diverses valeurs de l'impulsion spécifique.

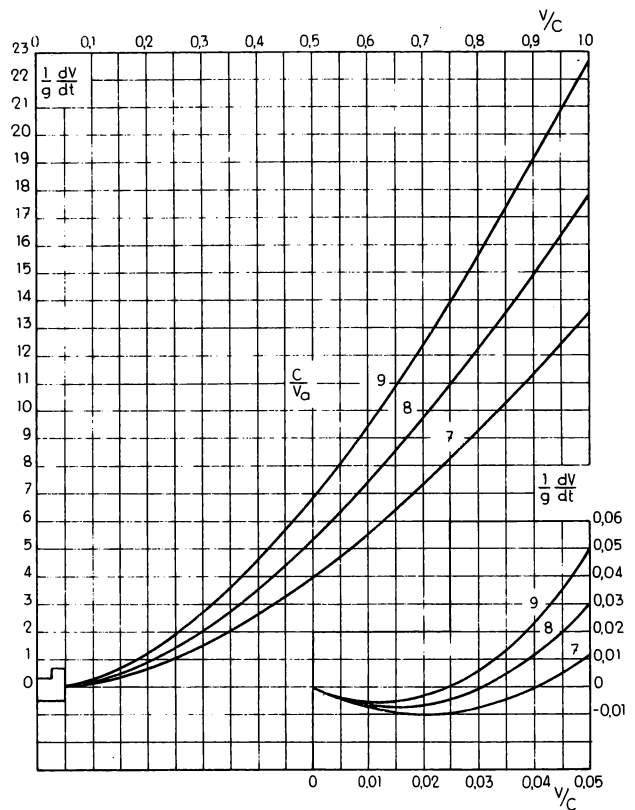


Fig. 14. — Accélération verticale nette d'une fusée en vol vertical avec équilibre des pertes.

décroître en raison de la diminution avec l'altitude de la masse spécifique de l'atmosphère.

Le second membre de l'équation d'équilibre des pertes varie d'une façon semblable à la traînée; tandis que le premier membre décroît à la fois par suite de la diminution du poids et de l'inclinaison de l'axe de la fusée.

Au départ où les pertes de gravitation l'emportent donc de beaucoup sur les pertes aérodynamiques, il s'impose de faire fonctionner le moteur-fusée à pleine poussée jusqu'à ce que la condition d'équilibre soit éventuellement atteinte. De cet instant la poussée peut être réduite pour maintenir l'équilibre des pertes. Cependant il arrive un moment où l'effet de l'altitude devient prépondérant; la traînée devient insignifiante et la condition d'équilibre s'attache de plus en plus à la réduction des pertes de gravitation. La poussée demandée devient tellement forte qu'elle atteint le maximum dont le moteur est capable et l'engin quitte de nouveau la situation d'équilibre.

Pour les fusées qui atteignent la condition d'équilibre, il est donc intéressant de prévoir la réalisation d'un moteur dont la poussée pourrait être programmée. Ceci se fait en général en modi-

fiant le débit des ergols injectés dans la chambre de combustion.

Certaines relations simples existent pendant l'intervalle de temps où une fusée suivrait la condition d'équilibre en vol vertical (5). Elles sont illustrées aux figures 13 et 14 pour une loi de traînée quadratique

$$D = R\rho(z)V^2$$

où $\rho(z)$ désigne ici la masse volumique de l'atmosphère comme fonction de l'altitude. Cette loi est valable pour un corps élané en régime subsonique et supersonique (la zone transsonique étant de toute façon traversée très rapidement et la traînée transsonique réduite par effet d'accélération).

La condition d'équilibre prend alors la forme simple

$$Mg = D(1 + V/c)$$

La figure 13 donne le rapport entre poussée et traînée

$$\frac{T}{D} = \frac{(2 + \omega)(2 + 3\omega) + \omega^2(1 + \omega)^2 \beta^{-1}}{2 + 4\omega + \omega^2}$$

avec $\omega = V/c$ et $\beta = -\frac{c^2}{g\rho} \frac{d\rho}{dz}$

En première approximation, la grandeur

$$-g\rho \frac{dz}{d\rho} = V_a^2$$

peut être considérée comme une constante caractéristique de l'atmosphère. Elle a les dimensions du carré d'une vitesse et, pour l'atmosphère-type utilisée dans les calculs de performance des aérodynes, se trouve être légèrement inférieure à la célérité du son dans la tropopause. La valeur $V_a = 275$ m/sec est par exemple en bon accord avec la loi de variation quasi-exponentielle de la masse volumique de l'atmosphère depuis le niveau de la mer jusqu'à 25 kilomètres d'altitude. En raison de sa faible valeur à des altitudes supérieures, elle peut être extrapolée sans risques de grandes erreurs dans le calcul des pertes aérodynamiques.

Le coefficient β^{-1} prend alors la forme

$$\beta^{-1} = (c/V_a)^2$$

Les valeurs $\beta = 7, 8$ et 9 correspondent à une gamme de vitesses effectives d'éjection normalement couverte en pratique (1925, 2200 et 2475 m/sec).

La figure 14 donne l'accélération nette de la fusée dans les conditions d'équilibre

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{(1 + \omega)(2 + \omega^2\beta^{-1})}{2 + 4\omega + \omega^2} - 1$$

Ces deux figures montrent clairement l'effet prépondérant de la réduction exponentielle de la densité atmosphérique. Dès que la condition d'équilibre autorise des valeurs de ω importantes, la traînée devient négligeable devant la poussée et l'accélération nette atteint des valeurs supérieures à celles prévues par le compromis sur le choix du moteur dans le cas des seules pertes de gravitation.

La question de savoir si une fusée atteindra ou non la situation d'équilibre dépend essentiellement de son poids total au départ et secondairement de ses performances.

Il y a ici un facteur d'échelle qui joue un rôle prépondérant : la traînée croissant approximativement comme le carré des dimensions linéaires et le poids comme le cube de celles-ci. Les grosses fusées peuvent donc ne pas atteindre la condition d'équilibre des pertes et dans ce cas leur moteur peut fonctionner à pleine poussée, la complication d'une programmation de celle-ci étant inutile. La traînée peut cependant exercer une influence sur le choix du moteur. Un traitement analytique du compromis n'est plus possible et l'optimum doit être établi par un calcul complet des performances de plusieurs projets.

8. — Choix de la trajectoire

Les trajectoires théoriques qui ont été analysées sont modifiées assez profondément par la

nécessité du départ à la verticale et l'introduction des pertes. Le calcul d'une trajectoire optimale, présentant une programmation de l'inclinaison de la fusée et éventuellement de la poussée, est un nouveau problème, beaucoup plus compliqué, du calcul des variations. Il peut être abordé par la méthode générale (6) et dans certains cas, les équations différentielles explicites à résoudre ont été données (7). Leur résolution ne peut se faire en pratique qu'au moyen de calculatrices digitales ou analogiques ; souvent au prix de longs tâtonnements pour arriver à satisfaire toutes les conditions aux limites demandées.

Le montage sur cardan du moteur principal avec commande par vérins hydrauliques semble être devenu une solution classique pour le contrôle de la trajectoire. Tout braquage du moteur provoque un moment de tangage ou de lacet qui incite la fusée à prendre un angle d'attaque ou de dérapage (la vitesse du centre de gravité n'est plus alignée sur l'axe de symétrie). La composante de la poussée perpendiculaire à la vitesse, qui constitue l'élément le plus efficace pour modifier la courbure de la trajectoire dépend à la fois des angles d'attaque et de dérapage et des angles de braquage du moteur.

Les angles d'attaque et de dérapage de la fusée provoquent eux-mêmes des forces aérodynamiques transversales agissant sur la courbure de la trajectoire. Cependant, exception faite pour la présence de véritables surfaces portantes, ces forces transversales sont faibles tout en provoquant une augmentation considérable de la traînée. Aussi pendant la phase initiale en atmosphère dense, le programme de braquage du moteur et la forme de la trajectoire sont-ils gouvernés, non tant par des considérations d'optimisation, que par la nécessité d'obtenir une trajectoire sans portance. A haute altitude, les considérations de traînée ne jouent plus et la programmation optimale peut jouer son rôle. Ainsi pendant la phase d'impulsion finale à communiquer au satellite, un problème qui a été considéré par Lawden (8).

9. — Echauffement cinétique

Beaucoup plus que la traînée, ce sont les phénomènes thermiques évoqués dans les structures par la traversée de la pellicule atmosphérique qui limitent actuellement certaines performances des engins. Plaçons-nous dans un système d'axes lié à l'engin et considérons l'écoulement relatif de l'air autour de lui. L'écoulement non-perturbé venant de l'amont possède la température T_∞ la masse volumique et la pression régissant à cette altitude dans l'atmosphère ; sa vitesse relative est égale à la vitesse de déplacement de l'engin et il est commode ici de la mesurer par son nombre de Mach M_∞ , c'est-à-dire en prenant

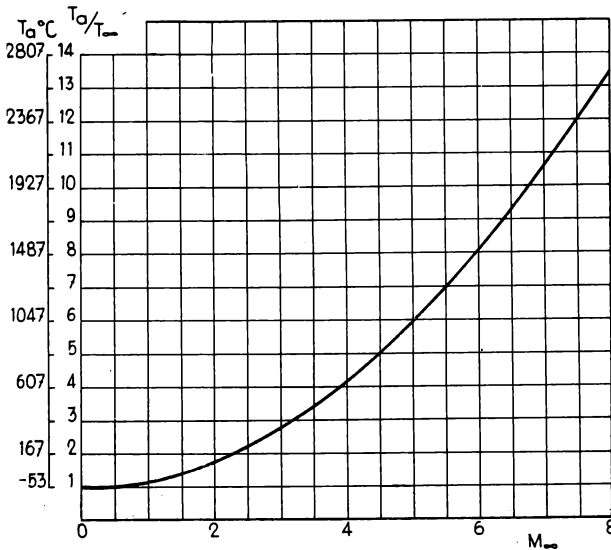


Fig. 15. — Température d'arrêt en fonction du nombre de Mach de vol.

comme unité de vitesse la célérité de propagation des perturbations infinitésimales de pression, ou célérité du son.

Pour fixer les idées, nous pouvons adopter pour cette unité la valeur de 300 m/sec dans la tropopause, où la température extérieure descend à environ -59° centigrades.

Si la vitesse d'une particule de cet écoulement était annulée adiabaticquement, c'est-à-dire sans qu'elle puisse échanger de chaleur avec ses voisines, son énergie cinétique ordonnée se transformerait en énergie désordonnée avec augmentation de pression et de température. Cette dernière, la température dite « d'arrêt », atteindrait la valeur

$$T_a = T_\infty \left(1 + \frac{M_\infty^2}{5} \right) \quad (\gamma = 1,4 \text{ pour l'air}).$$

T_a et T_∞ étant des températures absolues.

La figure 15 illustre cette formule et l'échelle de gauche donne la température d'arrêt relative en degrés centigrades quand la température relative ambiante est de -53° centigrades.

Quand la particule est arrêtée de façon plus graduelle, par l'effet de la viscosité dans la mince couche limite qui entoure le fuselage, son élévation de température est un peu inférieure par suite des effets de conductibilité qui ont le temps de se produire et qui l'emportent sur la source additionnelle de chaleur constituée par la dissipation d'énergie par viscosité (9).

Si T_1 et M_1 désignent la température et le nombre de Mach local dans l'écoulement potentiel, juste en dehors de la couche limite, la température T_{c1} de l'air au contact de la paroi est donnée par la formule

$$T_{c1} = T_1 + r(T_{a1} - T_1)$$

où le « facteur de récupération » r a approximativement la valeur 0,85 pour une couche limite laminaire et 0,9 pour une couche turbulente. Même en présence d'ondes de choc, la température de stagnation T_{a1} correspondant à M_1 :

$$T_{a1} = T_1 \left(1 + \frac{M_1^2}{5} \right)$$

est virtuellement la même que la température d'arrêt T_a

$$T_{a1} = T_a$$

Il en résulte pour la température de contact à la paroi l'expression

$$T_{c1} = T_\infty \frac{1 + rM_1^2/5}{1 + M_\infty^2/5} (1 + M_\infty^2/5) \leq T_a$$

Elle est d'autant inférieure à la température d'arrêt que le nombre de Mach local est plus élevé (5). Cet « effet de forme » peut avoir son importance. Il assure par exemple un refroidissement partiel du cône de pénétration par conduction le long de la paroi vers les régions moins échauffées.

Si on néglige la conduction de chaleur le long de la paroi, le flux de chaleur qui pénètre perpendiculairement est proportionnel à la différence entre la température de contact T_{c1} et la température actuelle de la paroi. Le coefficient de proportionnalité, ou « coefficient de transfert », diminue fortement avec l'altitude par suite de la réduction dans le nombre de chocs de particule par unité de temps. Eventuellement la température de la paroi se stabilise quand le flux de chaleur qui pénètre est en équilibre avec les pertes par rayonnement. Celles-ci ne deviennent importantes qu'à des températures élevées comme le fait prévoir l'application de la loi de Stephan suivant laquelle la puissance dissipée par unité de surface serait égale à

$$\epsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4)$$

où ϵ est le pouvoir émissif et σ la constante de Stephan-Boltzmann.

Dans cette application, l'absorption par la couche limite est négligée.

L'importance du pouvoir émissif sur la température stabilisée est très grande aux hautes températures. Il est précisément très variable suivant l'état de surface, ce qui constitue une difficulté sérieuse de calcul. Ainsi pour l'acier à 555° , le pouvoir émissif est $\epsilon = 0,14$ pour l'état poli et 0,79 pour l'état oxydé.

(5) Rappelons que le nombre de Mach local varie non seulement en raison des variations de la vitesse locale, mais aussi en raison inverse des variations de la célérité locale du son. Celles-ci sont dues elles-mêmes aux variations locales de température absolue.

Pour une fusée la température de paroi n'est jamais en équilibre. De plus, si la valeur de la température atteinte est importante pour les propriétés mécaniques du matériau, le taux d'échauffement est tout aussi important en relation avec les tensions thermiques et le danger de flambage. Pour ces raisons, la repénétration d'un engin balistique dans l'atmosphère est beaucoup plus critique, le taux d'échauffement croissant rapidement par suite de l'augmentation simultanée de la vitesse de vol et du coefficient de transfert. Il intervient de plus à un moment où la structure, ayant déjà perdu une partie de ses propriétés mécaniques par échauffement à la montée, n'a pu se refroidir que partiellement par rayonnement aux altitudes supérieures.

Plusieurs méthodes de refroidissement ont été envisagées et certaines ont reçu un début d'application en pratique (10). Ce sont : l'emploi d'un isolant thermique extérieur (céramique), le refroidissement par liquide de la paroi intérieure, la transpiration (pompage d'un gaz ou d'une vapeur à travers une paroi poreuse) et la sublimation d'une portion extérieure de la surface (gypse, graphite).

10. — Conclusions

Le lancement d'un engin balistique ou d'un satellite apparaît comme une opération d'un rendement énergétique désastreux. La sensibilité de ce rendement aux moindres progrès technologiques est extrême. Progrès dans l'allègement des structures, dans leur protection contre l'échauffement cinétique, dans l'allègement des équipements de contrôle et de stabilisation, dans l'allègement du moteur et de son dispositif d'alimentation, dans le choix des ergols, etc. Chaque petite avance dans un domaine entraîne, par réaction en chaîne sur l'ensemble des compromis, un gain final de rendement presque hors de proportion avec la mise initiale. Cette sensibilité de l'équilibre des compromis est ici un aspect spectaculaire de la science appliquée, où le succès éclatant côtoie de près l'échec misérable. L'analyse serrée des compromis, dont la nécessité se révèle ici absolue, a fait progresser les méthodes rationnelles d'optimisation, dont l'outil mathématique essentiel est le calcul des variations. De plus en plus également s'affirme, pensons-nous, la distinction entre la technologie spécialisée dont les progrès nous sont indispensables, et la conception d'ensemble, basée sur une maîtrise complète de l'interaction entre les phénomènes physiques en jeu. Peut-être l'optimisation de la conception d'ensemble ne possède-t-elle pas une solution unique. Ou plutôt, malgré l'avènement des calculatrices électroniques si rapides, la

comparaison entre des projets, basés sur un schéma de base différent, est-elle encore trop difficile à mener jusqu'au bout. A ce sujet, il faut dire que la conception des engins actuels se ressent encore fort de ses origines balistiques. Une évolution vers une conception plus inspirée de l'aéronautique ne tardera probablement pas à s'accroître. La figure 16 peut nous renseigner sur les possibilités qu'on peut attendre d'une telle évolution. Elle est tirée d'une étude de F. Haber, modifiée par E. P. Williams et reproduite dans la référence (10). Elle tend à démontrer qu'il est possible en principe d'accéder aux vitesses et altitudes du régime du satellite en vol stabilisé. Le « corridor » qui permet ce passage est limité à gauche par la nécessité d'avoir une pression dynamique suffisante pour la sustentation. A droite par la température stabilisée de paroi qui résulterait de la combinaison vitesse-altitude considérée. Il est certain que l'emploi de surfaces portantes sera de nature à augmenter fortement le rendement énergétique des fusées

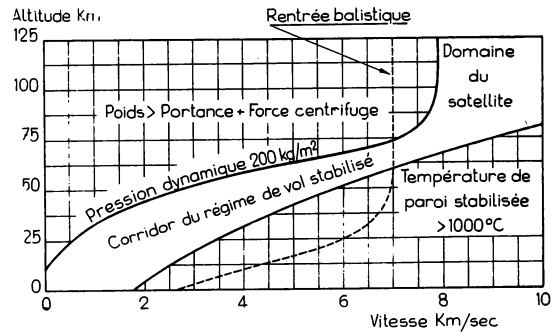


Fig. 16. — Le corridor du régime de vol stabilisé.

à grande performance. Cependant, en dehors des problèmes de tenue de la voilure sous échauffement cinétique, se posent encore des problèmes incomplètement résolus en ce qui concerne l'aérodynamique en atmosphère très raréfiée. Quand le nombre de Knudsen, c'est-à-dire le rapport du libre parcours moyen des molécules à une dimension caractéristique du planeur, augmente, on assiste à la disparition de la couche limite et la fiction du milieu continu, qui est à la base des théories classiques, doit faire place aux théories moléculaires plus étroitement apparentées à la cinétique des gaz. L'état de surface des parois joue de nouveau un rôle important vis-à-vis du mode de réflexion des molécules (réflexion spéculaire ou diffuse). Dans ce domaine, les mesures précises sur la vie d'un satellite sphérique peuvent fournir une contribution expérimentale importante.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. M. Barrère, A. Jaumotte, B. Fraeys de Veubeke et J. Vandekerckhove. — La propulsion par fusées. *Sciences et Lettres*, Liège, 1957.
2. Principles of guided missile design : Aerodynamics, Propulsion, Structures. D. van Nostrand, 1956. Chap. 8. Fundamentals of Rocket Engines, par M. J. Zucrow.
3. F. I. Ordway. — III, Project Vanguard. *Astronautica Acta*, III-1, 1957, p. 67.
4. History of German guided missiles development. AGARDograph 20, Verlag E. Appelhans and Co, Brunswick, 1957. The development of the V-2 rocket engine, par Martin Schilling, p. 281.
5. Référence (1), Chap. XII, Balistique externe. Trajectoires optimales.
6. B. Fraeys de Veubeke. — Méthodes variationnelles et performances optimales en aéronautique. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, VIII-2, 1956, pp. 136-157.
7. B. Fraeys de Veubeke. — Le problème du maximum de rayon d'action dans un champ de gravitation uniforme. *Astronautica Acta*, IV-1, 1958, p. 1-14.
8. D. F. Lawden. — Optimal programming of rocket thrust direction. *Astronautica Acta*, I-1, 1954, p. 41.
9. Martin Bloom. — Thermal conditions associated with aircraft in flight. Proceedings of the third AGARD general assembly. London, 1953, p. 67.
10. D. J. Masson et C. G. Gazley Sr. — Surface protection and cooling systems for high speed flight. *Aeronautical engineering review*, Nov. 1956, p. 46.

Appendice I

Trajectoires balistiques de portée maximum

Si g est l'accélération de la pesanteur à la surface d'une planète de rayon r_0 , le champ de gravitation radial à une distance r du centre a pour valeur gr_0^2/r^2 et l'énergie potentielle de l'unité de masse dans ce champ peut être définie par

$$-\int_r^\infty g \frac{r_0^2}{r^2} dr = -g \frac{r_0^2}{r}$$

Le mouvement d'un point matériel abandonné dans un tel champ de gravitation est caractérisé par deux constantes :

son énergie spécifique totale

$$E = \frac{1}{2} V^2 - g \frac{r_0^2}{r} \quad (1)$$

sa vitesse aréolaire

$$A = r^2 d\theta/dt \quad (2)$$

où θ désigne l'angle que fait le rayon vecteur avec une direction fixe. L'équation d'une trajectoire est, sous forme polaire

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (3)$$

les caractéristiques p et e étant liées aux constantes du mouvement par les relations

$$A^2 = pgr_0^2 \quad (4) \quad (gr_0^2)^2(e^2 - 1) = 2EA^2 \quad (5)$$

D'où également par élimination de A

$$p = \frac{gr_0^2}{2E} (e^2 - 1) \quad (6)$$

Dans le cas particulier des trajectoires circulaires ($e = 0$), l'attraction du champ équilibre exactement la force centrifuge

$$g \frac{r_0^2}{r^2} = \frac{V^2}{r}$$

et on en déduit la vitesse orbitale

$$V = \sqrt{g \frac{r_0^2}{r}}$$

Pour une trajectoire elliptique ($e < 1$ et donc $E < 0$), la distance r peut devenir égale à r_0 pour $\theta = \pm \theta_0$, où l'angle θ_0 entre le rayon vecteur et le grand axe est la plus petite définition positive de

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r_0} \right) \quad (7)$$

Le minimum du second membre correspond à une portée maximum $2r_0$ suivant l'arc de grand cercle. Cependant, la vitesse initiale V_i étant connue, les variables p et e sont liées.

En effet, l'énergie spécifique totale est connue par les données au départ :

$$E = \frac{1}{2} V_i^2 - gr_0$$

et par (6) on a dès lors

$$\frac{p}{r_0} = \frac{e^2 - 1}{\gamma^2 - 2} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{V_i}{\sqrt{gr_0}}$$

représente le rapport entre la vitesse initiale et la vitesse orbitale correspondant au rayon r_0 . Eliminant p/r_0 , (7) devient

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{\gamma^2 - 2} \left[\frac{\gamma^2 - 1}{e} - e \right]$$

et le minimum obtenu par annulation de la dérivée, correspond à

$$e^2 = 1 - \gamma^2 \quad (8)$$

On en tire

$$p = r_0 \frac{\gamma^2}{2 - \gamma^2} \quad (9)$$

et

$$\cos \theta_0 = 2 \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{2 - \gamma^2} \quad (10)$$

qui permet le calcul de la portée maximum.

L'altitude maximum est atteinte quand $\theta = 0$ et vaut

$$\frac{p}{1 - e} - r_0 = r_0 \frac{\sqrt{1 - \gamma^2} (1 - \sqrt{1 - \gamma^2})}{2 - \gamma^2} \quad (11)$$

La distance entre foyers

$$\frac{p}{1 - e} - \frac{p}{1 + e} = \frac{2ep}{1 - e^2} = r_0 \cos \theta_0 \quad (12)$$

L'angle de tir α au-dessus de l'horizontale, ou angle de site, peut s'obtenir à partir de la vitesse aréolaire $A = V_i r_0 \cos \alpha$.

Calculant A par (4), il vient

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2 - \gamma^2}}$$

dont on tire encore

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{2 - \gamma^2} = \cos \theta_0$$

d'où simplement

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \theta_0 \quad (13)$$

Appendice II

Trajectoires de transfert optimum

Les vitesses sur trajectoires seront définies par les variables réduites

$$\gamma = V/\sqrt{gr_0}$$

L'énergie spécifique et la vitesse aréolaire caractérisant l'orbite du satellite seront de même données par les grandeurs réduites

$$h = \frac{E}{gr_0} = \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{\rho}$$

$$a = A/r_0 \sqrt{gr_0}$$

avec

$$\rho = r/r_0.$$

L'impulsion au départ communique une vitesse réduite γ_2 faisant un angle θ_2 avec l'horizontale. A l'arrivée au point de contact sur l'orbite (rayon réduit ρ_3), l'angle de la vitesse réduite γ_3 avec l'horizontale locale est noté par θ_3 . Posant

$$\varepsilon_2 = \cos \theta_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = \cos \theta_3$$

on aura par conservation de vitesse aréolaire

$$\gamma_2 \varepsilon_2 = \gamma_3 \rho_3 \varepsilon_3 \quad (1)$$

et par conservation de l'énergie totale

$$\gamma_2^2 - 2 = \gamma_3^2 - \frac{2}{\rho_3} \quad (2)$$

La deuxième impulsion dans la direction de la vitesse en 3 doit donner la vitesse aréolaire et l'énergie de l'orbite avec une vitesse notée γ_4 :

$$\gamma_4 \rho_3 \varepsilon_3 = a \quad (3)$$

$$\gamma_4^2 - \frac{2}{\rho_3} = 2h \quad (4)$$

Les grandeurs a et h étant connues, les six paramètres ($\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$) et ($\rho_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) sont liés par les quatre relations précédentes. Il n'y a que deux paramètres indépendants, par exemple la position du point de contact sur l'orbite (ρ_3) et l'angle de lancement (ε_2)

Si la vitesse avant la première impulsion est nulle ($\gamma_1 = 0$), on aura entre la masse initiale M_1 , la masse M_2 après la première impulsion et la vitesse γ_2 communiquée la relation

$$\gamma_2 = \frac{c}{\sqrt{gr_0}} \ln \frac{M_1}{M_2}$$

fournie par la loi de la vitesse idéale d'une fusée.

De même pour la seconde impulsion

$$\gamma_4 - \gamma_3 = \frac{c}{\sqrt{gr_0}} \ln \frac{M_3}{M_4}$$

Comme $M_2 = M_3$, il vient en additionnant ces relations

$$\gamma_2 + \gamma_4 - \gamma_3 = \frac{c}{\sqrt{gr_0}} \ln \frac{M_1}{M_4}$$

Par conséquent, pour rendre M_1/M_4 minimum, il suffit de rendre minimum $\gamma_2 + \gamma_4 - \gamma_3$.

Éliminons ρ_3 entre (2) et (4)

$$\gamma_2^2 + \gamma_4^2 = \gamma_3^2 + 2 + 2h \quad (5)$$

Éliminons ensuite $\rho_3 \varepsilon_3$ entre (1) et (3)

$$\gamma_2 \gamma_4 = a \gamma_3 / \varepsilon_2 \quad (6)$$

D'où en combinant ces deux dernières relations

$$(\gamma_2 + \gamma_4)^2 = \gamma_3^2 + 2 + 2h + 2a \gamma_3 / \varepsilon_2$$

et

$$\gamma_2 + \gamma_4 - \gamma_3 = \sqrt{\left(\gamma_3 + \frac{a}{\varepsilon_2}\right)^2 - \mu^2} - \gamma_3 \quad (7)$$

où

$$\mu^2 = \frac{a^2}{\varepsilon_2^2} - 2 - 2h$$

Il faut se rendre compte que μ^2 est une quantité positive. A cet effet, introduisons les rayons réduits de l'orbite à l'apogée et au périégée

$$\alpha = \frac{r_a}{r_o} > \beta = \frac{r_p}{r_o} > 1$$

A l'apogée, comme au périégée, la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur et par conséquent,

$$a = \alpha \gamma_a = \beta \gamma_p$$

tandis que

$$2h = \gamma_a^2 - \frac{2}{\alpha} = \gamma_p^2 - \frac{2}{\beta}$$

En éliminant les vitesses γ_a et γ_p nous tirons les relations utiles

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{a^2} \quad \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{-2h}{a^2} \quad \text{et} \quad h = \frac{-1}{\alpha + \beta}$$

Nous trouvons alors

$$\mu^2 = -2 + \frac{2}{\alpha + \beta} + \frac{2\alpha\beta}{\varepsilon_2^2(\alpha + \beta)}$$

Pour $\varepsilon_2 = 1$ (lancement tangentiel)

$$\mu^2 = 2 \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{\alpha + \beta} > 0$$

et à fortiori pour $\varepsilon_2 < 1$.

L'expression (7) ne dépend plus que des deux paramètres indépendants γ_3 et ε_2 . La dérivée par rapport à γ_3 est toujours positive :

$$\frac{\gamma_3 + a/\varepsilon_2}{\sqrt{(\gamma_3 + a/\varepsilon_2)^2 - \mu^2}} - 1 > 0$$

et par conséquent, pour un angle de lancement donné, le minimum a toujours lieu pour la valeur minimum de γ_3 . Quant au minimum absolu, il est en outre, comme évident sur (7), donné pour $\varepsilon_2 = 1$, c'est-à-dire un lancement tangentiel.

Pour rechercher le minimum de γ_3 , éliminons γ_2 entre (5) et (6)

$$\gamma_3^2 = \varepsilon_2^2 \gamma_4^2 \frac{2 - \frac{2}{\alpha + \beta} - \gamma_4^2}{\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \varepsilon_2^2 \gamma_4^2}$$

Même pour $\varepsilon_2 = 1$, la racine du dénominateur

$$\gamma_4^2 = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

est plus grande que la racine du numérateur

$$\gamma_4^2 = 2 - \frac{2}{\alpha + \beta}$$

et par conséquent, la graphique de γ_3^2 en fonction de γ_4^2 a l'allure figurée (fig. 17).

Les valeurs extrêmes prises par γ_4 et qui ont lieu respectivement à l'apogée et au périégée

$$(\gamma_4^2)_{\min} = \gamma_a^2 = 2h + \frac{2}{\alpha} = \frac{2\beta}{\alpha(\alpha + \beta)}$$

$$(\gamma_4^2)_{\max} = \gamma_p^2 = 2h + \frac{2}{\beta} = \frac{2\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}$$

sont comprises entre 0 et la racine du numérateur et par conséquent γ_3 atteint sa valeur minimum pour l'une ou l'autre de ces valeurs extrêmes

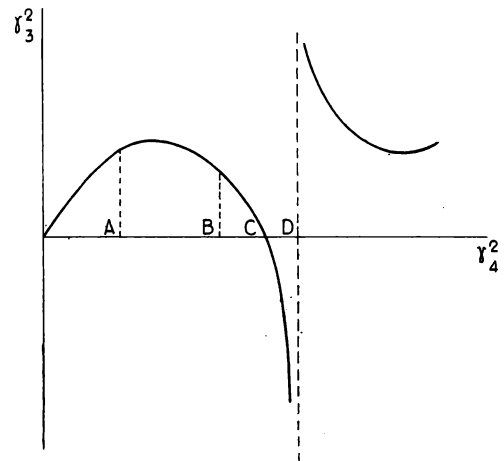


Fig. 17.

de γ_4 . Cela signifie que l'ellipse de transfert optimale se raccorde toujours soit à l'apogée, soit au périégée de l'orbite.

Les valeurs correspondantes de γ_3 sont alors respectivement

$$\gamma_3^2 = \frac{2\varepsilon_2^2(\alpha - 1)}{\alpha(\alpha^2 - \varepsilon_2^2)} \quad \gamma_3^2 = \frac{2\varepsilon_2^2(\beta - 1)}{\beta(\beta^2 - \varepsilon_2^2)}$$

Pour $\varepsilon_2 = 1$, c'est la première expression qui donne le minimum (absolu) de γ_3 . Pour un angle tel que

$$\cos^2\theta_2 = \varepsilon_2^2 = \alpha\beta - \alpha^2(\beta - 1) - \beta^2(\alpha - 1)$$

les deux expressions sont égales. Si cet angle est réel, c'est la deuxième expression qui, pour un angle de lancement supérieur, fournit le minimum de γ_3 .

Les valeurs optimales des rapports de masse sont finalement données par les expressions suivantes :

Si le lancement optimum est vers l'apogée

$$\frac{c}{\sqrt{gr_0}} \ln \frac{M_1}{M_4} = \sqrt{\frac{2\beta}{(\alpha + \beta)}} + (\alpha - \varepsilon_2) \sqrt{\frac{2(\alpha - 1)}{\alpha(\alpha^2 - \varepsilon_2^2)}}$$

Si le lancement optimum est vers le périgée, il suffit d'échanger α et β dans cette expression.

Appendice III

Étage optimum des fusées gigognes

Désignons en général par $\rho_r = (M_1/M_2)_r$ le rapport de masse de l'étage r et par μ_r, σ_r et u_r respectivement les masses unitaires du moteur, de la structure et de la charge utile (masses par unité de masse de l'étage au moment de sa mise à feu). On a donc

$$\frac{1}{\rho_r} = \mu_r + \sigma_r + u_r \quad (1)$$

et, en admettant la validité de la loi du rapport des masses, le gain de vitesse fourni par l'étage :

$$\Delta_r V = c_r \ln \rho_r = -c_r \ln \frac{1}{\rho_r} \quad (2)$$

Pour chaque étage, sauf le dernier qui contient la véritable charge utile, la charge utile est définie comme la masse totale de l'étage suivant au moment de sa mise à feu :

$$(M_u)_r = (M_1)_{r+1}$$

d'où

$$u_r = \left(\frac{M_u}{M_1}\right)_r = \frac{(M_1)_{r+1}}{(M_1)_r}$$

Si p est l'indice du dernier étage et M_u la charge utile réelle

$$u_p = \frac{M_u}{(M_1)_p}$$

En effectuant le produit des u_r on trouve

$$u_1 u_2 \dots u_p = \frac{(M_1)_2 (M_1)_3 \dots (M_1)_p}{(M_1)_1 (M_1)_2 \dots (M_1)_p} = \frac{M_u}{(M_1)_1} = u \quad (3)$$

la masse utile unitaire de la fusée complète. Celle-ci est à rendre maximum pour un gain de vitesse total déterminé :

$$\Delta V = \sum_1^p \Delta_r V = - \sum_1^p c_r \ln \frac{1}{\rho_r} - \sum_1^p c_r \ln (\mu_r + \sigma_r + u_r) \quad (4)$$

Pour simplifier le calcul, nous cherchons, ce qui est équivalent, le maximum du logarithme de u et nous introduisons un multiplicateur de

Lagrange $\frac{1}{v}$ pour libérer les variables u_r de la liaison (4). Le problème est alors transformé dans la recherche de l'extremum de l'expression

$$\sum_1^p \ln u_r - \frac{1}{v} \left[\sum_1^p c_r \ln (\mu_r + \sigma_r + u_r) + \Delta V \right]$$

pour des variations indépendantes des u_r . En annulant les dérivées partielles par rapport aux u_r on trouve les conditions

$$\frac{1}{u_r} = \frac{c_r}{v (\mu_r + \sigma_r + u_r)} \quad r = 1, 2 \dots p$$

dont on tire

$$u_r = \frac{v}{c_r - v} (\mu_r + \sigma_r) \quad (5)$$

et en substituant dans (1)

$$\rho_r = \frac{c_r - v}{c_r (\mu_r + \sigma_r)} \quad (6)$$

formules qui permettent de calculer les caractéristiques des étages quand on connaît la valeur du multiplicateur de Lagrange. Cette dernière s'obtient en substituant les résultats dans (4)

$$\sum_1^p c_r \ln \left(1 - \frac{v}{c_r}\right) = \Delta V + \sum_1^p c_r \ln (\mu_r + \sigma_r) \quad (7)$$

équation qui doit en général être résolue par interpolations.

Cas particulier où les vitesses effectives c_r sont les mêmes

Posant $c_r = c$ une valeur commune et désignant par $(\mu + \sigma)$ la moyenne géométrique des valeurs correspondantes pour les étages :

$$(\mu + \sigma)^p = \prod_1^p (\mu_r + \sigma_r)$$

l'équation (7) devient

$$1 - \frac{v}{c} = (\mu + \sigma) \exp \left(\frac{\Delta V}{pc}\right)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \rho_r &= \frac{\mu + \sigma}{\mu_r + \sigma_r} \exp \left(\frac{\Delta V}{pc}\right) \\ u_r &= \frac{\mu_r + \sigma_r}{\mu + \sigma} \left[\exp \frac{-\Delta V}{pc} - (\mu + \sigma) \right] \\ \Delta_r V &= \frac{\Delta V}{p} + c \ln \frac{\mu + \sigma}{\mu_r + \sigma_r} \\ u &= \left[\exp \frac{-\Delta V}{pc} - \mu - \sigma \right]^p \end{aligned}$$

L'illustration graphique de cette dernière formule montre que l'étagement n'est intéressant que pour un gain $\Delta V/c$ suffisamment élevé.

Quand de plus $\mu_r + \sigma_r = \mu + \sigma$ on peut voir que le gain de vitesse se partage également entre les étages et que les rapports de masse ainsi que les charges utiles unitaires deviennent toutes égales.

La fusée parallèle continue

Si à chaque instant la masse du moteur est proportionnelle à la masse totale, ainsi que la masse structure :

$$M_m = \mu M \quad \text{et} \quad M_s = \sigma M$$

on peut écrire pour la masse totale, M_e étant la masse des ergols :

$$M = \mu M + \sigma M + M_u + M_c$$

ou encore

$$M = \frac{M_u + M_e}{1 - \mu - \sigma}$$

Comme $m = -dM_c/dt$, l'équation du mouvement sera

$$M \frac{dV}{dt} = mc = -c \frac{dM_c}{dt} = -c(1 - \mu - \sigma) \frac{dM}{dt}$$

d'où en intégrant depuis la masse initiale M_1 , jusqu'à la masse finale

$$M_2 = \frac{M_u}{1 - \mu - \sigma} \quad (M_c = 0)$$

$$\Delta V = -c(1 - \mu - \sigma) \ln \frac{u}{1 - \mu - \sigma}$$

Ce résultat est aussi porté en graphique aux figures 7 et 8 comme constituant une limite supérieure aux possibilités d'accroissement de la charge utile unitaire par fractionnement d'une fusée.

Appendice IV

Pertes de gravitation et optimisation de la poussée

Soit a la composante axiale de l'accélération de la pesanteur.

L'équation du mouvement suivant la tangente à la trajectoire devient, en l'absence de traînée

$$M \frac{dV}{dt} = mc - aM$$

avec $dM/dt = -m$ elle s'écrit aussi

$$dV = -c \frac{dM}{M} + \frac{a}{m} dM$$

et son intégrale pour c , a et m constants

$$V - V_1 = c \ln \frac{M_1}{M} - \frac{a}{m} (M_1 - M) \quad (1)$$

En fin de combustion de l'étage en question

$$\frac{V_2 - V_1}{c} = \ln \rho - \lambda (\rho - 1) \quad (2)$$

où l'on a posé

$$\rho = M_1/M_2 \quad (\text{rapport de masse})$$

$$\lambda = \frac{aM_2}{mc} \quad (\text{inverse de l'accélération brute en fin de combustion}).$$

En faisant tendre m vers l'infini, ou λ vers zéro, on retrouve la loi de l'accroissement de vitesse idéale.

1. — Optimisation de la poussée obtenue en négligeant le gain d'énergie potentielle de la masse finale

Le poids propre du moteur est supposé proportionnel à sa poussée

$$gM_m = kmc$$

La masse en fin de combustion est alors

$$M_2 = M_m + M_s + M_u = (u + \sigma) M_1 + k \frac{mc}{g}$$

en introduisant les masses unitaires u et σ pour la charge utile et la structure.

Cette relation s'écrit aussi

$$u + \sigma = \frac{1}{\rho} \left(1 - k \frac{a}{g\lambda} \right) \quad (3)$$

Portant uniquement l'attention sur le gain de vitesse de l'étage, se pose le problème de rendre $u + \sigma$ maximum pour une valeur déterminée de $(V_2 - V_1)/c$. Les paramètres ρ et λ qu'on peut faire varier sont alors liés par (2).

Une condition nécessaire pour que $u + \sigma$ soit maximum est obtenue en égalant à zéro la différentielle du second membre de (3) soit, après multiplication par $\rho^2 \lambda^2$

$$\left(-\lambda^2 + \lambda \frac{ka}{g} \right) d\rho + \frac{ka}{g} \rho d\lambda = 0 \quad (4)$$

tandis que par différenciation de (2), le premier membre étant fixé

$$\left(\frac{1}{\rho} - \lambda \right) d\rho - (\rho - 1) d\lambda = 0 \quad (5)$$

La condition de comptabilité entre (4) et (5)

livre une équation du second degré en λ , dont la racine appropriée (positive) est

$$\lambda = \frac{ka}{2g(\rho - 1)} \left[-1 + \sqrt{1 - 4 \frac{(\rho - 1)g}{ka}} \right]$$

La relation entre le gain de vitesse et le rapport de masse est maintenant, en substituant dans (2)

$$\frac{V_2 - V_1}{c} = \ln \rho - \frac{ka}{2g} \left[-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{(\rho - 1)g}{ka}} \right] \quad (6)$$

Par exemple, dans le cas d'une trajectoire verticale ($a = g$) et pour $k = 1/25$ le gain de vitesse obtenu par un rapport de masse de 10 n'est plus que

$$\Delta V = 1,72225 c$$

au lieu de 2,30258 c prévu par la loi de vitesse idéale. On trouve alors $\lambda = \frac{58,033}{900}$. L'accélération nette en fin de combustion serait $\frac{1}{\lambda} - 1 = 14,5$ (en unités g); au départ elle vaudrait $\frac{15,5}{10} - 1 = 0,55$. Le poids unitaire du moteur serait

$$\mu = k \frac{mc}{gM_1} = k \frac{a}{g} \frac{1}{\lambda \rho} = 0,062$$

et il resterait pour la charge utile et la structure

$$u + \sigma = 0,1 - 0,062 = 0,038$$

Il ne faut pas perdre de vue que si la masse terminale a reçu une vitesse moindre, elle a par contre gagné en énergie potentielle dans le champ de gravitation. Comme on pourra le vérifier à l'aide du calcul qui va suivre, ce gain d'énergie est négligeable pour un premier étage de fusée, qui démarre à vitesse nulle. L'optimisation qui vient d'être faite est donc aussi valable quand on se fixerait le gain d'énergie totale de l'étage. Il n'en va plus de même pour un étage supérieur qui possède une valeur V_1/c appréciable.

Il faut alors commencer par obtenir une expression du gain d'énergie potentielle et déterminer exactement la perte de gravitation du point de vue énergétique.

2. — Détermination

de la perte de gravitation énergétique

Pour le calcul de l'arc de trajectoire parcouru, on dispose de l'équation

$$ds = V dt = - \frac{V}{m} dM$$

Quand on y substitue l'expression de V donnée par (1) et qu'on intègre, il vient

$$s_2 - s_1 = \frac{V_1}{m} (M_1 - M_2) - \frac{a}{2m^2} (M_1 - M_2)^2 - \frac{c}{m} M_2 \ln \frac{M_1}{M_2} + \frac{c}{m} (M_1 - M_2)$$

A partir de cette relation et de (2), il vient pour le gain d'énergie totale

$$\Delta E = \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) + a (s_2 - s_1)$$

$$\Delta E = V_1 c \ln \frac{M_1}{M_2} + \frac{c^2}{2} \ln^2 \frac{M_1}{M_2} - \frac{ac}{m} M_1 \ln \frac{M_1}{M_2} + \frac{ac}{m} (M_1 - M_2) \quad (7)$$

Les deux premiers termes, qui subsistent seuls quand on fait tendre m vers l'infini, représentent le gain énergétique (purement cinétique) prévu par la loi idéale. La perte de gravitation est alors

$$G = \frac{ac}{m} \left[M_1 \ln \frac{M_1}{M_2} - M_1 + M_2 \right] \quad (8)$$

En variables réduites, l'expression (7) peut s'écrire

$$\frac{\Delta E}{c^2} = v_1 \ln \rho + \frac{1}{2} \ln^2 \rho - \lambda \rho \ln \rho + \lambda (\rho - 1) \quad (9)$$

avec la notation $v_1 = V_1/c$.

3. — Optimisation de la poussée pour un gain énergétique déterminé

En différenciant (9) avec V_1 et ΔE donnés

$$\left[\frac{1}{\rho} (v_1 + \ln \rho) - \lambda \ln \rho \right] d\rho + [-\rho \ln \rho + \rho - 1] d\lambda = 0 \quad (10)$$

La condition de compatibilité entre (10) et (4) donne de nouveau une équation du second degré en λ .

Pour une valeur donnée de ρ , le calcul de λ et de G peut alors se faire à l'aide de la formule

$$\frac{G}{c^2} = \lambda (\rho \ln \rho - \rho + 1) = \frac{ka(\rho - 1)}{2g} \left[-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{(v_1 + \ln \rho)(\rho \ln \rho - \rho + 1)g}{ka(\rho - 1)^2}} \right]$$

on en déduit le gain d'énergie total par

$$\frac{\Delta E}{c^2} = v_1 \ln \rho + \frac{1}{2} \ln^2 \rho - \frac{G}{c^2}$$

Le gain de vitesse par (2), le gain d'énergie potentielle par

$$\frac{a}{c^2} (s_2 - s_1) = \lambda \left[(\rho - 1) \left(1 - \lambda \frac{\rho - 1}{2} \right) - \ln \rho \right],$$

la somme des poids unitaires utile et structure par (3), le poids unitaire du moteur par

$$\mu = \frac{ka}{\lambda \rho g}$$

les accélérations nettes au départ et en fin de combustion par

$$\gamma_1 = \frac{1}{\lambda \rho} - 1 \quad \gamma_2 = \frac{1}{\lambda} - 1$$

Ces valeurs ont été calculées dans le cas $a = g$,

$k = 1/25$ et $v_1 = 0$ et figurent sur les graphiques 9 et 10.

Dans le cas $v_1 = 1$, les mêmes données figurent sur les graphiques 11 et 12.

Les abscisses représentent une vitesse équivalente, dont la définition énergétique précise est

$$V/c = V_1/c + \sqrt{\frac{\Delta E}{c^2} \lambda}$$

Dans le cas $v_1 = 1$, l'allure spéciale des courbes μ et γ_1 aux faibles abscisses s'explique du fait que l'énergie potentielle gagnée est une partie sensible du gain d'énergie totale.

Le fractionnement optimum des étages en tenant compte des pertes de gravitation peut se faire sur la base de ces résultats.