Espaces de suites, dimension diamétrale, propriétés (DN) et (Ω)

Loïc Demeulenaere

26 juin 2014

Les espaces de suites S^ν

- Les espaces S^ν sont définis dans le cadre de l'analyse multifractale

Les espaces de suites S^ν

- Les espaces S^ν sont définis dans le cadre de l'analyse multifractale
- Objectif : poursuivre l'étude des espaces S^ν

Les espaces de suites S^ν

- Les espaces S^ν sont définis dans le cadre de l'analyse multifractale
- Objectif : poursuivre l'étude des espaces S^ν
- Ce qu'on sait déjà à leur sujet (en analyse fonctionnelle) : espaces vectoriels topologiques métriques, complets, séparables, de Schwartz, pas nucléaires, etc.

Les espaces de suites S^ν

- Les espaces S^ν sont définis dans le cadre de l'analyse multifractale
- Objectif : poursuivre l'étude des espaces S^ν
- Ce qu'on sait déjà à leur sujet (en analyse fonctionnelle) : espaces vectoriels topologiques métriques, complets, séparables, de Schwartz, pas nucléaires, etc.
- Question : isomorphisme ? $\rightsquigarrow$ Invariants topologiques

Les espaces de suites S^ν

- Les espaces S^ν sont définis dans le cadre de l'analyse multifractale
- Objectif : poursuivre l'étude des espaces S^ν
- Ce qu'on sait déjà à leur sujet (en analyse fonctionnelle) : espaces vectoriels topologiques métriques, complets, séparables, de Schwartz, pas nucléaires, etc.
- Question : isomorphisme ? $\rightsquigarrow$ Invariants topologiques
- Dimension diamétrale
  - Invariant topologique

Les espaces de suites S^ν

- Les espaces S^ν sont définis dans le cadre de l'analyse multifractale
- Objectif : poursuivre l'étude des espaces S^ν
- Ce qu'on sait déjà à leur sujet (en analyse fonctionnelle) : espaces vectoriels topologiques métriques, complets, séparables, de Schwartz, pas nucléaires, etc.
- Question : isomorphisme ? $\rightsquigarrow$ Invariants topologiques
- Dimension diamétrale
  - Invariant topologique
  - "Curseur" entre espaces de Schwartz et espaces nucléaires

Les espaces de suites S^ν

- Les espaces S^ν sont définis dans le cadre de l'analyse multifractale
- Objectif : poursuivre l'étude des espaces S^ν
- Ce qu'on sait déjà à leur sujet (en analyse fonctionnelle) : espaces vectoriels topologiques métriques, complets, séparables, de Schwartz, pas nucléaires, etc.
- Question : isomorphisme ? $\rightsquigarrow$ Invariants topologiques
- Dimension diamétrale
  - Invariant topologique
  - "Curseur" entre espaces de Schwartz et espaces nucléaires
  - Outil utile au niveau des espaces de suites

Diamètres de Kolmogorov

Définition

Soient E un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) et $U, V \subset E$ tels que $U \subset \mu V$ ($\mu > 0$).
On note $\mathcal{L}_n(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E avec une dimension $\leq n$.

Diamètres de Kolmogorov

Définition

Soient E un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) et $U, V \subset E$ tels que $U \subset \mu V$ ($\mu > 0$).
On note $\mathcal{L}_n(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E avec une dimension $\leq n$.
Le $n^{\text{ème}}$ *diamètre de Kolmogorov de* U *par rapport à* V est

$$\delta_n(U, V) = \inf\{\delta > 0 : \exists F \in \mathcal{L}_n(E) \textit{ tel que } U \subset \delta V + F\}.$$

Diamètres de Kolmogorov

Définition

Soient E un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) et $U, V \subset E$ tels que $U \subset \mu V$ $(\mu > 0)$.
On note $\mathcal{L}_n(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E avec une dimension $\leq n$.
Le $n^{ème}$ *diamètre de Kolmogorov de U par rapport à V* est

$$\delta_n(U, V) = \inf\{\delta > 0 : \exists F \in \mathcal{L}_n(E) \textit{ tel que } U \subset \delta V + F\}.$$

Quelques propriétés

- $0 \leq \delta_n(U, V) \leq \mu$ et $\delta_{n+1}(U, V) \leq \delta_n(U, V)$
- $\dim E < +\infty \implies \delta_n(U, V) = 0$ si $n \geq \dim E$
- Liens avec la précompacité...

Dimension diamétrale

Définition

Soient E un e.v.t. (sur $\mathbb{C}$) et $\mathcal{V}(E)$ une base de voisinages de 0 dans E.

La *dimension diamétrale* de E est

$$\Delta(E) = \Big\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall V \in \mathcal{V}(E),\ \exists U \in \mathcal{V}(E) \textit{ tel que } U \subset V \\ \textit{et } \lim_{n\to\infty} (\xi_n \delta_n(U, V)) = 0\Big\}.$$

Dimension diamétrale

Définition

Soient E un e.v.t. (sur $\mathbb{C}$) et $\mathcal{V}(E)$ une base de voisinages de 0 dans E.

La *dimension diamétrale* de E est

$$\Delta(E) = \Big\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall V \in \mathcal{V}(E),\ \exists U \in \mathcal{V}(E) \textit{ tel que } U \subset V \textit{ et } \lim_{n\to\infty} (\xi_n \delta_n(U,V)) = 0\Big\}.$$

Quelques propriétés

- invariant topologique
- $\dim E < +\infty \implies \Delta(E) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
- $c_0 \subset \Delta(E)$; si E est normé et $\dim E = \infty$, alors $\Delta(E) = c_0$.

Espaces de Schwartz et nucléaires

Théorème

Soit E un espace localement convexe. TFAE :

- E est de Schwartz
- $\ell_\infty \subset \Delta(E)$
- $c_0 \subsetneq \Delta(E)$

Espaces de Schwartz et nucléaires

Théorème

Soit E un espace localement convexe. TFAE :

- E est de Schwartz
- $\ell_\infty \subset \Delta(E)$
- $c_0 \subsetneq \Delta(E)$

Théorème

Soit E un espace localement convexe. TFAE :

- E nucléaire
- $\forall p > 0$, $((n+1)^p)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta(E)$
- $\exists p > 0$, $((n+1)^p)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta(E)$

Espaces de suites de Köthe

Définition

On dit que $A \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un *ensemble de Köthe* si

- $\forall \alpha \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha \in A$ tel que $\alpha_n > 0$
- $\forall \alpha, \beta \in A$, $\exists \gamma \in A$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\{\alpha_n, \beta_n\} \leq \gamma_n$

Espaces de suites de Köthe

Définition

On dit que $A \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un *ensemble de Köthe* si

- $\forall \alpha \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha \in A$ tel que $\alpha_n > 0$
- $\forall \alpha, \beta \in A$, $\exists \gamma \in A$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\{\alpha_n, \beta_n\} \leq \gamma_n$

Définition

On pose $\lambda_p(A) = \{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \alpha\xi \in \ell_p \ \forall \alpha \in A\}$ ($p \geq 1$).
On munit cet ensemble de la topologie définie par les semi-normes $p_\alpha(\xi) = \|\alpha\xi\|_{\ell_p}$.

Espaces de suites de Köthe

Définition

On dit que $A \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un *ensemble de Köthe* si

- $\forall \alpha \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha \in A$ tel que $\alpha_n > 0$;
- $\forall \alpha, \beta \in A$, $\exists \gamma \in A$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\{\alpha_n, \beta_n\} \leq \gamma_n$.

Définition

On pose $\lambda^{\ell}(A) = \{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \alpha\xi \in \ell \ \forall \alpha \in A\}$.
On munit cet ensemble de la topologie définie par les semi-normes $p_\alpha(\xi) = \|\alpha\xi\|_{\ell}$ (généralisation avec ℓ espace *admissible*).

Dimension diamétrale et espaces de Köthe

Formule dans le cas des espaces réguliers de Köthe...

Définition

$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ est régulier si $0 < a_k(n) \leq a_{k+1}(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $(a_k(n)/a_{k+1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissant.

Dimension diamétrale et espaces de Köthe

Formule dans le cas des espaces réguliers de Köthe...

Définition

$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ est régulier si $0 < a_k(n) \leq a_{k+1}(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $(a_k(n)/a_{k+1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissant.

Alors...

Théorème

$$\Delta(\lambda^{\ell}(A)) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} \;\; t.q. \;\; \left(\frac{a_k(n)}{a_{k+m}(n)}\xi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\right\}$$

Dimension diamétrale et espaces de Köthe

Formule dans le cas des espaces réguliers de Köthe...

Définition

$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ est régulier si $0 < a_k(n) \leq a_{k+1}(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $(a_k(n)/a_{k+1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissant.

Alors...

Théorème

$$\Delta(\lambda^\ell(A)) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} \ \ t.q. \ \ \left(\frac{a_k(n)}{a_{k+m}(n)}\xi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\right\}$$

Remarque

Il existe une formule pour les espaces de Köthe généraux, mais elle est plus compliquée...

Les espaces de séries de puissances et la classe de Dragilev

Il existe deux classes d'espaces de Köthe sur lesquelles la dimension diamétrale est complète :

- Les espaces de séries de puissances
- La classe de Dragilev (plus générale)

Les propriétés (DN) et (Ω)

Il s'agit de 2 invariants définis au niveau des espaces de Fréchet.

Les propriétés (DN) et (Ω)

Il s'agit de 2 invariants définis au niveau des espaces de Fréchet.
On peut les caractériser au niveau des espaces de Köthe (associés à l'espace admissible $\ell = \ell_p$, $\ell = \ell_\infty$ ou $\ell = c_0$).

- Si S^ν est localement p-convexe, alors

$$\Delta(S^\nu) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n (n+1)^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \ \forall s > 0\right\}.$$

Donc c'est un espace de Schwartz non nucléaire !

- Si S^ν est localement p-convexe, alors

$$\Delta(S^\nu) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n (n+1)^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \ \forall s > 0\right\}.$$

  Donc c'est un espace de Schwartz non nucléaire !
- Dans certains cas particuliers, S^ν est un espace de suites de Köthe.

- Si S^ν est localement p-convexe, alors

$$\Delta(S^\nu) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n(n+1)^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \ \forall s > 0\right\}.$$

  Donc c'est un espace de Schwartz non nucléaire !
- Dans certains cas particuliers, S^ν est un espace de suites de Köthe.
- Dans ces cas, S^ν vérifie (Ω) mais pas (DN).

- Si S^ν est localement p-convexe, alors

$$\Delta(S^\nu) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n (n+1)^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \ \forall s > 0\right\}.$$

  Donc c'est un espace de Schwartz non nucléaire !
- Dans certains cas particuliers, S^ν est un espace de suites de Köthe.
- Dans ces cas, S^ν vérifie (Ω) mais pas (DN).
- Si ν est concave, alors S^ν est une intersection d'espaces de Köthe.

- Si S^ν est localement p-convexe, alors

$$\Delta(S^\nu) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n (n+1)^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \ \forall s > 0\right\}.$$

  Donc c'est un espace de Schwartz non nucléaire !
- Dans certains cas particuliers, S^ν est un espace de suites de Köthe.
- Dans ces cas, S^ν vérifie (Ω) mais pas (DN).
- Si ν est concave, alors S^ν est une intersection d'espaces de Köthe.