Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Espaces de suites, dimension diamétrale, propriétés (DN) et (Ω)

Mémoire de fin d'études

Loïc Demeulenaere

Promoteur : Prof. Françoise Bastin

Année académique 2013 – 2014

Introduction

Un des objectifs principaux de ce mémoire de fin d'études est de rassembler différents outils en vue de poursuivre l'étude des espaces S^ν. Ces espaces de suites ont été introduits dans le cadre de l'analyse multifractale, afin de synthétiser l'information contenue dans la distribution des coefficients d'ondelettes d'un signal et d'obtenir davantage de propriétés concernant leur régularité hölderienne ([3, 15]).

Ces espaces sont munis d'une topologie qui fait d'eux des espaces vectoriels topologiques à la fois métriques, complets et séparables. Qui plus est, il est apparu que ces espaces étaient dans certains cas localement p-convexes et localement pseudoconvexes dans d'autres. En outre, ce sont des espaces de Schwartz non nucléaires (pour l'ensemble de ces résultats, voir [1, 2, 3]).

Une nouvelle étape dans l'étude des espaces S^ν consisterait à étudier d'éventuels isomorphismes entre ceux-ci. Bien entendu, si deux de ces espaces ne possèdent pas la même p-convexité locale, alors ils ne sont pas isomorphes. Néanmoins, on ignore toujours ce qu'il en est au niveau des espaces S^ν ayant la même p-convexité locale.

Dans le contexte de l'étude d'isomorphismes éventuels entre espaces S^ν, la notion d'invariants linéaires topologiques peut s'avérer utile. À ce titre, rappelons deux définitions essentielles ([33]).

Soit $\mathcal{E}$ une classe d'espaces vectoriels topologiques et soit E un ensemble quelconque. Une application

$$\mathcal{T} : \mathcal{E} \to E$$

est un *invariant linéaire topologique* (ou plus simplement un *invariant topologique*, ou même un *invariant*) si, pour tous $X, Y \in \mathcal{E}$, l'isomorphie de X et Y (au sens des espaces vectoriels topologiques) implique l'égalité $\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}(Y)$.
Un tel invariant est, en outre, qualifié de *complet* si, pour tous $X, Y \in \mathcal{E}$, l'égalité

$$\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}(Y)$$

implique l'isomorphie de X et de Y.

L'emploi de ces invariants est justifié par leur capacité à prouver la non-isomorphie de certains espaces vectoriels topologiques : si deux espaces vectoriels topologiques n'ont pas la même image via l'un de ces invariants, alors ils ne sont pas isomorphes.

C'est dans cette optique que les auteurs de [2] se sont tournés vers le concept de *dimension diamétrale*. Celui-ci tire notamment son origine de deux articles, l'un rédigé par Bessaga, Pelczinsky et Rolewicz ([4]), l'autre par Mityagin ([21]). À la base, il a été introduit parce qu'il constitue un invariant topologique sur la classe des espaces vectoriels topologiques ([33]). Ensuite, il s'est avéré que la dimension diamétrale permet également de caractériser les espaces nucléaires et les espaces de Schwartz ([11, 16, 22]). Enfin, il a été découvert que la dimension diamétrale est un outil précieux pour étudier certains espaces fonctionnels, à savoir les espaces échelonnés de Köthe ([16, 27, 32, 33]) et même une généralisation de ces espaces, simplement appelés "espaces de suites de Köthe" ([27]).

Comme les espaces S^ν sont des espaces de Schwartz non nucléaires et comme la dimension diamétrale permet de caractériser les espaces de Schwartz et les espaces nucléaires, il semblait naturel de déterminer la dimension diamétrale des espaces S^ν. C'est ainsi qu'Aubry et Bastin ont prouvé que tous ces espaces possèdent la même dimension diamétrale lorsqu'ils sont localement

p-convexes ([2]). Une étude des propriétés essentielles de la dimension diamétrale (notamment le caractère complet de celle-ci sur certaines classes) s'avére donc utile afin de les appliquer dans le cadre des espaces S^ν. C'est pourquoi cette étude constitue une partie importante de ce mémoire. De plus, ladite étude est également encouragée par le fait que la notion de dimension diamétrale bénéficie d'un regain d'intérêt auprès des chercheurs en analyse fonctionnelle ([2, 13, 27, 29]).

Dans ce mémoire, on s'intéresse également à d'autres invariants topologiques, à savoir les propriétés (DN) et (Ω). Celles-ci ont été à l'origine introduites par D. Vogt ([30]) dans l'objectif d'étudier des espaces de Fréchet nucléaires et certains liens avec les sous-espaces ou les quotients de l'espace s des suites à décroissance rapide. Il est apparu que ces invariants étaient également utiles dans le cadre des espaces de Fréchet non nucléaires, permettant de les caractériser au moyen de sous-espaces ou de quotients de produits tensoriels faisant intervenir l'espace s ([31]). Notre objectif est d'étudier ces deux invariants et d'entamer une approche permettant de les appliquer au niveau des espaces S^ν.

Enfin, une importante partie de ce travail est consacrée à l'étude des espaces de suites de Köthe définis dans [27]. En effet, ceux-ci constituent des exemples très concrets dans les chapitres consacrés à la dimension diamétrale et aux propriétés (DN) et (Ω). Ils s'avèrent être également des notions utiles dans le cadre des espaces S^ν. De fait, comme nous le verrons, les espaces S^ν peuvent être vus comme des intersections dénombrables d'espaces de suites de Köthe lorsque ν est une fonction concave.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres.
Dans le premier, on introduit la notion d'espaces de suites de Köthe comme le fait Terzioglu dans [27] et on démontre leurs propriétés de base. On en profite par la même occasion pour citer quelques propriétés classiques déjà connues des espaces échelonnés de Köthe et qui sont développées dans les articles [5, 6].
Dans le deuxième chapitre, on étudie la notion de dimension diamétrale. On commence par définir le concept général de diamètres de Kolmogorov et on passe en revue leurs propriétés majeures. Ensuite, on se sert de ces diamètres pour définir la dimension diamétrale d'un espace vectoriel topologique quelconque. Après quelques propriétés et exemples de base, on applique cette théorie dans le cadre des espaces de suites de Köthe. On présente également deux importantes classes d'espaces de suites de Köthe sur lesquelles la dimension diamétrale est un invariant linéaire topologique complet (les espaces de séries de puissances et la classe de Dragilev). De plus, on introduit et on démontre les caractérisations des espaces de Schwartz et des espaces nucléaires en termes de dimension diamétrale.
Dans le troisième chapitre, on présente et étudie les propriétés (DN) et (Ω) de Dietmar Vogt. On applique celles-ci dans le cadre des espaces échelonnés de Köthe.
Enfin, le dernier chapitre est consacré aux espaces S^ν, où nous résumons les propriétés déjà connues de ces espaces et où nous présentons un résultat concernant les invariants (DN) et (Ω).

Signalons aussi qu'une annexe est disponible après ces quatre chapitres, où l'on rappelle divers résultats d'analyse fonctionnelle utilisés au cours du mémoire.

Terminons cette introduction par installer plusieurs notations qui vont être employées tout au long de ce travail. Ainsi, nous utiliserons les notations francophones concernant les naturels : nous désignerons par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels, 0 compris, tandis que $\mathbb{N}_0$ représentera l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. Ensuite, nous noterons respectivement c_0 et l_∞ l'ensemble des suites de complexes convergeant vers 0 et l'ensemble des suites de complexes bornées, tous deux munis de la topologie définie par la norme

$$\|.\|_{l_\infty} : \xi \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|.$$

Enfin, si $p > 0$, on désignera par l_p l'ensemble

$$\left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n|^p < +\infty\right\},$$

muni de la topologie définie par la $\min\{1,p\}$-norme

$$\|.\|_{l_p} : l_p \to [0,+\infty[: \xi \mapsto \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}.$$

Faisons néanmoins remarquer au lecteur que l'ensemble des écritures employées dans ce mémoire est répertorié dans un index situé à la fin du manuscrit.

Chapitre 1

Les espaces de suites de Köthe

Nous allons passer à une courte introduction des espaces de suites de Köthe. Ceux-ci constituent un exemple fondamental dans l'étude de la dimension diamétrale et des invariants (DN) et (Ω), comme nous l'avons déjà expliqué. La définition présentée ici est due à Terzioglu ([27]).

1.1 Les espaces admissibles

Afin de simplifier les écritures, nous allons employer de nouvelles notations. D'abord, si η et ξ sont deux suites complexes, on notera $\eta\xi$ la suite $(\eta_n\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ensuite, si $k \in \mathbb{N}$, on désignera par e_k la suite $(\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\delta_{k,n}$ est le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Avant de donner la définition des espaces de suites de Köthe, nous devons commencer par introduire une notion particulière d'espaces de Banach.

Définition 1.1.1. Un espace de Banach $(l, \|.\|_l)$ de suites de nombres complexes sera dit *admissible* s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) pour tous $\xi \in l_\infty$, $\eta \in l$, on a $\xi\eta \in l$ et

$$\|\xi\eta\|_l \leq \|\xi\|_{l_\infty} \|\eta\|_l,$$

(ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite e_k est un élément de l et $\|e_k\|_l = 1$.

Exemples 1.1.1. Les espaces l_p (pour $p \geq 1$), l_∞ et c_0 sont bien sûr des espaces admissibles.

Ces espaces constituent les principaux exemples d'espaces admissibles (comme nous le verrons par la suite, ils permettent de retrouver la définition des espaces échelonnés de Köthe). Néanmoins, ils ne sont pas les seuls espaces admissibles. Nous considérons un exemple plus "exotique" dans le prochain paragraphe (cité dans [27] et tiré de [17, 19]). Cela explique en quoi les espaces de suites de Köthe définis dans [27] constituent une généralisation des espaces échelonnés de Köthe.

Définition 1.1.2. Une fonction $M : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est une *fonction d'Orlicz* si M est convexe, $M(0) = 0$ et

$$\lim_{x\to+\infty} M(x) = +\infty.$$

On obtient dès lors un premier lemme.

Lemme 1.1.1. *Si M est une fonction d'Orlicz, alors M est continu, croissant et vérifie, lorsque $x \in [0, +\infty[$,*

$$\begin{cases} M(\lambda x) \leq \lambda M(x) \ \text{ si } \lambda \in [0, 1] \\ C\ M(x) \leq M(Cx) \ \text{ si } C \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Par les propriétés des fonctions convexes, on sait que M est continu. Soit alors $x \in [0, +\infty[$ et $\lambda \in [0, 1]$. Dans ce cas, on a

$$M(\lambda x) = M(\lambda x + (1-\lambda)0) \leq \lambda M(x) + (1-\lambda)M(0) = \lambda M(x)$$

puisque M est une fonction convexe. Si, maintenant, $C \in [1, +\infty[$, alors $1/C \in [0, 1]$ et, par le point précédent,

$$C\ M(x) = C\ M\left(\frac{1}{C}(Cx)\right) \leq M(Cx).$$

Enfin, si $y \in [0, +\infty[$ est tel que $x \leq y$, alors il existe $\mu \in [0, 1]$ tel que $x = \mu y$. Dès lors, il vient

$$M(x) = M(\mu y) \leq \mu M(y) \leq M(y).$$

Par conséquent, la fonction M est croissante et le lemme est démontré. □

Définition 1.1.3. Au moyen d'une fonction d'Orlicz M, on définit *l'espace de suites d'Orlicz (associé à M)* par

$$l_M = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \exists r > 0 \ \textit{tel que} \ \sum_{n=0}^{+\infty} M(|\xi_n|/r) < +\infty\right\}.$$

On vérifie sans difficulté qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On munit alors l_M de la norme $\|.\|_{l_M}$ définie par

$$\|\xi\|_{l_M} = \inf\left\{r > 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} M(|\xi_n|/r) \leq 1\right\},$$

lorsque $\xi \in l_M$. L'espace $(l_M, \|.\|_{l_M})$ est alors un espace de Banach.

Les espaces de suites d'Orlicz sont utilisés dans le cadre de l'étude des espaces de Banach possédant une base symétrique (voir par exemple [17, 19]). Quant à nous, à partir des définitions données ci-dessus (tirées de [17, 19]), nous allons montrer que ces espaces constituent des espaces admissibles sous certaines conditions.

Lemme 1.1.2. *Soit M une fonction d'Orlicz. Si $\xi \in l_\infty$ et si $\eta \in l_M$, alors $\xi\eta \in l_M$ et on a $\|\xi\eta\|_{l_M} \leq \|\xi\|_{l_\infty}\|\eta\|_{l_M}$.*

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M(|\eta_n|/r) \leq 1.$$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M\left(\frac{|\xi_n\eta_n|}{\|\xi\|_{l_\infty} r}\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} M\left(\frac{\|\xi\|_{l_\infty}|\eta_n|}{\|\xi\|_{l_\infty} r}\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} M(|\eta_n|/r) \leq 1.$$

D'où la conclusion. □

Lemme 1.1.3. *Soit M une fonction d'Orlicz. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $e_{n_0} \in l_M$ et on a*

$$\|e_{n_0}\|_{l_M} = \inf\{r > 0 : M(1/r) \leq 1\}.$$

Démonstration. Si $r > 0$, on a bien sûr

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M\left(\left|(e_{n_0})_n\right|/r\right) = M(1/r),$$

donc $e_{n_0} \in l_M$ et $\|e_{n_0}\|_{l_M} = \inf\{r > 0 : M(1/r) \leq 1\}$. □

Lemme 1.1.4. *Pour une fonction d'Orlicz M, on a* $\inf\{r > 0 : M(1/r) \leq 1\} = 1$ *si et seulement si* $M(1) = 1$.

Démonstration. Supposons que $\inf\{r > 0 : M(1/r) \leq 1\} = 1$. Comme, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a $M(1/(1-\varepsilon)) > 1$, cela implique que $M(1) \geq 1$. De plus, M est continu : on doit donc avoir $M(1) \leq 1$. Au total, $M(1) = 1$.

Passons à la réciproque et supposons que $M(1) = 1$. Il suffit de prouver que $M(1/r_0) > 1$ lorsque $r_0 \in]0, 1[$: on conclut alors car $1 \in \{r > 0 : M(1/r) \leq 1\} \subset [1, +\infty[$.
Or, grâce aux propriétés des fonctions d'Orlicz, on a

$$1 < \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_0} M(1) \leq M(1/r_0).$$

□

En rassemblant les informations collectées dans les trois lemmes précédents, on obtient la proposition suivante.

Proposition 1.1.1. *Soit M une fonction d'Orlicz. L'espace l_M est admissible si et seulement si* $M(1) = 1$.

Remarque 1.1.1. Il est dès lors possible de définir des espaces admissibles à partir de fonctions d'Orlicz prenant la valeur 1 en 1, comme par exemple

$$M : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \frac{e^x - 1}{e - 1}.$$

Néanmoins, remarquons que nous connaissons déjà de tels espaces. En effet, si $p \geq 1$, il est facile de voir que la fonction d'Orlicz

$$M_p : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x^p$$

a pour espace de suites d'Orlicz associé l'espace $(l_p, \|.\|_{l_p})$.

Maintenant que nous avons traité ce dernier exemple, nous pouvons entamer une brève étude des espaces admissibles généraux. La proposition suivante s'obtient directement à partir de la définition de ces espaces.

Proposition 1.1.2. *Soit $(l, \|.\|_l)$ un espace admissible. Si $\xi \in l$ et $\eta \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sont tels que*

$$|\eta_n| \leq |\xi_n|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\eta \in l$ et $\|\eta\|_l \leq \|\xi\|_l$.

Proposition 1.1.3. *Soit $(l, \|.\|_l)$ un espace admissible. Alors on a les inclusions $l_1 \subset l \subset l_\infty$. De plus, $\|.\|_{l_\infty} \leq \|.\|_l$ sur l et $\|.\|_l \leq \|.\|_{l_1}$ sur l_1. En particulier, les injections $l_1 \to l$ et $l \to l_\infty$ sont continues et la topologie de l est plus forte que celle induite par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration.
1) Commençons par le point concernant le lien entre l et l_∞. Soient $\xi \in l$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. La suite $\xi_{n_0} e_{n_0} \in l$ est telle que $\|\xi_{n_0} e_{n_0}\|_l = |\xi_{n_0}|$, par définition des espaces admissibles. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a évidemment $|(\xi_{n_0} e_{n_0})_n| \leq |\xi_n|$, donc, par la proposition précédente, on a
$$|\xi_{n_0}| \leq \|\xi\|_l.$$
D'où la thèse.
2) Passons à l'inclusion de l_1 dans l. Soit $\xi \in l_1$ et considérons la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n e_n$ de l. Notons que si $p, q \in \mathbb{N}$ et si $p \leq q$, alors on a
$$\left\| \sum_{n=p}^{q} \xi_n e_n \right\|_l \leq \sum_{n=p}^{q} |\xi_n|,$$

donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n e_n$ est de Cauchy dans l. Puisque l est complet, elle converge dans l. Cette convergence se faisant également dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on en déduit que la limite en question doit être égale à ξ. Ainsi, $\xi \in l$ et on a

$$\|\xi\|_l = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n e_n \right\|_l \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n| = \|\xi\|_{l_1}.$$

□

Nous pouvons maintenant passer aux espaces de suites de Köthe.

1.2 Définition et propriétés de base des espaces de suites de Köthe

Définition 1.2.1. Une partie A de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un *ensemble de Köthe* si

(i) pour tout $\alpha \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 0$,

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha \in A$ avec $\alpha_n > 0$,

(iii) pour tous $\alpha, \beta \in A$, il existe $\gamma \in A$ tel que

$$\sup\{\alpha_n, \beta_n\} \leq \gamma_n$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.2. Étant donné un ensemble de Köthe A et un espace admissible $(l, \|.\|_l)$, on appelle *espace de suites de Köthe associé à l et à A* l'ensemble

$$\lambda^l(A) := \{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall \alpha \in A, \alpha\xi \in l\}.$$

Les espaces échelonnés de Köthe, quant à eux, sont des espaces de suites classiques apparaissant régulièrement dans la littérature ([5]). Ils peuvent en fait être vus comme des espaces de suites de Köthe comme définis ci-dessus. Ainsi, à l'avenir, si $p \geq 1$, on posera

$$\lambda_p(A) := \lambda^{l_p}(A),\ \lambda_\infty(A) := \lambda^{l_\infty}(A) \text{ et } \lambda_0(A) := \lambda^{c_0}(A)$$

et ces espaces seront appelés *espaces échelonnés (de Köthe) associés à A*, respectivement *d'ordre p, d'ordre infini et d'ordre 0*. De plus, si A n'est constitué que d'un seul élément a, on écrira plutôt

$$l_p(a) := \lambda^{l_p}(A),\ l_\infty(a) := \lambda^{l_\infty}(A) \text{ et } c_0(a) := \lambda^{c_0}(A).$$

Passons à l'étude des propriétés de base des espaces de suites de Köthe. Pour le reste de cette section, on se fixe un ensemble de Köthe A et un espace admissible $(l, \|.\|_l)$.

Proposition 1.2.1. *L'ensemble $\lambda^l(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration. C'est trivial. □

On peut alors munir $\lambda^l(A)$ d'une topologie. Si $\alpha \in A$, il est clair que l'application

$$p_\alpha^l : \lambda^l(A) \to [0, +\infty[\ : \xi \mapsto \|\alpha\xi\|_l$$

est une semi-norme sur $\lambda^l(A)$. Nous noterons $B_{p_\alpha^l}$ la semi-boule ouverte de $\lambda^l(A)$ de centre 0 et de rayon 1 associée à cette semi-norme. Soit alors l'ensemble de semi-normes

$$P_A^l = \{p_\alpha^l : \alpha \in A\}.$$

Grâce à la propriété (iii) des ensembles de Köthe, il est immédiat de noter que P_A^l est un ensemble filtrant de semi-normes sur $\lambda^l(A)$. Par conséquent, il est licite de munir $\lambda^l(A)$ de la topologie localement convexe définie par P_A^l.

Exemples 1.2.1. (i) Si A n'est constitué que de suites constantes positives, alors on a bien sûr

$$\lambda^l(A) = l.$$

Il est même facile de voir que la topologie de l coïncide avec celle définie par P_A^l.

(ii) Si $A = \left\{ \sum_{n=0}^{k} e_n : k \in \mathbb{N} \right\}$, alors

$$\lambda^l(A) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

et $\lambda^l(A)$ a la même topologie que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Passons à une étude topologique de l'espace $(\lambda^l(A), P_A^l)$. La proposition suivante est directe, vu ce qui précède.

Proposition 1.2.2. *La topologie de $\lambda^l(A)$ est plus forte que celle que lui induit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Qui plus est, on a*

$$\lambda_1(A) \subset \lambda^l(A) \subset \lambda_\infty(A)$$

et les injections $\lambda_1(A) \to \lambda^l(A)$ et $\lambda^l(A) \to \lambda_\infty(A)$ sont continues.

Proposition 1.2.3. *L'espace localement convexe $(\lambda^l(A), P_A^l)$ est séparé.*

Démonstration. C'est immédiat, puisque la topologie de $\lambda^l(A)$ est plus forte que la topologie séparée induite par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. □

Proposition 1.2.4. *L'espace localement convexe $(\lambda^l(A), P_A^l)$ est complet.*

Démonstration. Soit $(\xi_\beta)_{\beta \in B}$ une suite généralisée de Cauchy de $\lambda^l(A)$. On va montrer qu'elle converge dans $\lambda^l(A)$.
Comme la topologie de $\lambda^l(A)$ est plus forte que celle induite par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la suite généralisée $(\xi_\beta)_{\beta \in B}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et converge donc vers une suite ξ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Or, bien sûr, si $\alpha \in A$, la suite généralisée $(\alpha\xi_\beta)_{\beta \in B}$ est de Cauchy dans l et ainsi converge vers une suite $\eta_\alpha \in l$. La convergence se faisant également dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on en déduit que $\alpha\xi = \eta_\alpha$.
Par conséquent, $\xi \in \lambda^l(A)$ et la suite $(\xi_\beta)_{\beta \in B}$ converge vers ξ dans $\lambda^l(A)$, ce qui mène à la conclusion. □

Proposition 1.2.5. *Si A est en outre un ensemble dénombrable, alors l'espace localement convexe $(\lambda^l(A), P_A^l)$ est à semi-normes dénombrables. En particulier, cet espace est de Fréchet.*

Démonstration. C'est immédiat, vu les résultats qui précèdent. □

Remarque 1.2.1. Certains auteurs définissent directement les espaces de suites de Köthe à partir d'ensembles de Köthe dénombrables. Ainsi, si l'on considère un ensemble de Köthe de la forme

$$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\},$$

ces auteurs parlent plutôt d'une *matrice de Köthe*. C'est notamment le cas de Bierstedt et Bonet ([5]), de Grachev ([14]) et de Vogt ([32]). Dans cette situation, nous adopterons, à l'instar de Bierstedt et de Bonet ([5]), la notation

$$A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

pour désigner une telle matrice de Köthe.

Dès lors, afin de simplifier les écritures, on notera p_k^l la semi-norme $p_{a_k}^l$, si $k \in \mathbb{N}$. Dans les cas particuliers où $l = c_0$, $l = l_q$ $(q \geq 1)$ ou $l = l_\infty$, on notera alors respectivement ladite semi-norme p_k^0, p_k^q et p_k^∞. Lorsque le contexte est clair et que l est sous-entendu, on la notera même p_k.
Parmi des exemples classiques d'espaces échelonnés de Köthe, on peut citer l'espace s, qui jouera un rôle important au sein des espaces nucléaires.

Définition 1.2.3. Soit la matrice de Köthe

$$A_s = \left(((n+1)^k)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

L'espace $\lambda_1(A_s)$ est appelé *l'espace des suites à décroissance rapide.* Il est noté s.

Nous allons maintenant voir deux autres exemples d'espaces échelonnés de Köthe au travers de deux propositions fort intéressantes pour la suite de notre travail.

Proposition 1.2.6. *Si l'on considère la matrice de Köthe*

$$O = \left((e^{-n/k})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0},$$

alors l'espace échelonné de Köthe $\lambda_1(O)$ est isomorphe (en tant qu'espace localement convexe) à l'espace $\mathcal{O}(D(0,1))$ des fonctions holomorphes sur le disque ouvert $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Démonstration. On vérifie sans peine que O est bien une matrice de Köthe.
Si $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$, alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

pour tout $z \in D(0,1)$ et la série du membre de droite converge normalement sur tout compact de $D(0,1)$. En particulier, si $k \in \mathbb{N}_0$, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} e^{-n/k}$$

converge absolument. Par conséquent, la suite $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\lambda_1(O)$. On peut donc légitimement définir l'application

$$\Phi : \mathcal{O}(D(0,1)) \to \lambda_1(O) : f \mapsto \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que c'est un isomorphisme d'espaces localement convexes. Bien sûr, l'application Φ est injective et linéaire. Ensuite, elle surjective. De fait, si $\xi \in \lambda_1(O)$, il est facile de vérifier que la série

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n z^n$$

converge uniformément sur tout compact de $D(0,1)$ et définit donc une fonction f holomorphe sur $D(0,1)$. Par unicité du développement de Taylor, on a alors $\Phi(f) = \xi$. Dès lors, il ne nous reste plus qu'à montrer que Φ est un homéomorphisme.
Commençons par montrer que l'application $\Phi : \mathcal{O}(D(0,1)) \to \lambda_1(O)$ est continue. Rappelons que si $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$, si $n \in \mathbb{N}$ et si $r \in]0,1[$, la formule de représentation de Cauchy appliquée aux dérivées d'une fonction holomorphe donne

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} rie^{i\theta} d\theta = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} d\theta.$$

Qui plus est, dans les mêmes conditions et si $n \geq 1$, remarquons que

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{ir^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{ir^n}\int_{C(0,r)} f(z)z^{n-1} dz = 0,$$

par le théorème de Cauchy (où $C(0,r)$ désigne le cercle de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon r). Ainsi, si $k \in \mathbb{N}_0$, en prenant $r = e^{-1/(2k)}$, on trouve

$$\begin{aligned}
p_k(\Phi(f)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| e^{-n/k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} d\theta \right| r^{2n} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right| r^{n} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n} \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2\pi(1-r^2)^{1/2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right|^2 \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2\pi(1-r^2)^{1/2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| < f(re^{i\cdot}), e^{in\cdot} >_{\mathrm{L}^2([0,2\pi])} \right|^2 \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2\pi(1-r^2)^{1/2}} \| f(re^{i\cdot}) \|_{\mathrm{L}^2([0,2\pi])} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi(1-r^2))^{1/2}} \sup_{|z|\leq r} |f(z)|
\end{aligned}$$

quel que soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$, ce qui suffit. Montrons enfin que l'application

$$\Phi^{-1} : \lambda_1(O) \to \mathcal{O}(D(0,1)) : \xi \mapsto \left(z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n z^n \right)$$

est continue. Si K est un compact de $D(0,1)$, alors, pour $\xi \in \lambda_1(O)$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_K (\Phi^{-1}(\xi)) &= \sup_{z\in K} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n z^n \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n| \left(\sup_{z\in K} |z| \right)^n \\
&\leq p_k(\xi),
\end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{N}_0$ est tel que $e^{-1/k} \geq \sup_{z\in K} |z|$.
D'où la conclusion. □

La proposition suivante se démontre de la même manière.

Proposition 1.2.7. *Si l'on considère la matrice de Köthe*

$$O' = \left((e^{nk})_{n\in\mathbb{N}} \right)_{k\in\mathbb{N}},$$

alors l'espace échelonné de Köthe $\lambda_1(O')$ est isomorphe (en tant qu'espace localement convexe) à l'espace $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Terminons cette section par une caractérisation des égalités entre espaces de suites de Köthe. Pour ce faire, considérons la définition suivante.

Définition 1.2.4. Soient $A=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $B=(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux matrices de Köthe. On dit que A et B sont des *matrices équivalentes* si elles vérifient les deux conditions suivantes :

(i) pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $C>0$ et $j\in\mathbb{N}$ tels que $a_k(n)\leq Cb_j(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$;

(ii) pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $C>0$ et $j\in\mathbb{N}$ tels que $b_k(n)\leq Ca_j(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On obtient la propriété suivante.

Proposition 1.2.8. *Soient $A=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $B=(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux matrices de Köthe et soit $(l,\|.\|_l)$ un espace admissible. Alors $\lambda^l(A)=\lambda^l(B)$ algébriquement si et seulement si les matrices A et B sont équivalentes. En particulier, lorsqu'on a une telle égalité, alors $\lambda^{l'}(A)=\lambda^{l'}(B)$ algébriquement et topologiquement, quel que soit l'espace admissible l'.*

Démonstration. Avant de démontrer la proposition à proprement parler, remarquons qu'une égalité algébrique du type $\lambda^l(A)=\lambda^l(B)$ implique que ces deux espaces ont même topologie. C'est une simple conséquence du théorème du graphe fermé, puisqu'on a un espace vectoriel pouvant être muni de deux topologies de Fréchet, toutes deux plus fortes que la topologie séparée induite par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Le cas particulier de l'énoncé deviendra dès lors direct une fois que l'équivalence sera prouvée.

La condition est nécessaire. Supposons que $\lambda^l(A)=\lambda^l(B)$ algébriquement (et donc topologiquement). Cela implique que l'injection $\lambda_l(A)\to\lambda_\infty(B)$ est continue. Ainsi, si $k\in\mathbb{N}$, il existe $j\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que $\|b_k\xi\|_{l_\infty}\leq C\|a_j\xi\|_l$, quel que soit $\xi\in\lambda^l(A)$. Dès lors, on a

$$b_k(n)\leq Ca_j(n)$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$ (en prenant $\xi=e_n$).
On montre de même que, si $k'\in\mathbb{N}$, il existe $j'\in\mathbb{N}$ et $C'>0$ tels que $a_{k'}(n)\leq C'b_{j'}(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui permet de conclure.

La condition est suffisante. Supposons que $\xi\in\lambda^l(B)$. Fixons $k\in\mathbb{N}$. On sait alors qu'il existe $j\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que $a_k(n)\leq Cb_j(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Donc $|a_k(n)\xi_n|\leq C|b_j(n)\xi_n|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Dès lors, par la proposition 1.1.2, on en déduit que $(a_k(n)\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l$. On ainsi prouvé que $\lambda^l(B)\subset\lambda^l(A)$. L'autre inclusion se démontre de la même manière.

□

1.3 Les propriétés classiques des espaces échelonnés de Köthe

Comme indiqué dans l'introduction, les espaces de Köthe pourront s'avérer utiles dans l'étude des espaces S^ν. C'est pour cette raison que nous allons maintenant rassembler plusieurs définitions de propriétés classiques de l'analyse fonctionnelle et que nous allons ensuite citer les résultats déjà connus dans le cadre des espaces échelonnés de Köthe.

Commençons par la notion d'espaces tonnelés, extraite de [23].

Définition 1.3.1. Soit E un espace localement convexe. Un *tonneau* de E est une partie fermée, absolument convexe et absorbante de E. En outre, on dira que E est un *espace tonnelé* si tout tonneau de E est un voisinage de 0 dans E.

On peut par exemple montrer que tout espace de Fréchet est tonnelé. Plus généralement, tout espace ultrabornologique est tonnelé (voir la définition A.1.1 dans l'annexe).

Nous sommes alors amenés à considérer les définitions suivantes, extraites de [5, 12, 20].

Définition 1.3.2. Soit E un espace localement convexe et soit $\mathcal{V}(E)$ une base de voisinages absolument convexes de 0 dans E. Notons également $\mathcal{U}(E)$ l'ensemble des voisinages absolument convexes fermés de 0 dans E. Alors on dira que E est un espace

(i) *distingué* si son dual fort E'_b est tonnelé.

(ii) *semi-réflexif* si le dual de son dual fort (noté E'') peut être identifié algébriquement à E (via *le plongement canonique* de E dans E'', à savoir l'application $J:E\to E'':x\mapsto J(x)$, où $J(x)[x']=x'(x)$ si $x'\in E'$) ;

(iii) *réflexif* si le dual fort de son dual fort peut être identifié topologiquement à E (via le plongement canonique de E dans E'') ;

(iv) *semi-Montel* si tout ensemble borné de E est relativement compact ;

(v) *de Montel* si E est semi-Montel et tonnelé ;

(vi) satisfaisant *la condition de densité* si, pour toute application $\delta : \mathcal{U}(E) \to]0, +\infty[$ et pour tout $V \in \mathcal{U}(E)$, il existe une partie finie F de $\mathcal{U}(E)$ et un borné absolument convexe B de E tels que
$$\bigcap_{U \in F} \delta(U)U \subset B + V;$$

(vii) *quasi-normable* si, pour tout $V \in \mathcal{V}(E)$, il existe $U \in \mathcal{V}(E)$ tel que $U \subset V$ et tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe un borné B de E tel que $U \subset \delta V + B$.

Il existe deux autres types d'espaces "classiques" qui peuvent être ajoutés à la liste précédente, à savoir les espaces *de Schwartz* et les espaces *nucléaires*. Comme nous l'avons déjà expliqué, la dimension diamétrale permet de caractériser ces espaces et c'est pourquoi nous étudierons ceux-ci dans le chapitre consacré à la dimension diamétrale. Nous renvoyons donc le lecteur à ce chapitre pour prendre connaissance des définitions de ces espaces (cf. définitions 2.3.1 et 2.7.3). Reprenons néamoins le graphique présenté dans [12] et représentant les relations entre ces propriétés au niveau des espaces de Fréchet :

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Montel} \arrow[r] \arrow[ddr] & \text{Réflexif} \arrow[dr] & \\
\text{Nucléaire} \arrow[r] & \text{Schwartz} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \text{Distingué} \\
 & & \text{Quasi-normable} \arrow[r] & \text{Condition de densité} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche "$\to$" indique une implication.

Introduisons quelques notations utiles dans la suite.

Définition 1.3.3. Soit $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ (on parlera, par abus de langage, d'une *matrice*) ainsi que $p \in [1, +\infty[$. Dans ce cas, on pose
$$k_p(A) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} l_p(a_k),\ k_\infty(A) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} l_\infty(a_k) \text{ et } k_0(A) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} c_0(a_k).$$
On parle d'*espaces co-échelonnés de Köthe*, respectivement *d'ordre p, d'ordre ∞* et *d'ordre 0.*

Remarquons qu'on peut obtenir une propriété similaire à la proposition 1.2.8.

Lemme 1.3.1. *Soient $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $B = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux matrices de Köthe telles que $a_k(n) > 0$ et $b_k(n) > 0$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ et soit $(l, \|.\|_l)$ un espace admissible. Notons V_A la matrice $((1/a_k(n))_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ et V_B la matrice $((1/b_k(n))_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$. Dès lors, si $k_\infty(V_A) = k_\infty(V_B)$, on a $\lambda^l(A) = \lambda^l(B)$ algébriquement et topologiquement.*

Démonstration. Par hypothèse, on a
$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\frac{\xi_n}{a_k(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\frac{\xi_n}{b_k(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty \right\}.$$
Ainsi, si $k \in \mathbb{N}$, la suite a_k est bien sûr un élément de ces deux ensembles et il existe donc un $j \in \mathbb{N}$ tel la suite $(a_k(n)/b_j(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de l_∞. Donc il existe un $C > 0$ pour lequel $a_k(n) \le C b_j(n)$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Par symétrie, cela implique que les matrices A et B sont équivalentes et on conclut alors par la proposition 1.2.8. $\square$

Nous allons maintenant citer les résultats développés dans [5] et [6]. Fixons $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe telle que $a_k(n) > 0$ et $a_k(n) \leq a_{k+1}(n)$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. Dans cette situation, de façon similaire à l'énoncé du lemme 1.3.1, nous notons V la matrice de Köthe $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, avec $v_k(n) = 1/a_k(n)$ si $k, n \in \mathbb{N}$. Nous allons alors considérer les ensembles $k_p(V)$ ($p \in [1, +\infty[$), $k_\infty(V)$ et $k_0(V)$ définis ci-dessus, mais nous allons les munir d'une topologie. Formellement, nous les munissons de la topologie de la limite inductive, c'est-à-dire

$$k_p(V) = \operatorname*{ind}_{j\in\mathbb{N}} l_p(v_j),\ \ k_\infty(V) = \operatorname*{ind}_{j\in\mathbb{N}} l_\infty(v_j) \text{ et } k_0(V) = \operatorname*{ind}_{j\in\mathbb{N}} c_0(v_j).$$

Remarque 1.3.1. Nous donnons ces définitions topologiques juste pour information. Dans les prochains chapitres, lorsque cela s'avèrera nécessaire, nous adopterons des approches plus classiques sans utiliser les propriétés des limites inductives.

Grâce à cela, nous arrivons à un premier théorème concernant le caractère réflexif et distingué des espaces échelonnés de Köthe ([5, 6]).

Théorème 1.3.1. *(i) Fixons $p \in\,]1, +\infty[$. Dans ce cas, si $q \in\,]1, +\infty[$ est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors $(\lambda_p(A))'_b = k_q(V)$ et $(k_q(V))'_b = \lambda_p(A)$. De plus, $\lambda_p(A)$ est un espace réflexif.*

(ii) On a $(\lambda_0(A))'_b = k_1(V)$ et $((\lambda_0(A))'_b)'_b = \lambda_\infty(A)$. De plus, $\lambda_0(A)$ est distingué.

(iii) L'espace $\lambda_1(A)$ est distingué si et seulement si $(\lambda_1(A))'_b = k_\infty(A)$ topologiquement, l'égalité algébrique étant toujours vraie.

Il est possible d'aller plus loin dans l'étude des conditions permettant à l'espace $\lambda_1(A)$ d'être distingué. Pour ce faire, nous avons besoin d'une nouvelle définition.

Définition 1.3.4. La matrice V *vérifie la condition* (D) s'il existe une suite croissante $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{N}$ telle que

a) pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec, pour chaque $j \in \mathbb{N}$ tel que $j > k$, $\inf_{n\in P_m} \dfrac{v_j(n)}{v_k(n)} > 0$;

b) pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute partie P de $\mathbb{N}$ telle que $P \cap (\mathbb{N} \setminus P_m) \neq \emptyset$ quel que soit $m \in \mathbb{N}$, on peut trouver un $j \in \mathbb{N}$ pour lequel on a $j > k$ et $\inf_{n\in P} \dfrac{v_j(n)}{v_k(n)} = 0$.

On obtient alors le prochain théorème ([5]).

Théorème 1.3.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) la matrice V vérifie la condition (D) ;

(ii) l'espace $\lambda_1(A)$ est distingué ;

(iii) si $p \in \{0\} \cup [1, +\infty[$, l'espace $\lambda_p(A)$ satisfait la condition de densité ;

(iv) l'espace $\lambda_\infty(A)$ est distingué.

Continuons notre étude et passons aux espaces échelonnés de Köthe quasinormables. Commençons par une définition.

Définition 1.3.5. La matrice V est dite *régulièrement décroissante* si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \geq k$ et tel que, pour toute partie P de $\mathbb{N}$, on a l'implication

$$\inf_{n\in P} \frac{v_j(n)}{v_k(n)} > 0 \implies \inf_{n\in P} \frac{v_m(n)}{v_k(n)} > 0\ \forall m \geq j.$$

Cela donne alors le théorème suivant ([5, 6]).

Théorème 1.3.3. *Soit $p \in \{0\} \cup [1, +\infty[\, \cup \{\infty\}$. Alors l'espace $\lambda_p(A)$ est quasinormable si et seulement si la matrice V est régulièrement décroissante.*

Il reste alors à traiter le cas des espaces de Montel. Dans ce cas, nous sommes amenés à considérer la prochaine définition.

Définition 1.3.6. On dit que la matrice V (ou même la matrice A) vérifie *la condition* (M) si, pour toute partie infinie P de $\mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $j \in \mathbb{N}$ avec $j > k$ tel que

$$\inf_{n \in P} \frac{v_j(n)}{v_k(n)} = \inf_{n \in P} \frac{a_k(n)}{a_j(n)} = 0.$$

Citons une proposition intéressante vis-à-vis de la condition (M) ([6]).

Proposition 1.3.1. *La matrice A vérifie la condition (M) si et seulement si $\lambda_0(A) = \lambda_\infty(A)$.*

Nous obtenons ainsi un nouveau théorème.

Théorème 1.3.4. *Soit $p \in \{0\} \cup [1, +\infty[\cup \{\infty\}$. Alors l'espace $\lambda_p(A)$ est un espace de Montel si et seulement si la matrice A vérifie la condition (M), ou encore si et seulement si $\lambda_0(A) = \lambda_\infty(A)$.*

Enfin, il est également possible de caractériser les espaces échelonnés de Köthe qui sont de Schwartz ou nucléaires, comme annoncé précédemment. Grâce à la dimension diamétrale, il est même possible de le faire dans le cadre général des espaces de suites de Köthe définis par Terzioglu dans [27]. Nous renvoyons le lecteur au chapitre suivant (cf. les théorèmes 2.4.2 et 2.7.5). Qui plus est, il est également possible de caractériser les invariants (DN) et (Ω) dans le cadre des espaces échelonnés de Köthe (cf. les propositions 3.1.3 et 3.2.4).

Remarque 1.3.2. Une question naturelle serait de savoir s'il serait possible d'adapter les précédentes caractérisations aux espaces de suites de Köthe de Terzioglu ([27]). La réponse à cette question est toujours inconnue et nous y réfléchissons encore. Une façon de procéder consisterait à généraliser les preuves développées dans [6] au cas des espaces de suites de Köthe (si possible).

Chapitre 2

Dimension diamétrale et application aux espaces de suites de Köthe

Passons maintenant à l'étude détaillée de la notion de dimension diamétrale. Nous montrerons ainsi qu'il s'agit d'un invariant topologique et nous établirons les liens existant entre la dimension diamétrale et les notions d'espaces de Schwartz et d'espaces nucléaires. Nous en profiterons pour appliquer les résultats obtenus dans le cadre des espaces de suites de Köthe et ainsi compléter la liste des propriétés classiques des espaces échelonnés de Köthe que nous avons présentée dans le chapitre précédent.

La dimension diamétrale d'un espace vectoriel topologique est en fait un espace vectoriel constitué de suites complexes. Sa définition repose sur la notion de diamètres de Kolmogorov et c'est pourquoi nous débutons ce chapitre par une étude de ceux-ci.

2.1 Diamètres de Kolmogorov

Dans cette section, on se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ ainsi que deux parties U et V de E qui sont telles qu'il existe un $\mu > 0$ vérifiant $U \subset \mu V$.
Dans la suite, si $n \in \mathbb{N}$, nous désignerons par $\mathcal{L}_n(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension inférieure ou égale à n.

Définition 2.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle $n^{ème}$ *diamètre de Kolmogorov de U par rapport à V* le nombre

$$\delta_n(U,V) = \inf\{\delta > 0 : \exists F \in \mathcal{L}_n(E) \text{ tel que } U \subset \delta V + F\}.$$

Remarque 2.1.1. Cette définition a un sens. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le singleton $\{0\}$ est un élément de $\mathcal{L}_n(E)$ et vérifie $U \subset \mu V + \{0\}$, ce qui implique que l'ensemble

$$\{\delta > 0 : \exists F \in \mathcal{L}_n(E) \text{ tel que } U \subset \delta V + F\}$$

est non vide. De plus, il est clairement minoré par 0.

Remarque 2.1.2. Dans la définition de $\delta_n(U,V)$ (pour $n \in \mathbb{N}$), on peut remplacer l'expression $\mathcal{L}_n(E)$ par $\mathcal{L}_n(>V<_l)$, où $>V<_l$ désigne l'enveloppe linéaire de V.
En effet, supposons que $\delta > 0$ et $F \in \mathcal{L}_n(E)$ sont tels que $U \subset \delta V + F$. Si $u \in U$, alors il existe $v \in V$ et $f \in F$ tels que $u = \delta v + f$, d'où

$$f = u - \delta v \in U - \delta V \subset \mu V - \delta V \subset >V<_l .$$

Ainsi, f est un élément de $F \cap >V<_l$ et on peut donc bien supposer que F est un sous-espace vectoriel de $>V<_l$.

Nous pouvons maintenant passer aux propriétés de base des diamètres de Kolmogorov.

Lemme 2.1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

(1) $\delta_{n+1}(U,V) \leq \delta_n(U,V)$,

(2) $0 \leq \delta_n(U,V) \leq \mu$.

En particulier, la suite $(\delta_n(U,V))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers un réel positif inférieur ou égal à μ.

Démonstration. Le point (1) est clair, vu la définition, tandis que le point (2) découle directement de la remarque 2.1.1. □

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 2.1.2. *Si U_0 et V_0 sont deux parties de E vérifiant $U_0 \subset U$ et $V \subset V_0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\delta_n(U_0,V_0) \leq \delta_n(U,V).$$

En particulier, on a aussi

$$\delta_n(U_0,V) \leq \delta_n(U,V) \text{ et } \delta_n(U,V_0) \leq \delta_n(U,V).$$

Lemme 2.1.3. *Soit W une partie de E pour laquelle il existe un $\nu > 0$ tel que $V \subset \nu W$ et soient $m, n \in \mathbb{N}$. Dans ces conditions, on a*

$$\delta_{n+m}(U,W) \leq \delta_n(U,V)\delta_m(V,W).$$

Démonstration. L'expression $\delta_{n+m}(U,W)$ a bien un sens, vu que $U \subset \mu\nu W$. Fixons alors $\delta_1, \delta_2 > 0$ et $F_1 \in \mathcal{L}_n(E)$, $F_2 \in \mathcal{L}_m(E)$ tels que $U \subset \delta_1 V + F_1$ et $V \subset \delta_2 W + F_2$. Par conséquent, on a $U \subset \delta_1(\delta_2 W + F_2) + F_1$, ou encore

$$U \subset \delta_1\delta_2 W + F_1 + F_2.$$

Cela mène à la conclusion, vu que $F_1 + F_2 \in \mathcal{L}_{n+m}(E)$. □

Lemme 2.1.4. *Si $\lambda, \nu > 0$, alors*

$$\frac{\lambda}{\nu}\delta_n(U,V) = \delta_n(\lambda U, \nu V)$$

Démonstration. Nous allons procéder en deux étapes.

(i) Soient $\delta > 0$ et $F \in \mathcal{L}_n(E)$ tels que $\lambda U \subset \delta(\nu V) + F$. Par conséquent, il vient $U \subset \frac{\nu}{\lambda}\delta V + F$. On en déduit donc l'inégalité $\delta_n(U,V) \leq \frac{\nu}{\lambda}\delta$. Cela permet alors d'écrire

$$\frac{\lambda}{\nu}\delta_n(U,V) \leq \delta_n(\lambda U, \nu V).$$

(ii) Vu le point précédent, on a

$$\frac{\nu}{\lambda}\delta_n(\lambda U, \nu V) = \frac{1/\lambda}{1/\nu}\delta_n(\lambda U, \nu V) \leq \delta_n(U,V).$$

Dès lors, on obtient $\frac{\lambda}{\nu}\delta_n(U,V) \geq \delta_n(\lambda U, \nu V)$. D'où la conclusion.

□

Lemme 2.1.5. *Si U' est une partie de E pour laquelle il existe $\mu', \nu > 0$ avec $U' \subset \mu' V$ et $U \subset \nu U'$, alors*

$$\delta_n(U,V) \leq \nu\delta_n(U',V).$$

Démonstration. Cela découle directement des lemmes 2.1.2 et 2.1.4. □

Le lemme suivant, bien que trivial, s'avèrera très utile lors de l'étude de la dimension diamétrale des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{C}$ de dimension finie.

Lemme 2.1.6. *Si la dimension de E est finie, alors*

$$\delta_n(U, V) = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \dim(E)$.

Lemme 2.1.7. *Si F est un autre espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et si*

$$T : E \to F$$

est une application linéaire, alors, on a

$$\delta_n(T(U), T(V)) \leq \delta_n(U, V).$$

En particulier, si $T : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors

$$\delta_n(T(U), T(V)) = \delta_n(U, V).$$

Démonstration. L'expression $\delta_n(T(U), T(V))$ a bien sûr un sens, vu que $T(U) \subset \mu T(V)$. Soient $\delta > 0$ et $G \in \mathcal{L}_n(E)$ tels que $U \subset \delta V + G$. Il est alors clair que $T(U) \subset \delta T(V) + T(G)$, où $T(G) \in \mathcal{L}_n(F)$. Donc

$$\delta_n(T(U), T(V)) \leq \delta,$$

ce qui permet de conclure. Le cas particulier est quant à lui évident. □

Lemme 2.1.8. *Si V est en outre absolument convexe, on a*

$$\delta_n(U, V) = \delta_n(< U >_{ac}, V),$$

où $< U >_{ac}$ symbolise l'enveloppe absolument convexe de U.

Démonstration. Vu le lemme 2.1.2, il est clair que

$$\delta_n(U, V) \leq \delta_n(< U >_{ac}, V).$$

Soient $\delta > 0$ et $F \in \mathcal{L}_n(E)$ tels que $U \subset \delta V + F$. Puisque V et F sont absolument convexes, il vient

$$< U >_{ac} \subset \delta V + F.$$

D'où la conclusion. □

Nous allons maintenant considérer deux résultats liant précompacité et diamètres de Kolmogorov. Ils joueront un rôle crucial par la suite, en particulier au niveau de la caractérisation des espaces de Schwartz au moyen de la dimension diamétrale. Rappelons d'abord la définition suivante.

Définition 2.1.2. Soit V un sous-ensemble de E. Une partie K de E est *précompacte par rapport à V (dans E)* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $x_1, ..., x_J \in E$ tels que $K \subset \{x_1, ..., x_J\} + \varepsilon V$.

Commençons par une première proposition, dont la preuve est inspirée de [32].

Proposition 2.1.1. *Soient V une partie absolument convexe et absorbante de E et K une partie de E absorbée par V. Alors K est précompact par rapport à V si et seulement si on a*

$$\delta_n(K, V) \to 0 \text{ si } n \to +\infty.$$

Démonstration. Supposons d'abord que K est précompact par rapport à V et fixons un $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $x_1, ..., x_J \in K$ tels que

$$K \subset \{x_1, ..., x_J\} + \varepsilon V.$$

Notons alors par F l'enveloppe linéaire de l'ensemble $\{x_1, ..., x_J\}$. Il est dès lors immédiat de noter que F est un élément de $\mathcal{L}_n(E)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq J$. Comme $K \subset \varepsilon V + F$, on en déduit que, pour tout naturel n supérieur ou égal à J, on a

$$\delta_n(K, V) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve bien que la suite $(\delta_n(K, V))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Passons à la réciproque et supposons que K vérifie la propriété de l'énoncé. Fixons un $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a

$$\delta_n(K, V) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On en déduit qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ et un $F \in \mathcal{L}_N(E)$ vérifiant $K \subset \delta V + F$. En particulier, puisque V est équilibré, on a

$$K \subset \frac{\varepsilon}{4} V + F.$$

Si l'on désigne par p_V la semi-norme de jauge associée à V, il est alors clair que l'ensemble $F_1 := F \cap \ker p_V$ est un sous-espace vectoriel de F. Soit F_2 un supplémentaire algébrique de F_1 dans F. Dans ce cas, on a l'inclusion

$$K \subset \frac{\varepsilon}{2} V + F_2,$$

puisque $F_1 \subset \ker p_V \subset \frac{\varepsilon}{4} V$. Remarquons aussi que la semi-norme p_V est une norme sur F_2.

Ensuite, on sait qu'il existe un $\mu > 0$ tel que $K \subset \mu V$. Ainsi, si $x \in K$, il existe $v \in V$, $f \in F_2$ tels que $x = \frac{\varepsilon}{2} v + f$ et on en déduit alors que

$$f = x - \frac{\varepsilon}{2} v \in K - \frac{\varepsilon}{2} V \subset \mu V + \frac{\varepsilon}{2} V.$$

Comme V est convexe, on a aussi $f \in \left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) V$. Au total, on obtient l'inclusion

$$K \subset \frac{\varepsilon}{2} V + F_2 \cap \left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) V.$$

Si l'on désigne par G l'ensemble $F_2 \cap \left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right) V$, on en déduit que G est un borné de l'espace (F_2, p_V). Comme ce dernier est normé et de dimension finie, il est isomorphe à l'espace $(\mathbb{C}^m, |.|)$ (où m est la dimension de F_2). Par conséquent, G est un précompact de l'espace (F_2, p_V) et il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $x_1, ..., x_J \in F_2$ tels que

$$G \subset \{x_1, ..., x_J\} + \frac{\varepsilon}{2} V.$$

D'où

$$K \subset \{x_1, ..., x_J\} + \varepsilon V,$$

ce qui mène à la conclusion. □

On obtient immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *Soit E un espace localement convexe et soit K une partie de E. Alors K est un précompact de E si et seulement si K est borné et si, pour tout voisinage absolument convexe V de 0 dans E, on a*

$$\delta_n(K, V) \to 0 \text{ si } n \to +\infty.$$

Poursuivons par une proposition permettant de réécrire la définition des diamètres de Kolmogorov dans le cas où l'on dispose d'un ensemble absolument convexe absorbant. Ici, E désigne de nouveau un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ quelconque. La prochaine preuve est tirée de [16, 32].

Proposition 2.1.2. *Si V est une partie absolument convexe absorbante de E et si U est une partie de E absorbée par V, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$\delta_n(U,V) = \inf\{\delta > 0 : \exists\, m \in \mathbb{N}_0,\ x_1, ..., x_m \in E \text{ avec } m \leq n \text{ et } U \subset \delta V + < \{x_1, ..., x_m\} >_{ac}\}.$$

Démonstration. Notons $\gamma_n(U,V)$ le second membre de l'égalité de l'énoncé.

(i) Il est facile de voir que $\gamma_n(U,V) \geq \delta_n(U,V)$, car l'enveloppe absolument convexe d'un ensemble est incluse dans l'enveloppe linéaire de cet ensemble.

(ii) Cette seconde partie de la preuve repose sur des principes totalement similaires à ceux employés dans la démonstration de la proposition 2.1.1. Nous ne la détaillerons donc pas complètement. Soient $\delta > 0$ et $F \in \mathcal{L}_n(E)$ tels que $U \subset \delta V + F$. Si l'on désigne par F_2 un supplémentaire algébrique de $F_1 := F \cap \ker p_V$ dans F, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $F_1 \subset \frac{\varepsilon}{2} V$ et
$$U \subset (\delta + \varepsilon/2)V + F_2.$$
De plus, si $\mu > 0$ est tel que $U \subset \mu V$, on a
$$U \subset (\delta + \varepsilon/2)V + F_2 \cap (\delta + \varepsilon/2 + \mu)V.$$
Cette dernière inclusion est valable quel que soit le $\varepsilon > 0$ choisi. Notons G_ε l'ensemble $F_2 \cap (\delta + \varepsilon/2 + \mu)V$. Dans ce cas, G_ε est un borné de l'espace (F_2, p_V), qui est normé et de dimension finie (inférieure ou égale à n). Par conséquent, G_ε est un précompact de (F_2, p_V) : dès lors, il existe une partie finie P de F_2 telle que $G_\varepsilon \subset P + \frac{\varepsilon}{2}V$. Remarquons que P est inclus dans l'enveloppe absolument convexe de l'ensemble des vecteurs d'une base de F_2 bien choisie. Dès lors, il existe $x_{\varepsilon,1}, ..., x_{\varepsilon,m} \in F_2 \subset E$, où m est un naturel non nul inférieur ou égal à n, tels que
$$G_\varepsilon \subset < \{x_{\varepsilon,1}, ..., x_{\varepsilon,m}\} >_{ac} + \frac{\varepsilon}{2} V.$$
D'où
$$U \subset (\delta + \varepsilon)V + < \{x_{\varepsilon,1}, ..., x_{\varepsilon,m}\} >_{ac},$$
ce qui nous prouve que $\delta + \varepsilon \geq \gamma_n(U,V)$. En passant à la limite pour $\varepsilon \to 0^+$, on trouve $\delta \geq \gamma_n(U,V)$. On conclut alors bien que
$$\delta_n(U,V) \geq \gamma_n(U,V).$$

□

Nous pouvons dès lors terminer cette section en considérant le prochain corollaire, valable lorsque E est un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$.

Corollaire 2.1.1. *Soit V un ensemble absolument convexe, fermé et absorbant de E et soit U une partie de E absorbée par V. Dans cette situation, si $n \in \mathbb{N}$, on a*
$$\delta_n(U,V) = \delta_n(\overline{U},V),$$
où $\overline{U}$ désigne l'adhérence de U dans E.

Démonstration. Bien sûr, l'expression $\delta_n(\overline{U},V)$ a un sens puisque V est fermé. De plus on sait déjà que $\delta_n(U,V) \leq \delta_n(\overline{U},V)$. Il nous reste à prouver l'autre inégalité.
Si $n = 0$, l'égalité de l'énoncé est claire car, si $\delta > 0$, on a $\big(U \subset \delta V \Leftrightarrow \overline{U} \subset \delta V\big)$. On peut donc supposer $n \neq 0$.
Puisque V est absolument convexe et absorbant, on peut appliquer la proposition précédente. Soient alors $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ (avec $m \leq n$) et $x_1, ..., x_m \in E$ tels que $U \subset \delta V + < \{x_1, ..., x_m\} >_{ac}$.

Notons que l'ensemble $G :=< \{x_1, ..., x_m\} >_{ac}$ est compact. En effet, il est l'image du sous-ensemble compact $\{(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{C}^m : \sum_{j=1}^m |\lambda_j| \leq 1\}$ de $\mathbb{C}^m$ par l'application continue

$$\Phi : \mathbb{C}^m \to E : (\lambda_1, ..., \lambda_m) \mapsto \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m.$$

Ainsi, $\delta V + G$ est un fermé de E et donc

$$\overline{U} \subset \delta V + < \{x_1, ..., x_m\} >_{ac} .$$

Cela implique que $\delta_n(\overline{U}, V) \leq \delta$ et, par conséquent, que $\delta_n(\overline{U}, V) \leq \delta_n(U, V)$. □

2.2 Dimension diamétrale : introduction

Dans cette section, on se donne un espace vectoriel topologique E sur $\mathbb{C}$ et on désigne par $\mathcal{V}(E)$ une base de voisinages de 0 dans E.

Définition 2.2.1. La *dimension diamétrale* de E est l'ensemble

$$\Delta(E) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall V \in \mathcal{V}(E) \ \exists U \in \mathcal{V}(E) \text{ tel que } U \subset V \text{ et } \xi_n \delta_n(U, V) \to 0 \text{ si } n \to +\infty\right\}.$$

Remarque 2.2.1. Grâce au lemme 2.1.2, il est facile de voir que cette définition est indépendante de la base de voisinages choisie. Ainsi, la définition a bien un sens.

La proposition suivante est triviale.

Proposition 2.2.1. *(1) $\Delta(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*
(2) Si $\xi \in \Delta(E)$ et si $\eta \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est tel que

$$|\eta_n| \leq |\xi_n|,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\eta \in \Delta(E)$.

Nous allons maintenant étudier une proposition qui s'avèrera fort utile pour comparer les dimensions diamétrales de certains espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{C}$. Pour ce faire, considérons d'abord la définition suivante.

Définition 2.2.2. Si F est un autre espace vectoriel topologique, alors une application $T : E \to F$ est *presqu'ouverte* si, pour tout voisinage V de 0 dans E, $\overline{T(V)}$ est un voisinage de 0 dans F.

Évidemment, toute application ouverte est presqu'ouverte. La notion d'application presqu'ouverte est donc a priori plus faible que celle d'application ouverte. Néanmoins, ces notions sont équivalentes dans certains cas. Par exemple, Meise et Vogt prouvent que si $T : F \to G$ est une application linéaire, continue et presqu'ouverte, si F et G sont deux espaces vectoriels topologiques métriques et si F est complet, alors T est une application ouverte (cf. [20], lemme 8.2).

Une fois cette remarque faite, passons à la prochaine proposition.

Proposition 2.2.2. *Si F est un espace vectoriel topologique pour lequel il existe une application $T : E \to F$ linéaire, continue et ouverte, alors*

$$\Delta(E) \subset \Delta(F).$$

Le résultat est encore vrai dans le cas particulier où F est un espace localement convexe et où $T : E \to F$ est une application linéaire, continue et presqu'ouverte.

Démonstration. Pour commencer, supposons que $T : E \to F$ est une application linéaire et continue et que E et F sont deux espaces vectoriels topologiques quelconques.
Soit $\mathcal{V}(F)$ une base de voisinages de 0 dans F et soit $\xi \in \Delta(E)$. Fixons $V \in \mathcal{V}(F)$. Puisque T est continu, on sait qu'il existe un $V_0 \in \mathcal{V}(E)$ vérifiant $T(V_0) \subset V$. Par définition, il existe un $U_0 \in \mathcal{V}(E)$ inclus dans V_0 tel que

$$\xi_n \delta_n(U_0, V_0) \to 0 \text{ si } n \to +\infty.$$

Nous allons poursuivre notre raisonnement en distinguant les deux situations citées dans l'énoncé.

(i) Si, en outre, T est une application ouverte, alors il existe $U \in \mathcal{V}(F)$ tel que $U \subset T(U_0)$. Or, vu les lemmes 2.1.2 et 2.1.7, on a

$$\delta_n(U, V) \leq \delta_n(T(U_0), T(V_0)) \leq \delta_n(U_0, V_0),$$

d'où

$$\xi_n \delta_n(U, V) \to 0 \text{ si } n \to +\infty.$$

Ainsi, $\xi \in \Delta(F)$.

(ii) Supposons que F est un espace localement convexe et que T est une application presqu'ouverte. On peut alors même supposer que $\mathcal{V}(F)$ est constitué de voisinages absolument convexes fermés de 0 dans F. Dans ce cas, il existe un $U \in \mathcal{V}(F)$ tel que $U \subset \overline{T(U_0)}$. Comme V est absolument convexe et fermé, on obtient, grâce au corollaire 2.1.1,

$$\delta_n(U, V) \leq \delta_n(\overline{T(U_0)}, V) = \delta_n(T(U_0), V) \leq \delta_n(T(U_0), T(V_0)) \leq \delta_n(U_0, V_0),$$

ce qui implique, comme au point (i), que $\xi \in \Delta(F)$. D'où la conclusion.

□

Passons aux conséquences de cette proposition.

Corollaire 2.2.1. *Si $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{C}$, alors*

$$\Delta\left(\prod_{\alpha \in A} E_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in A} \Delta(E_\alpha).$$

Démonstration. De fait, si $\alpha_0 \in A$, il est bien connu que la projection

$$p_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in A} E_\alpha \to E_{\alpha_0} : (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_{\alpha_0}$$

est une application linéaire, continue et ouverte. □

Corollaire 2.2.2. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors*

$$\Delta(E) \subset \Delta(E/F).$$

Démonstration. On sait que la projection

$$\pi_F : E \to E/F : x \mapsto x + F$$

est une application linéaire continue. Si l'on prouve qu'elle est également ouverte, on obtiendra la conclusion. Or, en se référant à [7], on sait qu'il suffit de montrer que si O est un ouvert de E, alors l'ensemble $\pi_F^{-1}(\pi_F(O))$ est encore un ouvert de E. C'est direct, car

$$\pi_F^{-1}(\pi_F(O)) = O + F = \bigcup_{f \in F} (O + f).$$

□

Le théorème suivant, bien que corollaire direct de la proposition 2.2.2, est essentiel. Il est en effet à l'origine de l'intérêt porté à la dimension diamétrale ([33]).

Théorème 2.2.1. *La dimension diamétrale est un invariant linéaire topologique sur la classe des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{C}$.*

Notons également la propriété suivante.

Proposition 2.2.3. *On a*

$$c_0 \subset \Delta(E).$$

Démonstration. Cela découle directement du fait que si $V \in \mathcal{V}(E)$, alors la suite $(\delta_n(V, V))_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de l_∞ (lemme 2.1.1). □

2.3 Quelques exemples de calculs de dimensions diamétrales

Nous conservons les notations de la section précédente. Nous allons passer en revue des propriétés qui vont nous permettre d'obtenir directement la dimension diamétrale de plusieurs espaces localement convexes classiques.

Proposition 2.3.1. *Si E est de dimension finie, alors*

$$\Delta(E) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Démonstration. C'est immédiat. En effet, si $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $V \in \mathcal{V}(E)$, alors

$$\delta_n(V, V) = 0$$

si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geq \dim(E)$ (vu le lemme 2.1.6) et donc la suite $(\xi_n \delta_n(V, V))_{n\in\mathbb{N}}$ converge trivialement vers 0. □

Remarque 2.3.1. La proposition précédente montre que la dimension diamétrale

$$\Delta : \mathcal{E}_{vt} \to \wp(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}),$$

où $\mathcal{E}_{vt}$ désigne la classe des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{C}$, est un invariant linéaire topologique *non complet.*

Par exemple, les espaces vectoriels $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}^3$, munis de la topologie euclidienne, ne sont bien sûr pas isomorphes, mais ont tous les deux $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ pour dimension diamétrale.

La proposition suivante va également dans ce sens.

Proposition 2.3.2. *Si $(E, \|.\|)$ est un espace normé de dimension infinie, alors*

$$\Delta(E) = c_0.$$

Démonstration. Vu la proposition 2.2.3, il suffit de prouver l'inclusion

$$\Delta(E) \subset c_0.$$

Dans la suite, on note $B(r)$ la boule ouverte de E associée à la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $r > 0$. On peut donc prendre pour base de voisinages de 0 dans E l'ensemble

$$\mathcal{V}(E) = \{B(r) : r > 0\}.$$

Soit maintenant $\xi \in \Delta(E)$. Par définition, il existe un $r > 0$ tel que $(\xi_n \delta_n(B(r), B(1)))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Puisque $B(r) = rB(1)$, on a, par le lemme 2.1.4, $(\xi_n \delta_n(B(1), B(1)))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ La suite ξ doit dès lors converger vers 0 dans $\mathbb{C}$, car la suite $(\delta_n(B(1), B(1)))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être un élément de c_0. Sinon, $B(1)$ serait un voisinage précompact de 0 dans E, par le théorème 2.1.1, alors que E est de dimension infinie.

□

Grâce à ces deux propositions, nous obtenons les exemples suivants.

Exemples 2.3.1. (1) Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et si $p \geq 1$, alors les espaces

$$\mathrm{C}_0(K),\ \mathrm{L}^p(A),\ \mathrm{L}^\infty(A),\ l_p,\ l_\infty \text{ et } c_0$$

admettent tous c_0 comme dimension diamétrale.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\Delta(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

On peut encore donner un autre exemple.

Exemple 2.3.1. On a
$$\Delta(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Démonstration. Il suffit de prouver l'inclusion
$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \subset \Delta(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}).$$

On sait qu'un système fondamental de semi-normes de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est donné par l'ensemble $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$, où, pour $k \in \mathbb{N}$, q_k désigne la semi-norme $q_k : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty[: \xi \mapsto \sup\{|\xi_0|, ..., |\xi_k|\}$. En notant B_k la semi-boule ouverte de centre 0, de rayon 1 et associée à q_k (pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé), on va montrer que $\delta_n(B_k, B_k)$ est nul lorsque $n \in \mathbb{N}$ est supérieur ou égal à $k+1$, ce qui suffit.
Or, quel que soit $\delta > 0$, on a évidemment
$$B_k \subset \delta B_k + > \{e_0, ..., e_k\} <_l$$
et comme $\dim(> \{e_0, ..., e_k\} <_l) = k+1$, on en déduit que
$$\delta_n(B_k, B_k) \leq \delta$$
si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geq k+1$. D'où la thèse. □

Un autre exemple fondamental concerne les espaces de Schwartz. En effet, la dimension diamétrale, comme nous l'avons déjà annoncé, permet de caractériser ces espaces.

Définition 2.3.1. Soit E un espace localement convexe et soit $\mathcal{V}(E)$ une base de voisinages absolument convexes de 0 dans E. On dit que E est un *espace de Schwartz* si, pour tout $V \in \mathcal{V}(E)$, il existe un $U \in \mathcal{V}(E)$ tel que $U \subset V$ et tel que U est précompact par rapport à V dans E.

On vérifie sans difficulté que cette définition est indépendante de la base de voisinages absolument convexes de 0 choisie.

Remarque 2.3.2. Il est également possible d'étendre la définition des espaces de Schwartz au niveau des espaces vectoriels topologiques en considérant un base de voisinages de 0 quelconque.

Cela étant fait, nous obtenons le théorème suivant. Il permet de caractériser les espaces de Schwartz dans le cadre classique des espaces localement convexes.

Théorème 2.3.1. *Soit E un espace vectoriel topologique et soit $\mathcal{V}(E)$ une base de voisinages de 0 dans E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tout $V \in \mathcal{V}(E)$, il existe $U \in \mathcal{V}(E)$ tel que $U \subset V$ et $(\delta_n(U,V))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$;
(ii) $l_\infty \subset \Delta(E)$;
(iii) $c_0 \subsetneq \Delta(E)$.

Si, en outre, E est un espace localement convexe et si $\mathcal{V}(E)$ une base de voisinages absolument convexes de 0 dans E, alors les trois conditions précédentes sont équivalentes au fait que E est un espace de Schwartz.

Démonstration. D'abord, le point (i) implique trivialement le point (ii) et le point (iii) est un corollaire direct du point (ii). Montrons que le point (iii) implique le point (i).
Par hypothèse, il existe $\xi \in \Delta(E) \setminus c_0$. Dès lors, cela signifie en particulier qu'il existe un $C > 0$ et une sous-suite $\left(\xi_{k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ξ tels que $|\xi_{k(n)}| \geq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit alors $V \in \mathcal{V}(E)$. On sait qu'il existe un $U \in \mathcal{V}(E)$ inclus dans V pour lequel la suite $(\xi_n \delta_n(U,V))_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de c_0. Or, comme
$$\delta_{k(n)}(U,V) \leq \frac{1}{C}|\xi_{k(n)}\delta_{k(n)}(U,V)|$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela implique bien sûr que $(\delta_{k(n)}(U,V))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Dès lors, la suite $(\delta_n(U,V))_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à c_0, vu qu'elle converge dans $\mathbb{C}$.

Dans le cas où E est un espace localement convexe et où $\mathcal{V}(E)$ est une base de voisinages absolument convexes de 0 dans E, on vérifie directement que le point (i) est équivalent au fait que E est un espace de Schwartz, au vu de la proposition 2.1.1. D'où la conclusion. □

Ainsi, on vient de prouver que, parmi les espaces localement convexes, seuls ceux qui ne sont pas de Schwartz admettent c_0 comme dimension diamétrale (par la proposition 2.2.3). En particulier, on retrouve la propriété suivante, bien connue dans la théorie des espaces de Schwartz.

Corollaire 2.3.1. *Si E est un espace normé, alors E est un espace de Schwartz si et seulement s'il est de dimension finie.*

Remarquons également qu'on a démontré qu'il n'existe pas d'espace vectoriel topologique E tel que $c_0 \subsetneq \Delta(E) \subsetneq l_\infty$ ([16]).

2.4 Espaces de suites de Köthe et dimension diamétrale

Dans cette section, nous fixons un espace admissible $(l, \|.\|_l)$ et un ensemble de Köthe A. En reprenant les développements de Terzioglu dans [27], nous allons obtenir la forme exacte de la dimension diamétrale de l'espace de suites de Köthe $\lambda^l(A)$, en utilisant notamment la caractérisation des espaces de Schwartz vue précédemment. Dans la suite, nous aurons besoin d'une nouvelle notation. Si $\alpha, \beta \in A$, nous désignerons par α/β la suite dont la $n^{\text{ème}}$ composante ($n \in \mathbb{N}$) vaut α_n/β_n si $\beta_n > 0$ et 0 si $\beta_n = 0$.

Commençons par une proposition de base indispensable pour poursuivre.

Proposition 2.4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient K, M deux parties de $\mathbb{N}$ dont les cardinaux vérifient $\#K \leq n$ et $\#M = n+1$. Soient également $\alpha, \beta \in A$ tels que $\alpha_j \leq \beta_j$ quel que soit $j \in \mathbb{N}$ et $\alpha_m > 0$ si $m \in M$. Dans ce cas, on a*

$$\inf \left\{ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m : m \in M \right\} \leq \delta_n \left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right) \leq \sup \left\{ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_k : k \notin K \right\}.$$

Démonstration. (1) Pour prouver la première inégalité de l'énoncé, on va procéder par l'absurde et supposer l'existence d'un $\delta > 0$ avec $\delta < \inf\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m : m \in M\right\}$ et d'un $F \in \mathcal{L}_n\left(\lambda^l(A)\right)$ vérifiant $B_{p^l_\beta} \subset \delta B_{p^l_\alpha} + F$. Considérons l'application

$$S : \lambda^l(A) \to \lambda^l(A) : \xi \mapsto \sum_{m \in M} \xi_m e_m$$

et posons $G := \{\xi \in \lambda^l(A) : S(\xi) = \xi\}$. Notons également δ_0 le réel strictement positif $\inf\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m : m \in M\right\}$. Soit $\xi \in G$. Alors, si $m \in M$, on a

$$|\beta_m \xi_m| = \frac{\beta_m}{\alpha_m}|\alpha_m \xi_m| \leq \frac{1}{\delta_0}|\alpha_m \xi_m| \quad \text{et} \quad p^l_\beta(\xi) \leq \frac{1}{\delta_0} p^l_\alpha(\xi).$$

On en déduit donc que $B_{p^l_\alpha} \cap G \subset \frac{1}{\delta_0} B_{p^l_\beta} \cap G$. Or, en appliquant S aux deux membres de l'inclusion $B_{p^l_\beta} \subset \delta B_{p^l_\alpha} + F$, on obtient $B_{p^l_\beta} \cap G \subset \delta B_{p^l_\alpha} \cap G + S(F)$. D'où

$$B_{p^l_\alpha} \cap G \subset \frac{\delta}{\delta_0} B_{p^l_\alpha} \cap G + S(F).$$

Fixons $\xi \in B_{p^l_\alpha} \cap G$. On sait qu'il existe $f_0 \in S(F)$ tel que $p^l_\alpha(\xi - f_0) < \frac{\delta}{\delta_0}$ et $\xi - f_0 \in G$. Or, vu ce qui précède, on a $\frac{\delta}{\delta_0} B_{p^l_\alpha} \cap G \subset \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^2 B_{p^l_\alpha} \cap G + S(F)$ et, par conséquent, il existe $f_1 \in S(F)$ avec $p^l_\alpha(\xi - f_0 - f_1) < \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^2$ et $\xi - f_0 - f_1 \in G$.

Par récurrence, on trouve une suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $S(F)$ telle que, pour tout $j_0 \in \mathbb{N}$,

$$p^l_\alpha(\xi - f_0 - ... - f_{j_0}) < \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{j_0+1}$$

et $\xi - f_0 - ... - f_{j_0} \in G$. Remarquons également que p^l_α est une norme sur G car $\alpha_m > 0$ pour tout $m \in M$. Or $S(F)$ est un sous-espace vectoriel de G de dimension finie, donc c'est un fermé de l'espace normé (G, p^l_α). Par conséquent, comme la série $\sum_{j=0}^{+\infty} f_j$ converge vers ξ dans (G, p^l_α), on en déduit que $\xi \in S(F)$.
On a ainsi montré que $B_{p^l_\alpha} \cap G \subset S(F)$, ce qui implique que $G \subset S(F)$ et donc que $G = S(F)$. D'où une absurdité, car $\dim(G) = n+1 > \dim(S(F))$.

(2) Soit l'application linéaire

$$T : \lambda^l(A) \to \lambda^l(A) : \xi \to \begin{cases} \sum_{k \in K} \xi_k e_k \text{ si } K \neq \emptyset \\ 0 \text{ si } K = \emptyset. \end{cases}$$

Notons que si $\xi \in \lambda^l(A)$ et si $j \in \mathbb{N}$, alors

$$|\alpha_j(\xi - T(\xi))_j| = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_j |\beta_j(\xi - T(\xi))_j| \leq \sup\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_k : k \notin K\right\} |\beta_j(\xi - T(\xi))_j|,$$

ce qui implique l'inégalité $p^l_\alpha(\xi - T(\xi)) \leq \sup\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_k : k \notin K\right\} p^l_\beta(\xi - T(\xi))$. De plus, si $\xi \in B_{p^l_\beta}$, on a $\xi - T(\xi) \in B_{p^l_\beta}$ puisque $|(\xi - T(\xi))_j| \leq |\xi_j|$ si $j \in \mathbb{N}$. Dès lors, pour un tel ξ, il vient

$$\xi = \xi - T(\xi) + T(\xi) \in \sup\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_k : k \notin K\right\} B_{p^l_\alpha} + T(\lambda^l(A)).$$

Cela donne la deuxième inégalité de l'énoncé.

□

Remarque 2.4.1. Nous avons également montré dans la preuve précédente que si $\xi \in \lambda^l(A)$, alors

$$p^l_\alpha(\xi - T(\xi)) \leq \sup\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_k : k \notin K\right\} p^l_\beta(\xi - T(\xi))$$

où $T : \lambda^l(A) \to \lambda^l(A) : \xi \to \begin{cases} \sum_{k \in K} \xi_k e_k \text{ si } K \neq \emptyset \\ 0 \text{ si } K = \emptyset. \end{cases}$

Avant de considérer le corollaire suivant, rappelons qu'une suite ξ de nombres complexes est qualifiée de *suite à support fini* si elle ne comporte qu'un nombre fini de composantes non nulles. Dans le cas contraire, on parle de *suite à support infini*.

Corollaire 2.4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $\alpha, \beta \in A$ tels que $\alpha_j \leq \beta_j$ quel que soit $j \in \mathbb{N}$.*

a) Si la suite α/β est à support fini, alors

$$\delta_n\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right) = 0$$

lorsque n est supérieur ou égal au nombre de composantes non nulles de α/β.

b) Si la suite α/β est décroissante, alors

$$\delta_n\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right) = \begin{cases} \alpha_n/\beta_n \textit{ si } \beta_n > 0 \\ 0 \textit{ si } \beta_n = 0. \end{cases}$$

Démonstration. a) Il s'agit d'une simple conséquence de la proposition 2.4.1, en considérant K l'ensemble des indices correspondant aux composantes non nulles de α/β (ou l'ensemble vide si α est la suite nulle).

b) Supposons d'abord que $\alpha_m > 0$ (et donc que $\beta_m > 0$) si $m \in \{0, ..., n\}$. Dans cette situation, il suffit d'appliquer la proposition 2.4.1 en prenant les ensembles $K = \{0, ..., n-1\}$ si $n > 0$ et $K = \emptyset$ si $n = 0$ ainsi que $M = \{0, ..., n\}$.

Si l'hypothèse précédente n'est pas vérifiée, par décroissance de la suite α/β, celle-ci est nécessairement à support fini. Dans ce cas, elle ne possède même qu'un nombre de composantes non nulles inférieur ou égal à n. On conclut alors par le point a). Notons qu'on obtient bien l'égalité de l'énoncé, car $(\alpha/\beta)_n = 0$, donc $\alpha_n = 0$.

□

Le résultat précédent permet d'obtenir directement la dimension diamétrale de certains espaces de suites de Köthe. Afin d'atteindre cet objectif, considérons la définition suivante.

Définition 2.4.1. L'ensemble de Köthe A est qualifié de *matrice de Köthe régulière* s'il est dénombrable et si, lorsqu'on l'écrit $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

(i) pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, on a
$$a_k(n) > 0,$$

(ii) pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, on a
$$a_k(n) \leq a_{k+1}(n),$$

(iii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite
$$\left(\frac{a_k(n)}{a_{k+1}(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
est décroissante.

On dit aussi que l'espace $\lambda^l(A)$ est *régulier*.

Remarquons que cette définition implique bien entendu que, pour tous $k, m \in \mathbb{N}$, la suite
$$\left(\frac{a_k(n)}{a_{k+m}(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
est décroissante. En effet,

a) si $m = 0$, cette suite se réduit à la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) si $m > 0$, alors, pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned}
\frac{a_k(n+1)}{a_{k+m}(n+1)} &= \frac{a_{k+m-1}(n+1)}{a_{k+m}(n+1)} \frac{a_{k+m-2}(n+1)}{a_{k+m-1}(n+1)} \cdots \frac{a_k(n+1)}{a_{k+1}(n+1)} \\
&\leq \frac{a_{k+m-1}(n)}{a_{k+m}(n)} \frac{a_{k+m-2}(n)}{a_{k+m-1}(n)} \cdots \frac{a_k(n)}{a_{k+1}(n)} \\
&= \frac{a_k(n)}{a_{k+m}(n)}.
\end{aligned}$$

Qui plus est, notons que ladite définition impose également que les normes de l'espace $\lambda^l(A)$ vérifient
$$p_k^l \leq p_{k+m}^l$$
lorsque $k, m \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.4.2. *Si A est une matrice de Köthe régulière et s'écrit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors pour tous $k, m, n \in \mathbb{N}$, on a*
$$\delta_n\left(B_{p_{k+m}^l}, B_{p_k^l}\right) = \frac{a_k(n)}{a_{k+m}(n)}.$$

Démonstration. Cela découle directement du point (b) du corollaire 2.4.1 □

En appliquant ce résultat, on obtient immédiatement la forme de la dimension diamétrale de $\lambda^l(A)$ lorsque A est une matrice de Köthe régulière.

Théorème 2.4.1. *Si A est une matrice de Köthe régulière et s'écrit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a*

$$\Delta(\lambda^l(A)) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left(\frac{a_k(n)}{a_{k+m}(n)}\xi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\right\}.$$

Lorsque $\lambda^l(A)$ n'est pas régulier, il est plus compliqué d'obtenir sa dimension diamétrale. Néanmoins, cela est réalisable au vu des prochaines considérations.

À partir d'une suite de nombres réels positifs, à support infini et convergeant vers 0 dans $\mathbb{R}$, il est possible de construire une suite décroissante de nombres réels strictement positifs.
En effet, soit x une telle suite. Il est clair que la borne supérieure $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est réalisée. Notons-la y_0 et soit $\varphi(0)$ l'indice dont la valeur est donnée par $\inf\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_0\}$.
Ensuite, on désigne par y_1 la borne supérieure (réalisée) de l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\setminus\{\varphi(0)\}\}$ et par $\varphi(1)$ l'indice $\inf\{n \in \mathbb{N}\setminus\{\varphi(0)\} : x_n = y_1\}$.
Et on continue de la même façon pour définir la suite y. En reprenant les notations précédentes, on peut même écrire $y_n = x_{\varphi(n)}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$. Cette suite y est bien évidemment décroissante vu la construction effectuée. Par conséquent, sur l'ensemble des suites à support infini appartenant à $c_0 \cap [0, +\infty[^{\mathbb{N}}$, on peut définir une application

$$\pi : x \mapsto \pi(x),$$

où $\pi(x)$ désigne la suite décroissante obtenue par la construction présentée ci-dessus. Grâce à cette application, on peut dès maintenant considérer une proposition très importante.

Proposition 2.4.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $\alpha, \beta \in A$ tels que $\alpha_j \leq \beta_j$ quel que soit $j \in \mathbb{N}$. Si α/β est une suite à support infini convergeant vers 0, alors*

$$\delta_n\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right) = \left(\pi\left(\alpha/\beta\right)\right)_n.$$

Autrement dit, le nombre $\delta_n\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right)$ représente la $(n+1)^{\text{ème}}$ plus grande composante de la suite α/β.

Démonstration. Pour plus de simplicité, si $j \in \mathbb{N}$, reprenons la notation $\varphi(j)$ présentée dans la construction de l'application π donnée ci-dessus. Cela signifie que $\varphi(j)$ désigne l'indice de la composante de α/β correspondant à la $j^{\text{ème}}$ composante de $\pi\left(\alpha/\beta\right)$.
Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.4.1, en considérant d'une part $M = \{\varphi(0), ..., \varphi(n)\}$ et d'autre part $K = \{\varphi(0), ..., \varphi(n-1)\}$ si $n > 0$ et $K = \emptyset$ si $n = 0$. □

Pour continuer, nous avons besoin de la caractérisation des espaces de Schwartz dans le cadre des espaces de suites de Köthe. Dans cet objectif, introduisons une nouvelle notation : si $m \in \mathbb{N}$, nous désignerons par P_m l'application linéaire continue

$$P_m : \lambda^l(A) \to \lambda^l(A) : \xi \mapsto \sum_{n=0}^{m} \xi_n e_n.$$

Théorème 2.4.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lambda^l(A)$ *est un espace de Schwartz ;*

(ii) $\forall \alpha \in A$, $\exists \beta \in A$ *tel que* $\alpha_n \leq \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *et tel que* $\alpha/\beta \in c_0$ *;*

(iii) $\forall \alpha \in A$, $\exists \beta \in A$ *tel que* $\alpha_n \leq \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *et tel que,* $\forall C > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ *avec*

$$p^l_\alpha(\xi - P_m(\xi)) \leq C p^l_\beta(\xi)$$

$\forall \xi \in \lambda^l(A)$, $\forall m \in \mathbb{N}$ *tel que* $m \geq m_0$.

Démonstration. Le point (i) implique le point (ii). Étant donné un $\alpha \in A$, on peut trouver un $\beta \in A$ tel que $\alpha_n \leq \beta_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et tel que $\left(\delta_n\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, vu que $\lambda^l(A)$ est de Schwartz (par le théorème 2.3.1).
Cela implique alors que $\alpha/\beta \in c_0$. En effet : procédons par l'absurde et supposons que ce n'est pas le cas. Dès lors, il existe $C > 0$ et une sous-suite $\left((\alpha/\beta)_{k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de α/β telle que que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(\alpha/\beta)_{k(n)} \geq C$. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et posons $M := \{k(0), ..., k(n)\}$. En appliquant la proposition 2.4.1, on obtient

$$C \leq \inf\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m : m \in M\right\} \leq \delta_n\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right).$$

Cela implique que la suite $\left(\delta_n\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, ce qui est absurde.

Le point (ii) implique le point (iii). Fixons $\alpha \in A$ et prenons $\beta \in A$ tel que $\alpha_n \leq \beta_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et tel que $\alpha/\beta \in c_0$. Vu la remarque 2.4.1, si $m \in \mathbb{N}$, on a

$$p^l_\alpha(\xi - P_m(\xi)) \leq \sup\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_k : k \geq m+1\right\} p^l_\beta(\xi)$$

pour tout $\xi \in \lambda^l(A)$. Si l'on se donne un $C > 0$ et si on prend $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\alpha/\beta)_n \leq C$ si $n \geq m_0 + 1$, alors on a

$$p^l_\alpha(\xi - P_m(\xi)) \leq C p^l_\beta(\xi)$$

pour tout $\xi \in \lambda^l(A)$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq m_0$.

Le point (iii) implique le point (i). Prenons α et β comme dans l'énoncé et fixons $C > 0$. On peut alors trouver $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p^l_\alpha(\xi - P_m(\xi)) \leq C p^l_\beta(\xi)$ pour tout $\xi \in \lambda^l(A)$ et tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq m_0$. Si $\xi \in B_{p^l_\beta}$ et $m \geq m_0$, alors

$$\xi = \xi - P_m(\xi) + P_m(\xi) \in C B_{p^l_\alpha} + P_m(\lambda^l(A)).$$

Par conséquent, comme $P_m\left(\lambda^l(A)\right) \in \mathcal{L}_{m+1}\left(\lambda^l(A)\right)$, on a $\delta_{m+1}\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right) \leq C$. D'où la conclusion. $\square$

Nous sommes désormais en mesure d'obtenir la dimension diamétrale de $\lambda^l(A)$ de façon générale.

Théorème 2.4.3. *1) Si $\lambda^l(A)$ n'est pas un espace de Schwartz, alors $\Delta(\lambda^l(A)) = c_0$.*
2) Si $\lambda^l(A)$ est un espace de Schwartz, alors

$$\Delta(\lambda^l(A)) = \Big\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall \alpha \in A \text{ à support infini } \exists \beta \in A \text{ avec } \alpha_n \leq \beta_n \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\alpha/\beta \in c_0 \text{ et } \left(\xi_n \left(\pi\left(\alpha/\beta\right)\right)_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\Big\}.$$

Démonstration. Le point 1) est connu, passons donc au point 2). Notons G le second membre de l'égalité de l'énoncé. Si $\xi \in G$ et si $\alpha \in A$, alors on a deux possibilités. Si α est à support fini, alors $\left(\xi_n\delta_n\left(B_{p^l_\alpha}, B_{p^l_\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien sûr vers 0 dans $\mathbb{C}$, vu le corollaire 2.4.1. Si α est à support infini, alors on peut trouver un $\beta \in A$, avec $\alpha_n \leq \beta_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $\left(\xi_n\delta_n\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, vu la forme de G et la proposition 2.4.3. Au total, ξ est bien un élément de $\Delta(\lambda^l(A))$.

Il ne nous reste plus qu'à prouver l'inclusion $\Delta(\lambda^l(A)) \subset G$. Pour ce faire, fixons $\xi \in \Delta(\lambda^l(A))$ et $\alpha \in A$ une suite à support infini. On sait qu'il existe $\beta \in A$ tel que $\alpha_n \leq \beta_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et tel que $\left(\xi_n\delta_n\left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

Puisque $\lambda^l(A)$ est de Schwartz, il existe $\gamma \in A$ tel que $\beta_n \leq \gamma_n$ si $n \in \mathbb{N}$ et tel que $\beta/\gamma \in c_0$. Il est alors clair que la suite α/γ est à support infini et vérifie

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)_n \leq \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)_n$$

si $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\alpha/\gamma \in c_0$. De plus, on a bien sûr

$$\left|\xi_n \delta_n \left(B_{p^l_\gamma}, B_{p^l_\alpha}\right)\right| \leq \left|\xi_n \delta_n \left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}\right)\right|$$

si $n \in \mathbb{N}$. Dès lors, la suite $\left(\xi_n \delta_n \left(B_{p^l_\gamma}, B_{p^l_\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ et on conclut par la proposition 2.4.3. □

Corollaire 2.4.2. *La dimension diamétrale de $\lambda^l(A)$ est indépendante de l.*

Démonstration. Cela découle du théorème précédent, puisque le caractère de Schwartz de $\lambda^l(A)$ est lui-même indépendant de l. □

Le théorème 2.4.2, outre le fait qu'il mène à la forme exacte de la dimension diamétrale de $\lambda^l(A)$, permet également d'obtenir une proposition fort intéressante des espaces de suites de Köthe réguliers.

Proposition 2.4.4. *Si $\lambda^l(A)$ est régulier, alors cet espace est soit de Schwartz, soit isomorphe à l (mais pas les deux).*

Démonstration. Notons $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la matrice A. Supposons que $\lambda^l(A)$ n'est pas de Schwartz. Cela signifie qu'il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\delta_n \left(B_{p^l_{k_0+m}}, B_{p^l_{k_0}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 dans $\mathbb{R}$. Comme cette suite est décroissante et vu la proposition 2.4.2, cela signifie que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m > 0$ tel que $a_{k_0+m}(n) \leq C_m a_{k_0}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, par définition des matrices de Köthe régulières, si $k \in \mathbb{N}$ est tel que $k \leq k_0$, alors on a aussi $a_k(n) \leq a_{k_0}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dès lors, les matrices A et $\{a_{k_0}\}$ sont équivalentes. Par conséquent, les espaces $\lambda^l(A)$ et $\lambda^l(\{a_{k_0}\})$ coïncident algébriquement et topologiquement par la proposition 1.2.8.
Soit alors l'application $S : \lambda^l(A) \to l : \xi \mapsto a_{k_0}\xi$. Comme les composantes de a_{k_0} sont strictement positives, on vérifie sans peine que S est un isomorphisme d'espaces localement convexes.
Notons que $\lambda^l(A)$ ne peut être simultanément de Schwartz et isomorphe à l. En effet, comme l est normé et de dimension infinie (il contient l_1), il n'est pas de Schwartz. □

2.5 Calcul de la dimension diamétrale des espaces de séries de puissances

Les espaces de séries de puissances sont des espaces de suites de Köthe particuliers, qui ont une utilité dans la théorie des espaces de Fréchet nucléaires (voir par exemple [28]).
Nous allons généraliser la définition de ces espaces de séries de puissances donnée par Jarchow dans [16]. Dans ce livre, l'auteur considère des espaces échelonnés de Köthe de type 1 pour obtenir ladite définition mais, au vu des résultats de la précédente section, il est possible de la généraliser au niveau d'espaces de suites de Köthe de Terzioglu ([27]).
Comme annoncé dans l'introduction de ce mémoire, nous allons prouver que la dimension diamétrale est un invariant topologique complet sur la classe des espaces de séries de puissances (associée à un espace admissible donné).

Dans cette section, on fixe une suite α de réels positifs qui est à la fois croissante et non majorée. On fixe également un espace admissible $(l, \|.\|_l)$. On considère alors les matrices de Köthe

$$A = \left((e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad \text{et} \quad A' = \left((e^{k\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Définition 2.5.1. Les *espaces de séries de puissances (relatifs à la suite α et à l'espace admissible l)* sont les espaces de suites de Köthe

$$\lambda^l(A) \text{ et } \lambda^l(A'),$$

qualifiés respectivement d'*espace de séries de puissances de type fini (relatif à α et l)* et d'*espace de séries de puissances de type infini (relatif à α et l)*.

Au vu de la définition 1.2.3 et des propositions 1.2.6 et 1.2.7, on obtient directement le prochain résultat.

Proposition 2.5.1. *On a les trois propriétés suivantes.*

1) *L'espace $\mathcal{O}(D(0,1))$ est isomorphe à l'espace de séries de puissances de type fini associé à la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à l'espace l_1.*
2) *L'espace $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'espace de séries de puissances de type infini associé à la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à l'espace l_1.*
3) *L'espace s des suites à décroissance rapide est égal à l'espace de séries de puissances de type infini associé à la suite $(\ln(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ et à l'espace l_1.*

Nous allons maintenant calculer la dimension diamétrale des espaces de séries de puissances grâce aux résultats obtenus dans le cadre des espaces de Köthe réguliers.

Proposition 2.5.2. *Les espaces des séries de puissances $\lambda^l(A)$ et $\lambda^l(A')$ sont réguliers et sont des espaces de Schwartz.*

Démonstration. Commençons par le type fini. Vérifions si la matrice de Köthe A associée est régulière.

a) Pour tous $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$, on a bien sûr $e^{-\alpha_n/k} > 0$ et $e^{-\alpha_n/k} \leq e^{-\alpha_n/(k+1)}$.
b) Fixons $k \in \mathbb{N}_0$. Si $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{e^{-\alpha_n/k}}{e^{-\alpha_n/(k+1)}} = e^{\frac{-\alpha_n}{k(k+1)}}$$
et la suite $\left(e^{\frac{-\alpha_n}{k(k+1)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle converge même vers 0 dans $\mathbb{R}$, cela prouve simultanément que $\lambda^l(A)$ est de Schwartz.

Passons au type infini, avec pour matrice de Köthe associée A'. On procède de même.

a) Pour tous $k \in \mathbb{N}$, il vient $e^{k\alpha_n} > 0$ et $e^{k\alpha_n} \leq e^{(k+1)\alpha_n}$.
b) Fixons $k \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{e^{k\alpha_n}}{e^{(k+1)\alpha_n}} = e^{-\alpha_n}$$
et la suite $(e^{-\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Une nouvelle fois, cette suite converge même vers 0 dans $\mathbb{R}$, donc $\lambda^l(A')$ est de Schwartz.

□

On peut donc dès maintenant déterminer la dimension diamétrale des espaces de séries de puissances.

Proposition 2.5.3. *On a*

$$\Delta(\lambda^l(A)) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}_0 \, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left(e^{\alpha_n\left(\frac{1}{k+m}-\frac{1}{k}\right)}\xi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\right\}$$

et

$$\Delta(\lambda^l(A')) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left(e^{-m\alpha_n}\xi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\right\}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 2.4.1 aux matrices de Köthe régulières A et A'. □

Nous allons simplifier quelque peu les deux expressions de la proposition précédente.

Théorème 2.5.1. *On a*

$$\Delta(\lambda^l(A)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (\xi_n e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\right\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (\xi_n e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty\right\}.$$

Démonstration. Soient $\xi \in \Delta(\lambda^l(A))$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(e^{\alpha_n\left(\frac{1}{k+m}-\frac{1}{k}\right)}\xi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0.$$

Comme α est une suite croissante de réels positifs non bornée, la suite $\left(e^{\alpha_n/(k+m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'infini, donc on doit avoir

$$(\xi_n e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0.$$

Ainsi, on trouve

$$\Delta(\lambda^l(A)) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (\xi_n e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\right\} \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (\xi_n e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty\right\}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer l'inclusion

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (\xi_n e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty\right\} \subset \Delta(\lambda^l(A)).$$

Soit $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$,

$$(\xi_n e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty.$$

Fixons $k_0 \in \mathbb{N}_0$. Si l'on pose $m = 2k_0$, alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\xi_n e^{\alpha_n\left(\frac{1}{k_0+m}-\frac{1}{k_0}\right)} = \xi_n e^{\frac{-2}{3k_0}\alpha_n} = \left(\xi_n e^{\frac{-\alpha_n}{3k_0}}\right) e^{\frac{-\alpha_n}{3k_0}}.$$

Comme le premier facteur (entre parenthèses) de ce produit est le terme général d'une suite appartenant à l_∞ et comme le second est le terme général d'une suite appartenant à c_0, on en déduit que

$$\left(\xi_n e^{\alpha_n\left(\frac{1}{k_0+m}-\frac{1}{k_0}\right)}\right) \in c_0,$$

donc $\xi \in \Delta(\lambda^l(A))$. □

Le résultat précédent peut être réécrit sous une forme très intéressante.

Corollaire 2.5.1. *On a*

$$\Delta(\lambda^l(A)) = \lambda_0(A) = \lambda_\infty(A).$$

Quant au type infini, on a le théorème suivant.

Théorème 2.5.2. *On a*

$$\Delta(\lambda^l(A')) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n e^{-k\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty\right\}.$$

Démonstration. a) Soit $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ pour lequel il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(\xi_n e^{-k\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty.$$

Dans ce cas,

$$\left(\xi_n e^{-(k+1)\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$$

et $\xi \in \Delta(\lambda^l(A'))$.

b) Si $\xi \in \Delta(\lambda^l(A'))$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(\xi_n e^{-m\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \subset l_\infty,$$

d'où la conclusion.

$\square$

Ce résultat peut lui aussi être réécrit plus simplement.

Corollaire 2.5.2. *On a*

$$\Delta(\lambda^l(A')) = k_\infty\left[\left((e^{-k\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right].$$

Dès lors, on obtient directement le corollaire suivant.

Corollaire 2.5.3. *On a*

1) $\Delta(\mathcal{O}(D(0,1))) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}\left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (\xi_n e^{-n/k})_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty\right\}$,

2) $\Delta(\mathcal{O}(\mathbb{C})) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n e^{-kn}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty\right\}$,

3) $\Delta(s) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\frac{\xi_n}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty\right\}$.

Nous allons terminer cette section par étudier le rôle important que joue la dimension diamétrale au niveau des espaces de séries de puissances. Pour ce faire, nous avons d'abord besoin d'un lemme.

Lemme 2.5.1. *Soient $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ et $B = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe. Supposons que $\lambda^l(B)$ est un espace de Schwartz. Alors, on a*

$$k_\infty(A) \neq \lambda^l(B).$$

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons au contraire que $k_\infty(A) = \lambda^l(B)$. Dès lors, par hypothèse, on a

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} l_\infty(a_k) = \lambda^l(B).$$

Premièrement, l'espace $\lambda^l(B)$ n'est pas normé. En effet, c'est un espace de Schwartz.
Deuxièmement, en appliquant la théorème de localisation de De Wilde (voir l'annexe, corollaire A.1.1) on sait qu'il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $l_\infty(a_{k_0}) = \lambda^l(B)$.
Troisièmement, en appliquant le théorème du graphe fermé, on en déduit également que les espaces $\lambda^l(B)$ et $l_\infty(a_{k_0})$ sont munis de la même topologie, ce qui est absurde, vu que le premier espace n'est pas normé et que le second est de Banach. $\square$

Proposition 2.5.4. *Si Π_1 et Π_2 sont deux espaces de séries de puissances associés à l et s'ils ont des dimensions diamétrales égales, alors ils sont isomorphes. Plus précisément, ils coïncident algébriquement et topologiquement. En outre, ils ont le même type.*

Démonstration. On sait qu'il existe une suite α de réels positifs croissante et non majorée telle que

$$\Pi_1 = \lambda^l(A) \text{ ou } \Pi_1 = \lambda^l(A'),$$

où

$$A = \left((e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ et } A' = \left((e^{k\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}},$$

selon que Π_1 est de type fini ou infini. De même, il existe une suite β de réels positifs croissante et non majorée telle que

$$\Pi_2 = \lambda^l(B) \text{ ou } \Pi_2 = \lambda^l(B'),$$

où

$$B = \left((e^{-\beta_n/k})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ et } B' = \left((e^{k\beta_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

(i) Supposons d'abord que Π_1 et Π_2 sont de type fini, i.e.

$$\Pi_1 = \lambda^l(A) \text{ et } \Pi_2 = \lambda^l(B).$$

Par hypothèse, on a aussi

$$\lambda_\infty(A) = \lambda_\infty(B).$$

Par la proposition 1.2.8, cela implique que $\lambda^l(A) = \lambda^l(B)$ algébriquement et topologiquement.

(ii) Supposons ensuite que Π_1 et Π_2 sont de type infini, i.e.

$$\Pi_1 = \lambda^l(A') \text{ et } \Pi_2 = \lambda^l(B').$$

Vu la forme des dimensions diamétrales de Π_1 et Π_2, on a

$$k_\infty \left[\left((e^{-k\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right] = k_\infty \left[\left((e^{-k\beta_n})_{n\in\mathbb{N}} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right].$$

Par le lemme 1.3.1, on en déduit que $\lambda^l(A') = \lambda^l(B')$ et que ces deux ensembles ont la même topologie.

(iii) Supposons enfin que Π_1 et Π_2 ne sont pas du même type, c'est-à-dire, par exemple,

$$\Pi_1 = \lambda^l(A') \text{ et } \Pi_2 = \lambda^l(B).$$

Dans ce cas, cela donne $k_\infty \left[\left((e^{-k\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right] = \lambda_\infty(B)$. Ainsi, on obtient une absurdité au vu du lemme 2.5.1.

Donc, si Π_1 et Π_2 ont même dimension diamétrale, ils doivent être du même type.

□

En particulier, le résultat précédent implique bien sûr le théorème suivant.

Théorème 2.5.3. *Si l'on désigne par $\mathcal{E}^l_{sp}$ la classe des espaces de séries de puissances associées à l, alors la dimension diamétrale*

$$\Delta : \mathcal{E}^l_{sp} \to \wp(\mathbb{C}^\mathbb{N})$$

est un invariant linéaire topologique complet.

Mais la proposition 2.5.4 est en fait plus forte que le théorème venant d'être énoncé, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.5.5. *Deux espaces de séries de puissances associés à l et de types différents ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Sinon, si deux espaces de séries de puissances associés à l n'ayant pas le même type étaient isomorphes, ils auraient en particulier la même dimension diamétrale, puisque celle-ci est un invariant topologique sur la classe des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{C}$. Cela est absurde au vu de la proposition 2.5.4. □

Remarque 2.5.1. L'énoncé précédent peut en fait être légèrement amélioré. En effet, au vu de la preuve de la proposition 2.5.4, on peut même dire que *deux espaces de séries de puissances de types différents (non nécessairement associés à un même espace admissible) ne sont pas isomorphes.*

Enfin, on peut considérer un corollaire du résultat précédent, illustrant l'intérêt de la dimension diamétral en analyse fonctionnelle.

Corollaire 2.5.4. *Les espaces $\mathcal{O}(D(0,1))$ et $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Cela découle directement des propositions 2.5.1 et 2.5.5. □

2.6 La classe de Dragilev

Nous allons améliorer le résultat majeur présenté dans la section précédente en considérant le travail réalisé par Dragilev dans l'article [9]. Dans celui-ci, l'auteur construit une classe d'espaces échelonnés de Köthe de type 1 sur laquelle la dimension diamétrale est un invariant complet. Il s'agit (comme annoncé) d'une généralisation du résultat concernant les espaces de séries de puissances. Néanmoins, le résultat au niveau des espaces de séries de puissances conserve son propre intérêt, comme nous l'expliquerons à la fin de cette section.

Au vu des développements de Terzioglu ([27]), nous allons généraliser cette classe aux espaces de Köthe associés à un espace admissible quelconque.

Ainsi, pour le reste de cette section, on fixe $(l, \|.\|_l)$ un espace admissible. Nous allons considérer essentiellement des espaces de Köthe réguliers et de Schwartz. Par abus de langage, on parlera de *matrices de Köthe régulières de Schwartz*.

Enfin, nous désignerons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des sous-suites de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Autrement dit, $\mathcal{N}$ est l'ensemble des suites strictement croissantes de naturels. Considérons alors la définition suivante.

Définition 2.6.1. Soit $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe telle que $a_k(n) > 0$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. Si $j, k, m \in \mathbb{N}$, on pose

$$N^1_{j,k,m}(A) := \left\{\eta \in \mathcal{N} : \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_m(\eta_n)a_j(\eta_n)}{a_k^2(\eta_n)} > 0\right\}$$

et

$$N^2_{j,k,m}(A) := \left\{\eta \in \mathcal{N} : \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_m(\eta_n)a_j(\eta_n)}{a_k^2(\eta_n)} < +\infty\right\}.$$

Enfin, on pose

$$N^1(A) := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} N^1_{j,k,m}(A) \quad \text{et} \quad N^2(A) := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} N^2_{j,k,m}(A).$$

Ces deux ensembles, de par leurs propriétés, vont permettre de définir la classe de Dragilev. Par conséquent, penchons-nous sur ces propriétés dans un premier temps.

Proposition 2.6.1. *Soit $A = (A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe et de Schwartz telle que $a_k(n) > 0$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$N^1(A) \cap N^2(A) = \emptyset.$$

Démonstration. Soit $\eta \in N^1(A)$. Par définition, il existe donc $j \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_m(\eta_n)a_j(\eta_n)}{a_k^2(\eta_n)} > 0.$$

De plus, pour un tel m, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_m(n)}{a_{m_0}(n)} = 0$. Dès lors, on a bien sûr

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{m_0}(\eta_n)a_j(\eta_n)}{a_k^2(\eta_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_m(\eta_n)a_j(\eta_n)}{a_k^2(\eta_n)} \frac{a_{m_0}(\eta_n)}{a_m(\eta_n)} = +\infty.$$

Donc $\eta \notin N^2_{j,k,m_0}(A)$. Au total, on a

$$\eta \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m_0\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{N} \setminus N^2_{j,k,m_0}(A)\right) = \mathcal{N} \setminus \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{m_0\in\mathbb{N}} N^2_{j,k,m_0}(A)\right) = \mathcal{N} \setminus N^2(A).$$

D'où la conclusion. □

Prouvons également la proposition suivante, énoncée dans [9].

Proposition 2.6.2. *Si $\lambda^l(A)$ et $\lambda^l(B)$ sont deux espaces de Köthe réguliers isomorphes, alors $N^1(A) = N^1(B)$ et $N^2(A) = N^2(B)$.*

Démonstration. Soit $T : \lambda^l(A) \to \lambda^l(B)$ un isomorphisme. Nous allons écrire $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour plus de simplicité, si $k \in \mathbb{N}$, on va noter dans cette preuve B_{a_k} la semi-boule ouverte de $\lambda^l(A)$ de centre 0 et de rayon 1 associée à la semi-norme $p^l_{a_k}$. De même, B_{b_k} désignera la semi-boule ouverte de $\lambda^l(B)$ de centre 0 et de rayon 1 associée à la semi-norme $p^l_{b_k}$. On va alors distinguer les deux égalités de l'énoncé.

(1) Prenons $\eta \in N^1(B)$ et montrons qu'il appartient à $N^1(A)$. Par définition, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$, on peut trouver $m_0 \in \mathbb{N}$ avec $\eta \in N^1_{j_0,k_0,m_0}(B)$. Dans ce cas, on sait qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $T(B_{a_j}) \subset B_{b_{j_0}}$. Ensuite, fixons $k \in \mathbb{N}$. Nous avons deux possibilités.

   (i) Si $k \leq j$, alors, il vient
   $$\frac{a_j(n)a_j(n)}{a_k^2(n)} \geq 1.$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\liminf_{n\to+\infty} \dfrac{a_j(\eta_n)a_j(\eta_n)}{a_k^2(\eta_n)} > 0$.

   (ii) Si $k \geq j$, alors $B_{a_k} \subset B_{a_j}$. Prenons $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $B_{b_{k_0}} \subset T(B_{a_k})$. On peut bien sûr supposer $k_0 \geq j_0$. Ainsi, on a
   $$B_{b_{k_0}} \subset T(B_{a_k}) \subset T(B_{a_j}) \subset B_{b_{j_0}}.$$
   En utilisant les propriétés de base des diamètres de Kolmogorov et la proposition 2.4.2, il vient
   $$\frac{b_{j_0}(n)}{b_{k_0}(n)} = \delta_n\left(B_{b_{k_0}}, B_{b_{j_0}}\right) \leq \delta_n\left(T(B_{a_k}), T(B_{a_j})\right) = \delta_n\left(B_{a_k}, B_{a_j}\right) = \frac{a_j(n)}{a_k(n)}$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, fixons $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\eta \in N^1_{j_0,k_0,m_0}(B)$. On peut bien entendu supposer sans restriction que $m_0 \geq k_0$. Dans ce cas, prenons $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq k$ et $T(B_{a_m}) \subset B_{b_{m_0}}$. On a dès lors $T(B_{a_m}) \subset B_{b_{m_0}} \subset B_{b_{k_0}} \subset T(B_{a_k})$. Ainsi, en procédant comme ci-dessus, on a $\frac{a_k(n)}{a_m(n)} \leq \frac{b_{k_0}(n)}{b_{m_0}(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Au total, on obtient
   $$\frac{a_m(n)a_j(n)}{a_k^2(n)} \geq \frac{b_{m_0}(n)b_{j_0}(n)}{b_{k_0}^2(n)},$$
   ce qui prouve que $\eta \in N^1_{j,k,m}(A)$.

   Ainsi, on a $\eta \in N^1(A)$. Par symétrie, on conclut donc que $N^1(A) = N^2(A)$.

(2) Supposons que $\eta \in N^2(B)$ et montrons que c'est un élément de $N^2(A)$. On va procéder comme dans le point (1). Fixons $j \in \mathbb{N}$. On peut trouver $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $B_{b_{j_0}} \subset T(B_{a_j})$. Ensuite, choisissons $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m_0 \in \mathbb{N}$, $\eta \in N^2_{j_0,k_0,m_0}(B)$. On peut bien sûr supposer sans restriction que $k_0 \geq j_0$. On sait également qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq j$ et tel que $T(B_{a_k}) \subset B_{b_{k_0}}$. Ainsi, on a
   $$T(B_{a_k}) \subset B_{b_{k_0}} \subset B_{b_{j_0}} \subset T(B_{a_j}).$$
   Comme précédemment, cela implique que $\frac{a_j(n)}{a_k(n)} \leq \frac{b_{j_0}(n)}{b_{k_0}(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit enfin $m \in \mathbb{N}$. On a deux possibilités.

   (i) Si $m \leq k$, alors il vient
   $$\frac{a_j(n)a_m(n)}{a_k^2(n)} \leq \frac{a_j(n)}{a_k(n)} \leq \frac{b_{j_0}(n)b_{k_0}(n)}{b_{k_0}^2(n)},$$
   d'où $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{a_m(\eta_n)a_j(\eta_n)}{a_k^2(\eta_n)} < +\infty$.

(ii) Si $m > k$, alors prenons $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m_0 \geq k_0$ et tel que $B_{b_{m_0}} \subset T(B_{a_m})$. On a donc

$$B_{b_{m_0}} \subset T(B_{a_m}) \subset T(B_{a_k}) \subset B_{b_{k_0}},$$

ce qui implique que $\frac{b_{k_0}(n)}{b_{m_0}(n)} \leq \frac{a_k(n)}{a_m(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Au total, on a

$$\frac{a_m(n)a_j(n)}{a_k^2(n)} \leq \frac{b_{m_0}(n)b_{j_0}(n)}{b_{k_0}^2(n)},$$

donc $\eta \in N^2_{j,k,m}(A)$, vu que $\eta \in N^2_{j_0,k_0,m_0}(B)$.

Nous avons ainsi prouvé que $\eta \in N^2(A)$. Par symétrie, on a donc $N^2(A) = N^2(B)$.

□

Pour continuer à étudier les propriétés des ensembles $N^1(A)$ et $N^2(A)$ définis plus haut, on va munir l'ensemble $\mathcal{N}$ d'un préordre. Si $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{N}$, alors on écrira

$$\eta_1 \preceq \eta_2$$

s'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\{(\eta_1)_n : n \in \mathbb{N},\ n \geq N\} \subset \{(\eta_2)_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Cette relation est en particulier vérifiée lorsque η_1 est une sous-suite η_2. Insistons également sur le fait que $\preceq$ n'est pas antisymétrique.

Remarques 2.6.1. (i) Dans la suite, la notion de maximum pour $\preceq$ va être employée. Cette notion est la même que celle déjà connue dans le cadre des relations d'ordre, mais il faut remarquer que l'absence de l'antisymétrie a pour conséquence qu'un tel maximum n'est pas unique.

(ii) Mettons en exergue une propriété directe, mais fort pratique, de $\preceq$. Soit A est une matrice de Köthe telle que $a_k(n) > 0$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. Si $\eta \in N^j(A)$ ($j \in \{1,2\}$), alors toute suite $\xi \in \mathcal{N}$ telle que $\xi \preceq \eta$ est elle-même un élément de $N^j(A)$.

Proposition 2.6.3. *Soit $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe telle que $0 < a_k(n) \leq a_{k+1}(n)$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. Si $N^1(A)$ est vide ou admet un élément maximum pour $\preceq$ et si $\eta \in \mathcal{N} \setminus N^1(A)$, alors η admet une sous-suite η_0 appartenant à $N^2(A)$. En particulier, on a $\eta_0 \preceq \eta$.*

Démonstration. Dans un premier temps, distinguons les deux situations de l'énoncé.

1) Supposons que μ_0 est un maximum de $N^1(A)$. Dans ce cas, η possède un nombre infini de composantes n'appartenant pas à μ_0, sinon $\eta \preceq \mu_0$ et $\eta \in N^1(A)$. On peut donc définir la suite $\mu \in \mathcal{N}$ dont les composantes sont exactement celles appartenant à η mais pas à μ_0. En particulier, aucune sous-suite ξ de μ n'appartient à $N^1(A)$ (sinon, $\xi \preceq \mu_0$, ce qui est absurde vu la construction de μ).

2) Supposons que $N^1(A) = \emptyset$. Dans ce cas, on pose $\mu := \eta$ et, bien entendu, aucune sous-suite de μ n'appartient à $N^1(A)$.

Ainsi, dans les deux cas, on obtient une sous-suite μ de η dont aucune sous-suite n'appartient à $N^1(A)$. Par conséquent, μ est tel qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_0(\mu_n)a_m(\mu_n)}{a_{k_0}^2(\mu_n)} = 0.$$

Dès lors, on peut extraire une sous-suite $\mu^{(0)}$ de μ telle que

$$\frac{a_0\left(\mu_n^{(0)}\right)a_n\left(\mu_n^{(0)}\right)}{a_{k_0}^2\left(\mu_n^{(0)}\right)} < 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or on sait que $\mu^{(0)} \notin N^1(A)$ donc, en procédant comme au paragraphe précédent, on peut extraire une sous-suite $\mu^{(1)}$ de $\mu^{(0)}$ telle que, pour un $k_1 \in \mathbb{N}$, $\frac{a_1(\mu_n^{(1)})a_n(\mu_n^{(1)})}{a_{k_1}^2\left(\mu_n^{(1)}\right)} < 1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On procède de la sorte de proche en proche. On obtient ainsi une suite $\left(\mu^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{N}$ telle que $\mu^{(j+1)}$ est une sous-suite de $\mu^{(j)}$ lorsque $j \in \mathbb{N}$ et une suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de naturels vérifiant

$$\frac{a_j\left(\mu_n^{(j)}\right)a_n\left(\mu_n^{(j)}\right)}{a_{k_j}^2\left(\mu_n^{(j)}\right)} < 1$$

pour tous $j, n \in \mathbb{N}$. Cela implique en particulier que $\frac{a_j(\mu_n^{(j)})a_m(\mu_n^{(j)})}{a_{k_j}^2\left(\mu_n^{(j)}\right)} < 1$ pour tous $j, m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Qui plus est, vu notre construction, on sait que $\mu_n^{(n)}$ est une composante de $\mu^{(j)}$ si $n \geq j$. Cela donne donc

$$\frac{a_j\left(\mu_n^{(n)}\right)a_m\left(\mu_n^{(n)}\right)}{a_{k_j}^2\left(\mu_n^{(n)}\right)} < 1$$

pour tous $j, m, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq j$ et $n \geq m$. Dès lors, on a

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{a_j\left(\mu_n^{(n)}\right)a_m\left(\mu_n^{(n)}\right)}{a_{k_j}^2\left(\mu_n^{(n)}\right)}\right) \leq 1$$

pour tous $j, m \in \mathbb{N}$. Posons $\eta_0 := \left(\mu_n^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Par construction, η_0 est une sous-suite de μ et donc de η. Ensuite, on vient de montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\eta_0 \in N^2_{j,k_j,m}(A)$. Cela prouve que $\eta_0 \in N^2(A)$. □

Une propriété totalement similaire peut être obtenue au niveau des ensembles $N^2(A)$.

Proposition 2.6.4. *Soit $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe telle que $0 < a_k(n) \leq a_{k+1}(n)$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. Si $N^2(A)$ est vide ou admet un élément maximum pour $\preceq$ et si $\eta \in \mathcal{N} \setminus N^2(A)$, alors η admet une sous-suite η_0 appartenant à $N^1(A)$. En particulier, on a $\eta_0 \preceq \eta$.*

Démonstration. On définit la sous-suite μ de η de la même façon que dans la preuve de la proposition précédente (en considérant $N^2(A)$ plutôt que dans $N^1(A)$). Dans cette situation, aucune sous-suite de μ n'appartient à $N^2(A)$. Cela implique qu'il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{a_m(\mu_n)a_{j_0}(\mu_n)}{a_k^2(\mu_n)} = +\infty.$$

Nous avons alors deux possibilités. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ avec

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{a_m(\mu_n)a_{j_0}(\mu_n)}{a_k^2(\mu_n)} > 0,$$

alors $\mu \in N^1(A)$ et on conclut. Sinon, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\liminf_{n\to+\infty}\frac{a_m(\mu_n)a_{j_0}(\mu_n)}{a_{k_0}^2(\mu_n)} = 0$. On extrait alors une sous-suite $\mu^{(0)}$ de μ telle que

$$\frac{a_n\left(\mu_n^{(0)}\right)a_{j_0}\left(\mu_n^{(0)}\right)}{a_{k_0}^2\left(\mu_n^{(0)}\right)} < 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, cela donne $\limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{a_m(\mu_n^{(0)}) a_{j_0}(\mu_n^{(0)})}{a_{k_0}^2(\mu_n^{(0)})} \right) \leq 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Néanmoins, comme $\mu^{(0)}$ est une sous-suite de μ, il n'appartient pas à $N^2(A)$. Il existe donc $j_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{a_m\left(\mu_n^{(0)}\right) a_{j_1}\left(\mu_n^{(0)}\right)}{a_k^2\left(\mu_n^{(0)}\right)} \right) = +\infty.$$

Remarquons qu'on peut bien sûr supposer $j_1 > j_0$.
De nouveau, on a deux possibilités. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{a_m\left(\mu_n^{(0)}\right) a_{j_1}\left(\mu_n^{(0)}\right)}{a_k^2\left(\mu_n^{(0)}\right)} \right) > 0,$$

alors $\mu^{(0)} \in N^1(A)$ et cela achève la démonstration. Sinon, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{a_m(\mu_n^{(0)}) a_{j_1}(\mu_n^{(0)})}{a_{k_1}^2(\mu_n^{(0)})} \right) = 0$. Comme précédemment, on extrait une sous-suite $\mu^{(1)}$ de $\mu^{(0)}$ telle que

$$\frac{a_n\left(\mu_n^{(1)}\right) a_{j_1}\left(\mu_n^{(1)}\right)}{a_{k_1}^2\left(\mu_n^{(1)}\right)} < 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et on continue ainsi de suite. On va montrer que la procédure ainsi décrite doit s'arrêter, ce qui permettra de conclure. Pour ce faire, procédons par l'absurde et supposons au contraire que cette procédure ne s'arrête pas. On construit ainsi une suite $\left(\mu^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{N}$ (telle que $\mu^{(n+1)}$ est une sous-suite de $\mu^{(n)}$ si $n \in \mathbb{N}$), une suite strictement croissante $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ et une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante : pour tous $n, t \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{a_n\left(\mu_n^{(t)}\right) a_{j_t}\left(\mu_n^{(t)}\right)}{a_{k_t}^2\left(\mu_n^{(t)}\right)} < 1.$$

Par conséquent, cela implique que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{a_m\left(\mu_n^{(n)}\right) a_j\left(\mu_n^{(n)}\right)}{a_k^2\left(\mu_n^{(n)}\right)} \right) < +\infty.$$

En effet, étant donné $j \in \mathbb{N}$, il existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tel que $j \leq j_{t_0}$. De plus, $\mu_n^{(n)}$ est une composante de $\mu^{(t_0)}$ si $n \geq t_0$. Dès lors, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq n$, on a

$$\frac{a_m\left(\mu_n^{(n)}\right) a_j\left(\mu_n^{(n)}\right)}{a_{k_{t_0}}^2\left(\mu_n^{(n)}\right)} \leq \frac{a_n\left(\mu_n^{(n)}\right) a_{j_{t_0}}\left(\mu_n^{(n)}\right)}{a_{k_{t_0}}^2\left(\mu_n^{(n)}\right)} < 1$$

si $n \geq t_0$.
Cela prouve que la suite $\left(\mu_n^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in N^2(A)$. C'est absurde car il s'agit d'une sous-suite de μ. $\square$

Faisons remarquer que si $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une matrice de Köthe telle que $a_k(n) > 0$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, alors $N^1(A)$ peut avoir un maximum (pour $\preceq$), être non vide mais n'avoir aucun maximum ou encore être vide. Il en est de même pour $N^2(A)$. Cela donne donc a priori neuf situations possibles.

Désignons par $\mathcal{K}_{RS}$ la classe des espaces de Köthe réguliers et de Schwartz. Pour continuer, nous sommes amenés à définir les neuf classes suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^l_{1,1} &= \left\{\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS} : N^1(A) \textit{ et } N^2(A) \textit{ admettent un maximum}\right\},\\
\mathcal{K}^l_{1,2} &= \left\{\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS} : N^1(A) \textit{ admet un maximum et } N^2(A) \neq \emptyset \textit{ n'admet pas de maximum}\right\},\\
\mathcal{K}^l_{1,3} &= \left\{\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS} : N^1(A) \textit{ admet un maximum et } N^2(A) = \emptyset\right\},\\
\mathcal{K}^l_{2,1} &= \left\{\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS} : N^1(A) \neq \emptyset \textit{ n'admet pas de maximum et } N^2(A) \textit{ admet un maximum}\right\},\\
\mathcal{K}^l_{2,2} &= \left\{\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS} : N^1(A) \textit{ et } N^2(A) \textit{ sont non vides mais n'admettent pas de maximum }\right\},\\
\mathcal{K}^l_{2,3} &= \left\{\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS} : N^1(A) \neq \emptyset \textit{ n'admet pas de maximum et } N^2(A) = \emptyset\right\},\\
\mathcal{K}^l_{3,1} &= \left\{\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS} : N^1(A) = \emptyset \textit{ et } N^2(A) \textit{ admet un maximum}\right\},\\
\mathcal{K}^l_{3,2} &= \left\{\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS} : N^1(A) = \emptyset \textit{ et } N^2(A) \neq \emptyset \textit{ n'admet pas de maximum}\right\},\\
\mathcal{K}^l_{3,3} &= \left\{\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS} : N^1(A) = N^2(A) = \emptyset\right\}.
\end{aligned}$$

Comme le lecteur l'aura compris, dans la définition de ces neuf classes, le premier indice correspond à l'ensemble $N^1(A)$ et le second à $N^2(A)$. Quand l'un de ces indices vaut 1, cela signifie que l'ensemble qui lui est associé admet un maximum ; quand il vaut 2, l'ensemble associé est non vide et n'admet aucun maximum ; enfin, l'indice 3 correspond à un ensemble vide.

Une fois cette considération faite, nous pouvons enfin passer à la définition de la classe de Dragilev.

Définition 2.6.2. La *classe de Dragilev associée à l* est l'ensemble

$$\mathcal{D}^l := \mathcal{K}^l_{3,1} \cup \mathcal{K}^l_{1,1} \cup \mathcal{K}^l_{1,3}.$$

Passons à quelques propriétés des classes présentées ci-dessus.

Proposition 2.6.5. *Deux espaces appartenant à deux classes $\mathcal{K}^l_{j,k}$ différentes ($j, k \in \{1, 2, 3\}$) ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Cela découle directement de la proposition 2.6.2. □

Proposition 2.6.6. *La classe $\mathcal{K}^l_{3,3}$ est vide.*

Démonstration. En effet, supposons que $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{3,3}$. En particulier, on a $N^1(A) = \emptyset$ et donc $(n)_{n\in\mathbb{N}} \notin N^1(A)$. Vu les résultats précédents, cela implique qu'il existe une sous-suite η_0 de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $N^2(A)$, ce qui est absurde car $N^2(A) = \emptyset$. □

Il n'y a donc en réalité que huit classes parmi celles que nous avons présentées ci-dessus. Dans [9], Dragilev montre que ces huit classes sont en fait toutes non vides. Nous ne démontrerons pas ce résultat.

Il est maintenant possible de caractériser les trois classes constituant la classe de Dragilev.

Proposition 2.6.7. *Soit $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS}$. Alors $\lambda^l(A)$ appartient à $\mathcal{K}^l_{1,3}$ si et seulement si on a l'égalité $N^1(A) = \mathcal{N}$.*

Démonstration. Supposons que $N^1(A)$ admet un maximum pour $\preceq$ et que $N^2(A) = \emptyset$. Si jamais il existait $\eta \in \mathcal{N} \setminus N^1(A)$, alors η admettrait une sous-suite η_0 appartenant $N^2(A)$, ce qui est absurde.
Supposons maintenant que $N^1(A) = \mathcal{N}$. Comme $N^1(A) \cap N^2(A) = \emptyset$, alors $N^2(A) = \emptyset$. Qui plus est, la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un maximum de $N^1(A)$. □

Proposition 2.6.8. *Soit $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS}$. Alors $\lambda^l(A)$ appartient à $\mathcal{K}^l_{3,1}$ si et seulement si on a l'égalité $N^2(A) = \mathcal{N}$.*

Démonstration. Il suffit de procéder comme dans la preuve de la proposition précédente. □

En utilisant les définitions de $N^1(A)$ et $N^2(A)$, on obtient alors les corollaires suivants, qui sont des caractérisations fort utiles en pratique pour déterminer si un espace est dans la classe $\mathcal{K}^l_{1,3}$ ou $\mathcal{K}^l_{3,1}$.

Corollaire 2.6.1. *Soit $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS}$. Notons $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Alors*

(i) $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$ si et seulement s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k^2(n)}{a_m(n)a_j(n)} = 0;$$

(ii) $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{3,1}$ si et seulement si, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_m(n)a_j(n)}{a_k^2(n)} = 0.$$

Démonstration. (i) Par la proposition précédente, il est clair que $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$ si et seulement s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_m(n)a_j(n)}{a_k^2(n)} > 0.$$

Si on a une telle limite, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_m(n)}{a_{m_0}(n)} = 0$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_{m_0}(n)a_j(n)}{a_k^2(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_m(n)a_j(n)}{a_k^2(n)} \frac{a_{m_0}(n)}{a_m(n)}\right) = +\infty,$$

soit $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_k^2(n)}{a_{m_0}(n)a_j(n)}\right) = 0$. Donc la condition est nécessaire. De plus, elle est trivialement suffisante.

(ii) Supposons que $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{3,1}$. Dès lors, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_m(n)a_j(n)}{a_k^2(n)} < +\infty.$$

Dans une telle situation, on sait qu'on peut trouver $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_m(n)}{a_{m_0}(n)} = 0$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_m(n)a_j(n)}{a_k^2(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_{m_0}(n)a_j(n)}{a_k^2(n)} \frac{a_m(n)}{a_{m_0}(n)}\right) = 0.$$

Nous venons donc de prouver que la condition est nécessaire. On conclut dans ce cas car elle est bien sûr suffisante.

□

Remarquons qu'il est alors possible de faire un lien à ce niveau avec les espaces de séries de puissances.

Proposition 2.6.9. *Tout espace de séries de puissances de type fini associé à l est un élément de $\mathcal{K}^l_{3,1}$ et tout espace de séries de puissances de type infini associé à l est un élément de $\mathcal{K}^l_{1,3}$.*

Démonstration. Comme de coutume, fixons α une suite croissante et non bornée de réels positifs et considérons les matrices de Köthe $A = \big((e^{-\alpha_n/k})_{n\in\mathbb{N}}\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ (type fini) et $A' = \big((e^{\alpha_n k})_{n\in\mathbb{N}}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ (type infini).

(i) Montrons que l'espace $\lambda^l(A)$ est un élément de $\mathcal{K}^l_{3,1}$. Cela découle du corollaire précédent : pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, le naturel $k := 2j$ est tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\alpha_n/m}e^{-\alpha_n/j}}{(e^{-\alpha_n/k})^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha_n/m} = 0.$$

(ii) Passons à l'espace $\lambda^l(A')$ et prouvons qu'il appartient à la classe $\mathcal{K}^l_{1,3}$. En effet, le naturel $j := 0$ est tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le naturel $m := 2k+1$ vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(e^{\alpha_n k})^2}{e^{\alpha_n m} e^{\alpha_n j}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha_n} = 0.$$

D'où la conclusion. □

Cette proposition explique donc pourquoi le résultat selon lequel la dimension diamétrale est un invariant complet sur la classe de Dragilev associée à l (cf. théorème 2.6.1) est une généralisation de ce même résultat au niveau des espaces de séries de puissances. Nous expliquerons plus loin en quoi le caractère complet de la dimension diamétrale sur les différentes classes de séries de puissances garde malgré tout son intérêt.

Passons maintenant à une caractérisation des éléments de la classe $\mathcal{K}^l_{1,1}$.

Proposition 2.6.10. *Soit $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS}$. Alors $\lambda^l(A)$ appartient à $\mathcal{K}^l_{1,1}$ si et seulement s'il existe $\eta \in N^1(A)$ et $\xi \in N^2(A)$ telles que*

$$\mathbb{N} = \{\eta_n : n \in \mathbb{N}\} \uplus \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. Soient η un maximum de $N^1(A)$ et ξ un maximum de $N^2(A)$. Montrons dans un premier temps que le nombre de naturels m tels que

$$m \notin A := \{\eta_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$$

est fini. Pour ce faire, procédons par l'absurde et supposons que l'ensemble $\mathbb{N}\setminus A$ est infini. Il existe donc une suite $\gamma \in \mathcal{N}$ dont les composantes sont exactement les éléments de $\mathbb{N}\setminus A$. En particulier, $\gamma \notin N^1(A)$ (sinon $\gamma \preceq \eta$, ce qui est impossible par construction). Il existe donc une sous-suite γ_0 de γ telle que $\gamma_0 \in N^2(A)$. Cela implique que $\gamma_0 \preceq \xi$, ce qui est absurde car γ_0 n'a aucune composante commune avec ξ. Ainsi, quitte à redéfinir la suite η en lui adjoignant les éléments de $\mathbb{N}\setminus A$, on peut supposer que $A = \mathbb{N}$. Qui plus est, cette opération n'altère en rien le caractère maximum de η dans $N^1(A)$.
Ensuite, on peut montrer que $B := \{\eta_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ est aussi un ensemble fini. Si ce n'était pas le cas, alors il existerait un $\gamma \in \mathcal{N}$ qui serait à la fois sous-suite de η et de ξ, ce qui impliquerait que $\gamma \in N^1(A) \cap N^2(A)$, d'où absurdité. Dès lors, on peut redéfinir la suite ξ en lui retirant les composantes appartenant à B (ξ reste maximum dans $N^2(A)$). Par conséquent, les suites η et ξ ainsi obtenues répondent aux conditions de l'énoncé.
La condition est suffisante. Supposons que $\eta \in N^1(A)$ et $\xi \in N^2(A)$ vérifient

$$\mathbb{N} = \{\eta_n : n \in \mathbb{N}\} \uplus \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Montrons que η est maximum dans $N^1(A)$. On prouve alors de manière similaire que ξ est un élément maximum de $N^2(A)$. Soit $\gamma \in N^1(A)$. Nous devons prouver que $\gamma \preceq \eta$: on peut se contenter de montrer que $C := \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fini. Si ce n'est pas le cas, une nouvelle fois, cela implique qu'il existe un $\gamma_0 \in \mathcal{N}$ qui est sous-suite de γ et ξ simultanément : dès lors, $\gamma_0 \in N^1(A) \cap N^2(A)$, ce qui est absurde. □

Avant d'arriver au résultat qui nous intéresse au niveau de la classe de Dragilev, nous avons encore besoin de deux caractérisations concernant la dimension diamétrale elle-même (qui reposeront donc essentiellement sur le théorème 2.4.1). Commençons par celle concernant la classe $\mathcal{K}^l_{1,3}$.

Proposition 2.6.11. *Soit $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS}$, avec $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$;

(ii) il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $]0,+\infty[$ *telle que*

$$\Delta\left(\lambda^l(A)\right) = k_\infty\left[\left(\left(\frac{\alpha_n}{a_k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right];$$

(iii) il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\Delta\left(\lambda^l(A)\right) = k_\infty\left[\left(\left(\frac{a_{j_0}(n)}{a_k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right].$$

Démonstration. Le point (i) implique le point (iii). Si $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$, alors il existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver un $m \in \mathbb{N}$ pour lequel on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k^2(n)}{a_m(n)a_{j_0}(n)} = 0.$$

Prouvons l'égalité du point (iii). Pour simplifier les notations, on va poser

$$A' := \left(\left(\frac{a_{j_0}(n)}{a_k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Soit $\xi \in k_\infty(A')$. Par définition, cela signifie qu'il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{a_{j_0}(n)}{a_{k_0}(n)}\xi_n\right| < +\infty.$$

Fixons ensuite $k \in \mathbb{N}$. Or, pour $k' := \sup\{k, k_0\}$, on sait qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq k$ et tel que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{k'}^2(n)}{a_m(n)a_{j_0}(n)}\right) = 0$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{a_k(n)}{a_m(n)}|\xi_n| = \frac{a_k(n)a_{k_0}(n)}{a_m(n)a_{j_0}(n)}\left(\frac{a_{j_0}(n)}{a_{k_0}(n)}|\xi_n|\right) \leq C\frac{a_{k'}^2(n)}{a_m(n)a_{j_0}(n)}.$$

Cela prouve que $\xi \in \Delta(\lambda^l(A))$.
Supposons maintenant que $\xi \in \Delta(\lambda^l(A))$. Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq j_0$) tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{j_0}(n)}{a_k(n)}\xi_n\right) = 0.$$

Donc $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{a_{j_0}(n)}{a_k(n)}\xi_n\right| < +\infty$. Cela prouve ainsi que $\xi \in k_\infty(A')$.
Le point (iii) implique le point (ii). C'est direct.
Le point (ii) implique le point (i). Supposons qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $]0,+\infty[$ vérifiant

$$\Delta\left(\lambda^l(A)\right) = k_\infty\left[\left(\left(\frac{\alpha_n}{a_k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right].$$

Comme $\lambda^l(A)$ est un espace de Schwartz, la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\Delta(\lambda^l(A))$. Cela signifie donc qu'il existe un $j \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n/a_j(n)) < +\infty$. Notons C cette borne supérieure. Alors, on a $\alpha_n \leq Ca_j(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ensuite, fixons $k \in \mathbb{N}$. On sait, vu notre hypothèse, que la suite $(a_k(n)/\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\Delta(\lambda^l(A))$. Par conséquent, on peut trouver un $m \in \mathbb{N}$ (avec $m \geq k$) tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_k(n)}{\alpha_n}\frac{a_k(n)}{a_m(n)}\right) = 0.$$

Cela implique dès lors que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_k^2(n)}{a_j(n)a_m(n)} = 0.$$

On a ainsi montré que $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$, ce qui mène à la conclusion. □

On obtient ensuite la caractérisation au niveau de la classe $\mathcal{K}^l_{3,1}$. Cette caractérisation est bien plus complexe à obtenir que la précédente, malgré leur similitude. Nous avons besoin de théories plus sophistiquées, et c'est pourquoi nous renvoyons le lecteur intéressé à [8] (théorème 4') et [9] (lemme 6).

Proposition 2.6.12. *Soit $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}_{RS}$, avec $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{3,1}$;

(ii) il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $]0,+\infty[$ telle que

$$\Delta\left(\lambda^l(A)\right) = \lambda_0\left[\left(\left(\frac{a_k(n)}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right];$$

(iii) il existe une suite $(j_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N}$ telle que

$$\Delta\left(\lambda^l(A)\right) = \lambda_0\left[\left(\left(\frac{a_k(n)}{a_{j_n}(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right].$$

Démonstration. Résultat admis. □

Nous pouvons enfin passer au théorème qui nous intéresse. La démonstration associée est basée sur celle développée dans [9].

Théorème 2.6.1. *La dimension diamétrale est un invariant linéaire topologique complet sur la classe de Dragilev $\mathcal{D}^l$.*

Démonstration. Comme la classe de Dragilev est constituée de trois classes disjointes, nous allons devoir passer en revue six situations différentes. Dans cet objectif, fixons $\lambda^l(A)$ et $\lambda^l(B)$ deux éléments de $\mathcal{D}^l$, avec $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda^l(A),\ \lambda^l(B) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$, alors il existe des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $]0,+\infty[$ telles que

$$\Delta\left(\lambda^l(A)\right) = k_\infty\left[\left(\left(\frac{\alpha_n}{a_k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right] \text{ et } \Delta\left(\lambda^l(B)\right) = k_\infty\left[\left(\left(\frac{\beta_n}{b_k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right]$$

par la proposition 2.6.11. Notons respectivement par A' et B' les matrices

$$\left(\left(\frac{a_k(n)}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(\left(\frac{b_k(n)}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Supposons maintenant que $\Delta(\lambda^l(A)) = \Delta(\lambda^l(B))$. Dès lors, $\lambda^l(A') = \lambda^l(B')$ algébriquement et topologiquement par le lemme 1.3.1. Comme on vérifie aisément que les espaces $\lambda^l(A)$ et $\lambda^l(A')$ sont isomorphes, tout comme les espaces $\lambda^l(B)$ et $\lambda^l(B')$, on en déduit que les espaces $\lambda^l(A)$ et $\lambda^l(B)$ sont eux-mêmes isomorphes.

(ii) Supposons que $\lambda^l(A),\ \lambda^l(B) \in \mathcal{K}^l_{3,1}$ et qu'ils ont la même dimension diamétrale. En utilisant la propriété 2.6.12 et en procédant comme au point précédent, on montre que ces deux espaces sont isomorphes.

(iii) Supposons que $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$ et que $\lambda^l(B) \in \mathcal{K}^l_{3,1}$. Dans ce cas, on sait que ces deux espaces ne sont pas isomorphes. De plus, il ne peuvent pas posséder la même dimension diamétrale au vu du lemme 2.5.1.

(iv) Supposons que $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$ et que $\lambda^l(B) \in \mathcal{K}^l_{1,1}$ et montrons qu'ils ne peuvent pas posséder la même dimension diamétrale. Procédons par l'absurde et supposons au contraire qu'ils ont même dimension diamétrale. Au vu de la proposition 2.6.10, il existe $\eta \in N^1(B)$ et $\mu \in N^2(B)$ vérifiant

$$\mathbb{N} = \{\eta_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Considérons les deux matrices de Köthe régulières définies par $A' := ((a_k(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ et $B' := ((b_k(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$. Montrons alors que $\Delta(\lambda^l(A')) = \Delta(\lambda^l(B'))$. Soit $\xi' \in \Delta(\lambda^l(A'))$. Dès lors, on définit la suite ξ par

$$\xi_n := \begin{cases} \xi'_m \text{ si } n = \mu_m \text{ pour } m \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ si } n \notin \{\mu_m : m \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

lorsque $n \in \mathbb{N}$. On vérifie sans difficulté que $\xi \in \Delta(\lambda^l(A))$. Par hypothèse, cela implique que $\xi \in \Delta(\lambda^l(B))$, donc $\xi' \in \Delta(\lambda^l(B'))$. On a par conséquent $\Delta(\lambda^l(A')) \subset \Delta(\lambda^l(B'))$, l'autre inclusion s'obtenant de manière totalement similaire.
On arrive dès lors à une contradiction, car $\lambda^l(A') \in \mathcal{K}^l_{1,3}$ et $\lambda^l(B') \in \mathcal{K}^l_{3,1}$ (voir le point (iii)).

(v) Si $\lambda^l(A) \in \mathcal{K}^l_{1,1}$ et que $\lambda^l(B) \in \mathcal{K}^l_{3,1}$, on montre comme au point précédent que ces deux espaces ne peuvent pas avoir la même dimension diamétrale.

(vi) Considérons enfin le cas où $\lambda^l(A),\ \lambda^l(B) \in \mathcal{K}^l_{1,1}$ et où ces espaces ont même dimension diamétrale. On va procéder d'une manière similaire au point (iv). Par la proposition 2.6.10, on peut trouver des suites $\eta^{(A)} \in N^1(A)$, $\mu^{(A)} \in N^2(A)$ ainsi que des suites $\eta^{(B)} \in N^1(B)$, $\mu^{(B)} \in N^2(B)$ vérifiant

$$\mathbb{N} = \{\eta^{(A)}_n : n \in \mathbb{N}\} \uplus \{\mu^{(A)}_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ et } \mathbb{N} = \{\eta^{(B)}_n : n \in \mathbb{N}\} \uplus \{\mu^{(B)}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Posons

$$C_{1,1} := \{\eta^{(A)}_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{\eta^{(B)}_n : n \in \mathbb{N}\},\ C_{1,2} := \{\eta^{(A)}_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{\mu^{(B)}_n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$C_{2,1} := \{\mu^{(A)}_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{\eta^{(B)}_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ et } C_{2,2} := \{\mu^{(A)}_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{\mu^{(B)}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Montrons d'abord que les ensembles $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$ sont finis. En effet, si $C_{1,2}$ n'est pas un ensemble fini, alors il existe $\gamma \in \mathcal{N}$ tel que $C_{1,2} = \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dans ce cas, posons $A_\gamma := ((a_k(\gamma_n))_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ et $B_\gamma := ((b_k(\gamma_n))_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$. Comme les dimensions diamétrales de $\lambda^l(A)$ et $\lambda^l(B)$ sont égales par hypothèse, alors on obtient $\Delta(\lambda^l(A_\gamma)) = \Delta(\lambda^l(B_\gamma))$ par le même raisonnement que celui employé au point (iv). D'où une absurdité car $\lambda^l(A_\gamma) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$ et $\lambda^l(B_\gamma) \in \mathcal{K}^l_{3,1}$.
On montre de même que $C_{2,1}$ est un ensemble fini. Ainsi, quitte à redéfinir les suites $\eta^{(A)}$, $\mu^{(A)}$, $\eta^{(B)}$ et $\mu^{(B)}$, on peut supposer $C_{1,2} = C_{2,1} = \emptyset$. Cela implique donc que $\mathbb{N} = C_{1,1} \cup C_{2,2}$. Dès lors, on a $\left\{\eta^{(A)}_n : n \in \mathbb{N}\right\} \subset C_{1,1} \cup C_{2,2}$ et, comme $\left\{\eta^{(A)}_n : n \in \mathbb{N}\right\} \cap C_{2,2} = \emptyset$, cela prouve que $\left\{\eta^{(A)}_n : n \in \mathbb{N}\right\} \subset C_{1,1}$ et donc que $\eta^{(A)}$ est une sous-suite de $\eta^{(B)}$. Par symétrie, $\eta^{(B)}$ est une sous-suite de $\eta^{(A)}$ et donc $\eta^{(A)} = \eta^{(B)}$. Notons η cette dernière suite. Ensuite, on montre de façon identique que $\mu^{(A)} = \mu^{(B)}$ et on note cette suite μ. Posons

$$A_\eta := ((a_k(\eta_n))_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}} \text{ et } B_\eta := ((b_k(\eta_n))_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}.$$

De même, on écrit

$$A_\mu := ((a_k(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}} \text{ et } B_\mu := ((b_k(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Comme au point (iv), on prouve que $\Delta(\lambda^l(A_\eta)) = \Delta(\lambda^l(B_\eta))$ et $\Delta(\lambda^l(A_\mu)) = \Delta(\lambda^l(B_\mu))$. Or, il est clair que $\lambda^l(A_\eta), \lambda^l(B_\eta) \in \mathcal{K}^l_{1,3}$ et que $\lambda^l(A_\mu), \lambda^l(B_\mu) \in \mathcal{K}^l_{3,1}$. Dès lors, en appliquant les propositions 2.6.11 et 2.6.12 et en raisonnant comme aux points (i) et (ii), on peut trouver des suites $\alpha^{(\eta)}$, $\beta^{(\eta)}$, $\alpha^{(\mu)}$ et $\beta^{(\mu)}$ de $]0, +\infty[$ telles que

$$\lambda^l\left[\left(\left(\frac{a_k(\eta_n)}{\alpha^{(\eta)}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right] = \lambda^l\left[\left(\left(\frac{b_k(\eta_n)}{\beta^{(\eta)}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right]$$

et

$$\lambda^l\left[\left(\left(\frac{a_k(\mu_n)}{\alpha_n^{(\mu)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right]=\lambda^l\left[\left(\left(\frac{b_k(\mu_n)}{\beta_n^{(\mu)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right].$$

Cela implique ainsi que les matrices $\left(\left(\frac{a_k(\eta_n)}{\alpha_n^{(\eta)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left(\frac{b_k(\eta_n)}{\beta_n^{(\eta)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, tout comme les matrices $\left(\left(\frac{a_k(\mu_n)}{\alpha_n^{(\mu)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left(\frac{b_k(\mu_n)}{\beta_n^{(\mu)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. En définissant les suites α et β par

$$\alpha_n:=\begin{cases}\alpha_m^{(\eta)} \text{ si } n=\eta_m \text{ pour un } m\in\mathbb{N}\\ \alpha_m^{(\mu)} \text{ si } n=\mu_m \text{ pour un } m\in\mathbb{N}\end{cases}$$

et

$$\beta_n:=\begin{cases}\beta_m^{(\eta)} \text{ si } n=\eta_m \text{ pour un } m\in\mathbb{N}\\ \beta_m^{(\mu)} \text{ si } n=\mu_m \text{ pour un } m\in\mathbb{N},\end{cases}$$

alors on obtient

$$\lambda^l\left[\left(\left(\frac{a_k(n)}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right]=\lambda^l\left[\left(\left(\frac{b_k(n)}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right]$$

algébriquement et topologiquement. Comme au point (i), cela prouve que $\lambda^l(A)$ et $\lambda^l(B)$ sont isomorphes. D'où la conclusion.

$\square$

Remarque 2.6.1. Il est également possible de montrer que la classe de Dragilev est en quelque sorte une classe maximale sur laquelle la dimension diamétrale est complète, en ce sens que si $(j,k)\in\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}\setminus\{(1,1),(1,3),(3,1)\}$ alors la dimension diamétrale n'est pas complète sur $\mathcal{D}^l\cup\mathcal{K}_{j,k}^l$. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [9].

Enfin, comparons les résultats obtenus au niveau des espaces de séries de puissances et de la classe de Dragilev. On a vu que deux espaces de séries de puissances (associés à l) possédant la même dimension diamétrale coïncident topologiquement et algébriquement. Or, dans le théorème concernant la classe de Dragilev associée à l, on vient de voir que deux espaces de cette classe possédant la même dimension diamétrale sont isomorphes. Ainsi, il est plus intéressant d'employer le résultat concernant les espaces de séries de puissances lorsque cela est possible plutôt que celui de Dragilev.

2.7 Espaces nucléaires et dimension diamétrale

Nous allons terminer le chapitre concernant la dimension diamétrale en considérant le cas des espaces nucléaires. Ces derniers peuvent également être caractérisés par leur dimension diamétrale. Pour ce faire, nous adopterons l'approche de Pietsch ([22]).

Dans la suite, si $(E,\|.\|_E)$ est un espace normé, on notera $\|.\|_{E'}$ la norme du dual fort de E :

$$\|.\|_{E'}:E'\to[0,+\infty[\,:e'\mapsto\sup\{|e'(x)|:x\in E,\|x\|_E\leq 1\}.$$

Plus généralement, si $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ sont deux espaces normés, on notera $\|.\|_{\mathrm{L}(E,F)}$ la norme

$$\|.\|_{\mathrm{L}(E,F)}:\mathrm{L}(E,F)\to[0,+\infty[\,:T\mapsto\sup\{\|T(x)\|_F:x\in E,\|x\|_E\leq 1\}$$

sur l'espace $\mathrm{L}(E,F)$ des applications linéaires et continues de E dans F.
Nous allons commencer par rappeler la notion d'applications nucléaires. La définition suivante est celle employée par Pietsch dans [22]. Pour une définition plus "classique", le lecteur peut par exemple consulter [16].

Définition 2.7.1. Soient deux espaces normés $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$. Une application linéaire $T : E \to F$ est une *application nucléaire* s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E' et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|_{E'} \|y_n\|_F$ converge dans $\mathbb{C}$;

(ii) pour tout $x \in E$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)y_n$ converge dans F et on a

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)y_n.$$

On désigne par $\mathcal{R}(T)$ l'ensemble des couples (a, y) de $(E')^{\mathbb{N}} \times (F)^{\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions de la définition. On pose alors

$$\nu_{E,F}(T) = \inf_{(a,y)\in\mathcal{R}(T)} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|_{E'} \|y_n\|_F \right\}.$$

Lorsque E et F sont fixés et contextuellement connus, on écrira simplement ce nombre $\nu(T)$. En outre, on désignera par $\mathcal{N}(E, F)$ l'ensemble des applications nucléaires de E dans F. On vérifie sans difficulté que $\mathcal{N}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E, F)$ et que ν est une norme sur $\mathcal{N}(E, F)$ telle que, pour tout $T \in \mathcal{N}(E, F)$, on a

$$\|T\|_{\mathrm{L}(E,F)} \le \nu(T).$$

Nous ne passerons pas en revue toutes les propriétés des applications nucléaires. Notons néanmoins la propriété suivante.

Proposition 2.7.1. *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ trois espaces normés.*

(i) Si $T \in \mathcal{N}(E, F)$ et si $S \in \mathrm{L}(F, G)$, alors $S \circ T \in \mathcal{N}(E, G)$ et on a

$$\nu_{E,G}(S \circ T) \le \|S\|_{\mathrm{L}(F,G)}\ \nu_{E,F}(T).$$

(ii) Si $T \in \mathrm{L}(E, F)$ et si $S \in \mathcal{N}(F, G)$, alors $S \circ T \in \mathcal{N}(E, G)$ et on a

$$\nu_{E,G}(S \circ T) \le \nu_{F,G}(S)\ \|T\|_{\mathrm{L}(E,F)}.$$

Démonstration. (i) Soit $(a, y) \in \mathcal{R}(T)$. Alors on a $(S \circ T)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)S(y_n)$ si $x \in E$ et il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|_{E'} \|S(y_n)\|_G \le \|S\|_{\mathrm{L}(F,G)} \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|_{E'} \|y_n\|_F.$$

(ii) Soit $(a, y) \in \mathcal{R}(S)$. Dès lors, il est clair que $(S \circ T)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \circ T)(x)y_n$ si $x \in E$ et on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n \circ T\|_{E'} \|y_n\|_G \le \|T\|_{\mathrm{L}(E,F)} \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|_{F'} \|y_n\|_G.$$

□

Dans la suite, nous aurons besoin de certains autres outils pour étudier les espaces nucléaires. Nous allons les considérer maintenant.

Fixons $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces normés. Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}_n(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F dont l'image est de dimension inférieure ou égale à n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit alors l'application

$$\sigma_n : \mathrm{L}(E, F) \to [0, +\infty[\ : T \mapsto \inf \left\{ \|T - T_0\|_{\mathrm{L}(E,F)} : T_0 \in \mathcal{F}_n(E, F) \right\}.$$

On vérifie sans peine que, si $T \in \mathrm{L}(E,F)$, alors $\sigma_0(T) = \|T\|_{\mathrm{L}(E,F)}$ et que $\sigma_n(T) \geq \sigma_{n+1}(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Parmi les grands résultats concernant ces applications de rang fini (i.e. dont l'image est de dimension finie), on peut citer le lemme d'Auerbach. Ce dernier s'avèrera utile pour borner le nombre $\sigma_n(T)$ défini ci-dessus au moyen de diamètres de Kolmogorov (cf. le lemme 2.7.2).

La démonstration de ce lemme est extraite de [16] et [22].

Théorème 2.7.1 (Lemme d'Auerbach)**.** *Soit G un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}_0$ de l'espace normé E. Dans ce cas, il existe $a_1, ..., a_n \in E'$ et $y_1, ..., y_n \in G$ tels que, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, on a $\|a_j\|_{E'} = \|y_j\|_E = 1$ et tels que, pour tous $j, k \in \{1, ..., n\}$ et tout $x \in G$, on a*

$$a_j(y_k) = \delta_{j,k} \text{ et } x = \sum_{m=1}^{n} a_m(x) y_m.$$

Démonstration. Soit $\{z_1, ..., z_n\}$ une base de G et notons B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 de $(E')^n$, pour la norme $\|.\|_{(E')^n} : (E')^n \to [0, +\infty[\, : (x_1, ..., x_n) \mapsto \sup \{\|x_1\|_{E'}, ..., \|x_n\|_{E'}\}$. Considérons également l'application continue

$$f : (E')^n \to [0, +\infty[\, : (b_1, ..., b_n) \mapsto \left| \det \left((b_j(z_k))_{j,k \in \{1,...,n\}} \right) \right|.$$

Comme B est compact, l'application f admet un maximum $(a_1, ..., a_n)$ sur B. En particulier, on a $f(a_1, ..., a_n) > 0$. Sinon, cela signifie que f est nul sur B. Dès lors, pour $j \in \{1, ..., n\}$, considérons l'application linéaire continue $c_j : G \to \mathbb{C} : \lambda_1 z_1 + ... + \lambda_n z_n \mapsto \lambda_j$ et prenons $C_j : E \to \mathbb{C}$ une extension linéaire continue de c_j à E (par le théorème de Hahn-Banach). Par conséquent, on a

$$0 = f\left(\frac{C_1}{\|C_1\|_{E'}}, ..., \frac{C_n}{\|C_n\|_{E'}} \right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\|C_j\|_{E'}},$$

d'où une contradiction.
Cela implique que le système

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z_k) y_j = z_k \quad (k \in \{1, ..., n\})$$

admet des solutions uniques $y_1, ..., y_n \in G$.
En particulier, si $k, m \in \{1, ..., n\}$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_j(z_k) a_m(y_j) = a_m(z_k)$, ou encore

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z_k) \left(a_m(y_j) - \delta_{j,m} \right) = 0.$$

Dès lors, $a_m(y_j) = \delta_{j,m}$ lorsque $j, m \in \{1, ..., n\}$.
En outre, si $(b_1, ..., b_n) \in B$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_j(z_k) b_m(y_j) = b_m(z_k)$ pour tous $k, m \in \{1, ..., n\}$, ce qui nous donne

$$f(a_1, ..., a_n) \left| \det \left((b_j(y_k))_{j,k \in \{1,...,n\}} \right) \right| = f(b_1, ..., b_n).$$

Dès lors, on a $\left| \det \left((b_j(y_k))_{j,k \in \{1,...,n\}} \right) \right| \leq 1$. Par conséquent, si $k \in \{1, ..., n\}$ et si $b \in E'$ est de norme inférieure ou égale à 1, l'inégalité précédente implique que $|b(y_k)| \leq 1$ (il suffit de prendre $b_j = a_j$ si $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{k\}$ et $b_k = b$).
Fixons $k \in \{1, ..., n\}$ et considérons l'application $c : > y_k <_l \to \mathbb{C} : \lambda y_k \mapsto \lambda \|y_k\|_E$. Il est facile de voir que cette application est linéaire, continue et vérifie $|c(.)| = \|.\|_E$ sur $> y_k <_l$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut trouver une extension linéaire et continue C de c à E tout entier telle que $|C(.)| \leq \|.\|_E$ sur E (i.e. $\|C\|_{E'} \leq 1$). Dès lors, vu ce qui précède, $\|y_k\|_E = |C(y_k)| \leq 1$.
Or, on sait que $\|a_k\|_{E'} \leq 1$. Puisque

$$1 = |a_k(y_k)| \leq \|a_k\|_{E'} \|y_k\|_E \leq 1,$$

on doit avoir $\|a_k\|_{E'} = \|y_k\|_E = 1$.
Pour terminer cette preuve, montrons que les vecteurs $y_1, ..., y_n$ sont linéairement indépendants. C'est clair : en effet, si $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ sont tels que $\lambda_1 y_1 + ... + \lambda_n y_n = 0$, alors, pour $k \in \{1, ..., n\}$, il vient $0 = a_k(\lambda_1 y_1 + ... + \lambda_n y_n) = \lambda_k$.
Ainsi, si $x \in G$, il peut s'écrire sous la forme $x = \mu_1 y_1 + ... + \mu_n y_n$ ($\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{C}$) et on obtient $a_k(x) = \mu_k$ si $k \in \{1, ..., n\}$, ce qui mène à la conclusion. □

Considérons enfin la définition suivante.

Définition 2.7.2. Soit p un réel strictement positif. Une application $T \in \mathrm{L}(E, F)$ est une *application de type l_p* (ou une *application p-approximable*, en reprenant la terminologie de Jarchow [16]) si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sigma_n(T))^p$$

converge dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble des applications de E dans F de type l_p est noté $l_p(E, F)$.

Nous pouvons maintenant passer à la définition des espaces nucléaires. Dans la suite de cette section, on désignera par E un espace localement convexe sur $\mathbb{C}$ quelconque et par $\mathcal{V}(E)$ une base de voisinages absolument convexes de 0 dans E.
Nous allons commencer par introduire une nouvelle notation. Supposons que V est un voisinage absolument convexe de 0 dans E. On pose alors

$$E(V) := E/\ker p_V.$$

On munit alors l'ensemble $E(V)$ de la topologie définie par la norme

$$\|.\|_V : E(V) \to [0, +\infty[: [x]_V \mapsto p_V(x),$$

où $[x]_V$ désigne la classe de $x \in E$ dans $E(V)$. On notera en outre $\pi_V : E \to E(V)$ la projection associée à $E(V)$. Enfin, on emploiera le symbole B_V pour parler de la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 de $E(V)$.

Si U désigne un autre voisinage absolument convexe de 0 dans E pour lequel il existe un $\mu > 0$ tel que $U \subset \mu V$, on peut alors bien sûr définir l'application linéaire et continue

$$T_{U,V} : E(U) \to E(V) : [x]_U \mapsto [x]_V.$$

À propos de ces notations, remarquons qu'on a la propriété suivante. Celle-ci, bien qu'immédiate, sera très pratique par après.

Lemme 2.7.1. *Soient U et V deux voisinages absolument convexes de 0 dans E pour lesquels il existe un $\mu > 0$ tel que $U \subset \mu V$. Dans ce cas, on a*

(i) $B_U = \pi_U(B_{p_U})$;

(ii) $T_{U,V}(B_U) = \pi_V(B_{p_U})$,

où B_{p_U} désigne la semi-boule ouverte de E de centre 0 et de rayon 1 associée à la semi-norme p_U.

Définition 2.7.3. L'espace localement convexe E est qualifié d'*espace nucléaire* si, pour tout $V \in \mathcal{V}(E)$, il existe $U \in \mathcal{V}(E)$ tel que $U \subset V$ et tel que l'application $T_{U,V} : E(U) \to E(V)$ est nucléaire.

Remarque 2.7.1. On vérifie que cette définition est indépendante de la base de voisinages de 0 choisie. En effet, soit $\mathcal{U}(E)$ une autre base de voisinages absolument convexes de 0 dans E et soit $V_0 \in \mathcal{U}(E)$. On sait qu'il existe $V \in \mathcal{V}(E)$ tel que $V \subset V_0$. De plus, il existe $U \in \mathcal{V}(E)$ tel que l'application $T_{U,V}$ est nucléaire. Enfin, prenons $U_0 \in \mathcal{U}(E)$ tel que $U_0 \subset U$.
Comme bien sûr $T_{U_0,V_0} = T_{V,V_0} \circ T_{U,V} \circ T_{U_0,U}$ sur $E(U_0)$, on en déduit que l'application T_{U_0,V_0} est elle-même nucléaire par la proposition 2.7.1.

Notons au passage le lien existant entre espaces nucléaires et espaces de Schwartz.

Proposition 2.7.2. *Tout espace nucléaire est de Schwartz.*

Démonstration. Supposons que E est un espace nucléaire et soit $V \in \mathcal{V}(E)$. On sait qu'il existe $U \in \mathcal{V}(E)$ tel que $U \subset V$ et tel que l'application $T_{U,V} : E(U) \to E(V)$ est nucléaire. Par conséquent, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(E(U))'$ ainsi qu'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|_{(E(U))'}\, p_V(y_n)$ converge dans $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $x \in E$,

$$T_{U,V}([x]_U) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n([x]_U)\,[y_n]_V.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|a_n\|_{(E(U))'}\, p_V(y_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $T_{U,V}([x]_U) = \sum_{n=0}^{N} a_n([x]_U)\,[y_n]_V + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n([x]_U)\,[y_n]_V$, on peut alors écrire grâce au lemme 2.7.1

$$\pi_V(B_{p_U}) \subset \frac{\varepsilon}{2}\pi_V(B_{p_V}) + \pi_V(F),$$

où on a posé $F :=> y_0, ..., y_N <_l$. Cela implique que

$$B_{p_U} \subset \frac{\varepsilon}{2}B_{p_V} + F + \ker p_V \subset \frac{\varepsilon}{2}B_{p_V} + F \subset \frac{\varepsilon}{2}V + F.$$

Donc, on a $\delta_N(B_{p_U}, V) \leq \varepsilon/2$ et $\delta_N(U,V) \leq \delta_N(2B_{p_U}, V) \leq \varepsilon$.
Ainsi, par décroissance, la suite $(\delta_n(U,V))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, ce qui donne la conclusion par le théorème 2.3.1. □

Pietsch ([22]) démontre alors la caractérisation suivante, qui s'avère très utile pour la suite.

Théorème 2.7.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est nucléaire ;*

(ii) *pour tout $p > 0$ et tout $V \in \mathcal{V}(E)$, il existe $U \in \mathcal{V}(E)$ avec $U \subset V$ et pour lequel l'application $T_{U,V} : E(U) \to E(V)$ est de type l_p ;*

(iii) *il existe $p > 0$ tel que, pour tout $V \in \mathcal{V}(E)$, il existe $U \in \mathcal{V}(E)$ avec $U \subset V$ et pour lequel l'application $T_{U,V} : E(U) \to E(V)$ est de type l_p.*

Démonstration. Résultat admis. □

Nous avons besoin de plusieurs résultats pour obtenir la caractérisation des espaces nucléaires en fonction de leur dimension diamétrale. Voici un premier lemme.

Lemme 2.7.2. *Soient $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ deux espaces normés et soient respectivement B_F et B_G les boules ouvertes de centre 0 et de rayon 1 de F et de G. Soient également $T \in \mathrm{L}(F,G)$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a*

$$\delta_n(T(B_F), B_G) \leq \sigma_n(T) \leq (n+1)\delta_n(T(B_F), B_G).$$

Démonstration. a) Montrons la première inégalité. Prenons un $T_0 \in \mathcal{F}_n(F,G)$ quelconque. Comme bien sûr $T(B_F) \subset \|T - T_0\|_{\mathrm{L}(F,G)} B_G + T_0(F)$, on a $\delta_n(T(B_F), B_G) \leq \|T - T_0\|_{\mathrm{L}(F,G)}$, ce qui mène à la conclusion.

b) Prouvons la seconde inégalité. Fixons $\delta > 0$ ainsi que $H \in \mathcal{L}_n(G)$ tels que $T(B_F) \subset \delta B_G + H$. Désignons par m la dimension de H.
Supposons dans un premier temps que $m = 0$. Si $x \in B_F$, alors $T(x) = \delta z$ pour un $z \in B_G$ et alors $\|T(x)\|_G < \delta \leq (n+1)\delta$. D'où $\sigma_n(T) \leq (n+1)\delta$.
Supposons ensuite que $m > 0$. Par le lemme d'Auerbach (théorème 2.7.1), on peut trouver $a_1, ..., a_m \in G'$, $y_1, ..., y_m \in H$ tels que, pour tout $j \in \{1, ..., m\}$, on a $\|a_j\|_{G'} = \|y_j\|_G = 1$ et tels que, pour tous $j, k \in \{1, ..., m\}$ et tout $x \in H$, on a

$$a_j(y_k) = \delta_{j,k} \text{ et } x = \sum_{l=1}^{m} a_l(x) y_l.$$

Soit l'application $P : G \to H : x \mapsto \sum_{l=1}^{m} a_l(x) y_l$ et posons $S := P \circ T$. Bien sûr, on a $S \in \mathcal{F}_n(F, G)$. Qui plus est, si $x \in B_F$, alors il existe $z \in B_G$ et $h \in H$ tel que $T(x) = \delta z + h$. En appliquant P aux deux membres de cette égalité, on obtient $S(x) = \delta P(z) + h$ (car $P(h) = h$), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \|T(x) - S(x)\|_G &= \delta \|z - P(z)\|_G \\ &= \delta \left\| z - \sum_{l=1}^{m} a_l(z) y_l \right\|_G \\ &\leq \delta \left(\|z\|_G + \sum_{l=1}^{m} \|a_l\|_{G'} \|z\|_G \|y_l\|_G \right) \\ &\leq \delta(n+1). \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a $\sigma_n(T) \leq (n+1)\delta$. D'où la conclusion. □

Reprenons l'étude de l'espace localement convexe E.

Lemme 2.7.3. *Si U et V sont deux voisinages absolument convexes de 0 dans E tels que $U \subset \mu V$ (pour un $\mu > 0$), alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\delta_n \left(T_{U,V}(B_U), B_V\right) = \delta_n(U, V).$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Dès lors, on a, grâce au lemme 2.7.1,

$$\begin{aligned} \delta_n(T_{U,V}(B_U), B_V) &= \delta_n(\pi_V(B_{p_U}), \pi_V(B_{p_V})) \\ &\leq \delta_n(B_{p_U}, B_{p_V}) \\ &\leq \delta_n\left(U, \frac{1}{1+\varepsilon} V\right) \\ &\leq (1+\varepsilon)\delta_n(U, V). \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite pour $\varepsilon \to 0^+$, on a $\delta_n(T_{U,V}(B_U), B_V) \leq \delta_n(U, V)$. Il ne nous reste plus qu'à prouver l'inégalité inverse. Prenons $\delta > 0$ et $F \in \mathcal{L}_n(E)$ tels que

$$T_{U,V}(B_U) \subset \delta B_V + \pi_V(F).$$

En appliquant de nouveau le lemme 2.7.1, on trouve $\pi_V(B_{p_U}) \subset \pi_V(\delta B_{p_V} + F)$, ou encore

$$B_{p_U} \subset \delta B_{p_V} + F + \ker p_V \subset \delta B_{p_V} + F.$$

Dès lors, on a l'inégalité $\delta_n(B_{p_U}, V) \leq \delta$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a évidemment $\delta_n(U, V) \leq \delta_n((1+\varepsilon) B_{p_U}, V) \leq (1+\varepsilon)\delta$. En passant à la limite pour $\varepsilon \to 0^+$, on obtient la conclusion. □

En rassemblant les informations collectées dans les deux lemmes précédents, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.7.1. *Si U et V sont deux voisinages absolument convexes de 0 dans E tels que $U \subset \mu V$ (pour un $\mu > 0$), alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\delta_n(U,V) \leq \sigma_n(T_{U,V}) \leq (n+1)\delta_n(U,V).$$

On peut désormais considérer la caractérisation des espaces nucléaires en fonction de leur dimension diamétrale ([16],[22]).

Théorème 2.7.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'espace localement convexe E est nucléaire ;

(ii) pour tout $p > 0$, on a

$$\left((n+1)^p\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta(E);$$

(iii) il existe $p > 0$ tel que

$$\left((n+1)^p\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta(E).$$

Démonstration. Le point (i) implique le point (ii). Supposons que E est un espace nucléaire et fixons $p > 0$ ainsi que $V \in \mathcal{V}(E)$. Par le théorème 2.7.2, on peut trouver $U \in \mathcal{V}(E)$ tel que $U \subset V$ et tel que l'application $T_{U,V} : E(U) \to E(V)$ est de type $1/(2p)$. Vu le corollaire précédent, si $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$(n+1)\delta_n(U,V)^{\frac{1}{2p}} \leq \sum_{k=0}^{n} \delta_k(U,V)^{\frac{1}{2p}} \leq \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(T_{U,V})^{\frac{1}{2p}} \leq C,$$

où l'on a posé $C := \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_k(T_{U,V})^{\frac{1}{2p}}$. Cela implique que $(n+1)^{2p}\delta_n(U,V) \leq C^{2p}$. Ainsi, on vient de montrer que $\left((n+1)^{2p}\delta_n(U,V)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, donc

$$\left((n+1)^p\delta_n(U,V)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0,$$

et $\left((n+1)^p\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta(E)$.

Le point (ii) implique trivialement le point (iii).

Le point (iii) implique le point (i). Prenons $p > 0$ tel $\left((n+1)^p\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta(E)$. Fixons $V \in \mathcal{V}(E)$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $mp \geq 3$. On pose alors $V_0 := V$ et on définit $V_1, ..., V_m \in \mathcal{V}(E)$ tels que $V_m \subset V_{m-1} \subset ... \subset V_1 \subset V_0$ et $\left((n+1)^p\delta_n(V_{k+1},V_k)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ si $k \in \{0, ..., m-1\}$. On peut alors bien sûr supposer que, pour un tel k, on a

$$\delta_n(V_{k+1},V_k) \leq \frac{1}{(n+1)^p}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le lemme 2.1.3, on a dès lors

$$\delta_{mn}(V_m,V_0) \leq \prod_{k=1}^{m} \delta_n(V_k,V_{k-1}) \leq \frac{1}{(n+1)^{mp}} \leq \frac{1}{(n+1)^3}$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m$ et prenons $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $mk < n+1 \leq m(k+1)$. Dans cette situation, on a bien sûr $\delta_n(V_m,V) \leq \delta_{mk}(V_m,V) \leq \frac{1}{(k+1)^3} \leq \left(\frac{m}{n+1}\right)^3$.
En posant $U := V_m$ et en tenant compte des informations que nous venons de rassembler, on

obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n(T_{U,V}) &= \sum_{n=0}^{m-1}\sigma_n(T_{U,V}) + \sum_{n=m}^{+\infty}\sigma_n(T_{U,V})\\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1}\sigma_n(T_{U,V}) + \sum_{n=m}^{+\infty}(n+1)\delta_n(U,V)\\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1}\sigma_n(T_{U,V}) + m^3\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\\ &< +\infty,\end{aligned}$$

en vertu du corollaire précédent. Par conséquent, $T_{U,V}$ est une application de type l_1 et, par le théorème 2.7.2, on conclut que E est un espace nucléaire. □

Comme le fait remarquer Vogt ([32]), ce résultat peut être réécrit de la façon suivante.

Corollaire 2.7.2. *L'espace localement convexe E est nucléaire si et seulement si $\Delta(s) \subset \Delta(E)$. En particulier, l'espace s des suites à décroissance rapide est nucléaire et de dimension diamétrale minimale pour l'inclusion parmi la classe des dimensions diamétrales des espaces nucléaires.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et du corollaire 2.5.3. □

En appliquant ces résultats, il est par exemple facile de voir les espaces $\mathcal{O}(D(0,1))$ et $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ sont nucléaires.
Il est également possible d'exprimer la nucléarité d'un espace localement convexe grâce aux diamètres de Kolmogorov.

Théorème 2.7.4. *L'espace localement convexe E est nucléaire si et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(E)$, il existe $U \in \mathcal{V}(E)$ tel que $U \subset V$ et tel que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\delta_n(U,V)$$

converge dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Si E est nucléaire et si $V \in \mathcal{V}(E)$, alors on peut trouver $U \in \mathcal{V}(E)$ tel que $U \subset V$ et pour lequel l'application $T_{U,V} : E(U) \to E(V)$ est de type l_1, vu le théorème 2.7.2. Dès lors, par le corollaire 2.7.1, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\delta_n(U,V) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n(T_{U,V}) < +\infty.$$

La condition est suffisante. On peut se contenter de montrer que la suite $\big((n+1)^{1/2}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\Delta(E)$. Fixons $V \in \mathcal{V}(E)$. On peut trouver un $U \in \mathcal{V}(E)$ inclus dans V tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\delta_n(U,V)$ converge dans $\mathbb{R}$. Notons L la limite de cette série. Dans ce cas, il vient

$$(n+1)\delta_n(U,V) \leq \sum_{m=0}^{n}\delta_m(U,V) \leq L$$

lorsque $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $(n+1)^{1/2}\delta_n(U,V) \leq L/(n+1)^{1/2}$. Cela mène à la conclusion. □

On peut appliquer la théorie précédente à l'étude des espaces de suites de Köthe nucléaires. Comme de coutume, nous fixons un ensemble de Köthe A et un espace admissible $(l, \|.\|_l)$.

Théorème 2.7.5. *L'espace $\lambda^l(A)$ est nucléaire si et seulement si, pour tout $\alpha \in A$, il existe $\beta \in A$ avec $\alpha_n \leq \beta_n$ tel que la suite α/β est un élément de l_1.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons que $\lambda^l(A)$ est nucléaire et fixons $\alpha \in A$. Si α est à support fini, alors la suite α/α appartient à l_1. Si α est à support infini, alors, par le théorème précédent, on peut trouver $\beta \in A$, avec $\alpha_n \leq \beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha} \right)$$

converge dans $\mathbb{R}$. Remarquons que cela implique que $\left(\delta_n \left(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha} \right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ et par conséquent que $\alpha/\beta \in c_0$ (voir la démonstration du théorème 2.4.2). On conclut en remarquant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\pi(\alpha/\beta))_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha})$$

grâce à la proposition 2.4.3.
La condition est suffisante. On va prouver que si $\lambda^l(A)$ vérifie la propriété de l'énoncé, alors il est nucléaire. Fixons $\alpha \in A$. Si α est à support fini, alors bien sûr la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n(B_{p^l_\alpha}, B_{p^l_\alpha})$ converge dans $\mathbb{R}$. Si α est à support infini, prenons $\beta \in A$ tel que $\alpha_n \leq \beta_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha/\beta)_n$ converge dans $\mathbb{R}$. Comme au point précédent, on conclut en notant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n(B_{p^l_\beta}, B_{p^l_\alpha}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\pi(\alpha/\beta))_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n .$$

$\square$

Remarquons que cette propriété est indépendante de l. En outre, on peut donner le résultat suivant, dû à Terzioglu ([27]).

Proposition 2.7.3. *Si $\lambda^l(A)$ est un espace nucléaire, alors cet espace et sa topologie sont indépendants de l.*

Démonstration. Grâce à la proposition 1.2.2, on sait que

$$\lambda_1(A) \subset \lambda^l(A) \subset \lambda_\infty(A)$$

et que les injections $\lambda_1(A) \to \lambda^l(A)$ et $\lambda^l(A) \to \lambda_\infty(A)$ sont continues. Pour conclure, il suffit de montrer que $\lambda_\infty(A) \subset \lambda_1(A)$ et que l'injection $\lambda_\infty(A) \to \lambda_1(A)$ est continue.
Fixons $\alpha \in A$ et prenons $\beta \in A$ tel que $\alpha_n \leq \beta_n$ et tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha/\beta)_n$ converge dans $\mathbb{R}$. Dès lors, si $\xi \in \lambda_\infty(A)$, on a

$$p^1_\alpha(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |\xi_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n \beta_n |\xi_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n \right) p^\infty_\beta(\xi),$$

d'où $\xi \in \lambda_1(A)$. Cela nous donne la thèse. $\square$

On peut appliquer le théorème 2.7.5 au cas des espaces de séries de puissances. Cela donne la propriété suivante.

Proposition 2.7.4. *Soit α une suite croissante et non majorée de réels positifs et soient les matrices de Köthe*

$$A = \left(\left(e^{-\alpha_n/k} \right)_{n\in\mathbb{N}} \right)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad et\ A' = \left(\left(e^{k\alpha_n} \right)_{n\in\mathbb{N}} \right)_{k\in\mathbb{N}_0} .$$

Alors

(i) l'espace $\lambda^l(A)$ est nucléaire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a $\left(e^{-\alpha_n/k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$;

(ii) l'espace $\lambda^l(A')$ est nucléaire si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\left(e^{-m\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$.

Démonstration. (i) Supposons que $\lambda^l(A)$ est nucléaire et soit $k \in \mathbb{N}_0$. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $\left(e^{\alpha_n(1/(k+m)-1/k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$, vu la proposition 2.4.2. Donc $\left(e^{-\alpha_n/k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$.
Passons à la réciproque. Soit $k_0 \in \mathbb{N}_0$ et posons $m_0 = k_0$. Comme

$$e^{\alpha_n\left(\frac{1}{k_0+m_0}-\frac{1}{k_0}\right)} = e^{\frac{-\alpha_n}{2k_0}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, par hypothèse, $\left(e^{\alpha_n(1/(k_0+m_0)-1/k_0}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$. Donc $\lambda^l(A)$ est nucléaire par la proposition 2.4.2.

(ii) Cela découle directement de la proposition 2.4.2.

□

Terminons cette section par la construction d'un espace de Schwartz non nucléaire.

Exemple 2.7.1. Soit la matrice de Köthe

$$A = \left(\left((n+1)^{-1/k}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

On va considérer l'espace $\lambda_1(A)$. Le lecteur aura compris qu'il ne s'agit en fait que de l'espace de séries de puissances de type fini associé à la suite $(\ln(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ et à l'espace admissible l_1.
Cet espace est par conséquent de Schwartz. Par contre, il n'est pas nucléaire vu la proposition précédente. Il est en effet connu que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\ln(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 3

Les invariants (DN) et (Ω)

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux invariants (DN) et (Ω), dus à Vogt. Ceux-ci ont été définis dans le cadre des espaces de Fréchet. Après avoir introduit leurs définitions, nous donnerons quelques-unes de leurs propriétés et nous appliquerons les résultats au niveau des espaces de suites de Köthe.

Les développements suivants sont tirés de [20].

3.1 La propriété (DN)

Définition 3.1.1. Soit $(E, (p_k)_{k\in\mathbb{N}})$ un espace de Fréchet. On dit que E possède la *propriété* (DN) s'il existe un $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $m \in \mathbb{N}$ et un $C > 0$ tels que

$$p_k^2 \leq C p_K p_m$$

sur E. En conséquence, la semi-norme p_K est même une norme sur E. Elle est qualifiée de *norme dominante* de E.

En fait, l'appellation (DN) est l'acronyme de l'expression "norme dominante" (*dominating norm* en anglais).

Bien sûr, il faut vérifier si la définition présentée ci-dessus est bien indépendante du choix du système fondamental de semi-normes. En réalité, ce fait découle directement du premier point de la proposition suivante.

Proposition 3.1.1.

(i) La propriété (DN) est un invariant topologique, en ce sens que si $(E, (p_k)_{k\in\mathbb{N}})$ et $(F, (q_k)_{k\in\mathbb{N}})$ sont deux espaces de Fréchet isomorphes et si E vérifie la propriété (DN), alors F vérifie également la propriété (DN).

(ii) Tout sous-espace fermé d'un espace de Fréchet possédant la propriété (DN) possède lui-même la propriété (DN).

Démonstration. Le point (ii) est immédiat. Considérons donc le point (i). Supposons que

$$\Phi : E \to F$$

est un isomorphisme d'espaces de Fréchet. Prenons p_K une norme dominante de E. Dès lors, on sait qu'il existe $K_0 \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$p_K \circ \Phi^{-1} \leq C q_{K_0}$$

sur F. Pour conclure, il suffit de montrer que q_{K_0} constitue une norme dominante de F.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe $C_k > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que $q_k \circ \Phi \leq C_k p_{k_0}$ sur E. Prenons $m_0 \in \mathbb{N}$ et $D > 0$

tels que $p_{k_0}^2 \leq Dp_K p_{m_0}$ sur E. Enfin, prenons $m \in \mathbb{N}$ et $D_0 > 0$ tels que $p_{m_0} \circ \Phi^{-1} \leq D_0 q_m$ sur F. En rassemblant toutes les informations ainsi présentées, on obtient

$$\begin{aligned} q_k^2 &= \left(q_k \circ \Phi \circ \Phi^{-1}\right)^2 \\ &\leq C_k^2 \left(p_{k_0} \circ \Phi^{-1}\right)^2 \\ &\leq DC_k^2 \, \left(p_K \circ \Phi^{-1}\right)\left(p_{m_0} \circ \Phi^{-1}\right) \\ &\leq DC_k^2 (Cq_{K_0})(D_0 q_m) \\ &\leq \left(C_k^2 CDD_0\right) q_{K_0} q_m \\ &\leq C' q_{K_0} q_m \end{aligned}$$

sur F, où $C' := C_k^2 CDD_0$. D'où la conclusion. □

Nous allons maintenant considérer différents exemples d'espaces possédant ou non la propriété (DN). Le premier est tout à fait direct.

Exemple 3.1.1. Tout espace de Banach vérifie la propriété (DN).

On peut aussi s'intéresser aux espaces de suites de Köthe. On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 3.1.2. *Soit $(l, \|.\|_l)$ un espace admissible et soit $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une matrice de Köthe. Si l'espace $\lambda^l(A)$ possède la propriété (DN), alors il existe un $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $m \in \mathbb{N}$ et un $C > 0$ vérifiant*

$$a_k^2(n) \leq Ca_K(n)a_m(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Cela découle directement de la définition de la propriété (DN), en appliquant les semi-normes de $\lambda^l(A)$ aux différents vecteurs e_n $(n \in \mathbb{N})$. □

En général, on ne sait pas si la réciproque de cette propriété est vraie. Par contre, elle est connue dans le cas des espaces échelonnés de Köthe.

Proposition 3.1.3. *Soit $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une matrice de Köthe et soit $p \in [1, +\infty[$. Notons E l'un des trois espaces de Fréchet suivants : $\lambda_p(A)$, $\lambda_0(A)$ et $\lambda_\infty(A)$. Alors E possède la propriété (DN) si et seulement s'il existe un $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $m \in \mathbb{N}$ et un $C > 0$ vérifiant*

$$a_k^2(n) \leq Ca_K(n)a_m(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La condition est nécessaire au vu de la proposition précédente. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est suffisante. Supposons que $k, K, m \in \mathbb{N}$ ainsi que $C > 0$ vérifient l'inégalité $a_k^2(n) \leq Ca_K(n)a_m(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va procéder au cas par cas.

(1) Supposons que $E = \lambda_p(A)$. Dès lors, si $\xi \in E$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_k(n)|\xi_n|)^p &\leq \sqrt{C} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_K(n)|\xi_n|)^{p/2} (a_m(n)|\xi_n|)^{p/2} \\ &\leq \sqrt{C} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a_K(n)|\xi_n|)^p\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a_m(n)|\xi_n|)^p\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Donc $p_k(\xi)^2 \leq Cp_K(\xi)p_m(\xi)$, ce qui mène à la conclusion.

(2) Supposons que $E = \lambda_\infty(A)$. Si $\xi \in E$, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_k(n)|\xi_n|) &\leq \sqrt{C}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left((a_K(n)|\xi_n|)^{1/2}(a_m(n)|\xi_n|)^{1/2}\right)\\ &\leq \sqrt{C}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_K(n)|\xi_n|)\right)^{1/2}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_m(n)|\xi_n|)\right)^{1/2},\end{aligned}$$

ce qui mène une nouvelle fois à la conclusion.

(3) Supposons que $E = \lambda_0(A)$. Comme $\lambda_0(A)$ est un sous-espace fermé de $\lambda_\infty(A)$ et comme $\lambda_\infty(A)$ vérifie la propriété (DN) par le point (2), on sait qu'il en est de même pour $\lambda_0(A)$.

□

Le lecteur a peut-être discerné une certaine ressemblance entre cette caractérisation et la caractérisation de la classe $\mathcal{K}^l_{1,3}$ définie dans la section consacrée à la classe de Dragilev. Plus précisément, on a le résultat précédent.

Corollaire 3.1.1. *Désignons par l l'un des trois espaces admissibles suivants : l_p $(p \geq 1)$, l_∞ ou c_0. Alors tout espace de la classe $\mathcal{K}^l_{1,3}$ vérifie la propriété (DN).*

Démonstration. Cela découle directement de la proposition précédente et du corollaire 2.6.1. □

On peut également regarder ce qui se passe au niveau des espaces de séries de puissances.

Corollaire 3.1.2. *Un espace de séries de puissances de type fini ne possède jamais la propriété (DN). Par contre, un espace de séries de puissances de type infini associé à l_p $(p \geq 1)$, à l_∞ ou à c_0 vérifie la propriété (DN).*

Démonstration. La propriété concernant les espaces de séries de puissances de type infini découle du corollaire précédent et de la proposition 2.6.9. On peut donc passer au type fini.

Soit α une suite croissante et non majorée de réels positifs. Considérons la matrice de Köthe

$$A = \left(\left(e^{-\alpha_n/k}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$$

ainsi que l'espace $\lambda^l(A)$ (pour un espace admissible l quelconque). Montrons qu'il ne possède pas la propriété (DN). Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un $K \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe un $m_k \in \mathbb{N}_0$ et un $C > 0$ vérifiant

$$\left(e^{-\alpha_n/k}\right)^2 \leq Ce^{-\alpha_n/K}e^{-\alpha_n/m_k}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, on obtient $e^{-\alpha_n/K} \leq Ce^{-\alpha_n/K}e^{-\alpha_n/m_{2K}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en prenant $k = 2K$, ou encore

$$1 \leq Ce^{-\alpha_n/m_{2K}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où une absurdité car le second membre de cette inégalité converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. □

Grâce à différents résultats obtenus dans le précédent chapitre, on obtient les exemples suivants.

Exemples 3.1.1. Les espaces de Fréchet $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ et s possèdent la propriété (DN), mais pas l'espace $\mathcal{O}(D(0,1))$.

Terminons cette section par une caractérisation. Celle-ci permet de créer un parallélisme entre la propriété (DN) et la propriété (Ω) développée plus bas.

Proposition 3.1.4. *Soit $(E,(p_k)_{k\in\mathbb{N}})$ un espace de Fréchet. Alors E possède la propriété (DN) si et seulement s'il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $\theta\in]0,1[$, il existe $m\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que*

$$p_k \le C p_K^{1-\theta} p_m^{\theta}$$

sur E.

Démonstration. Cette propriété étant clairement suffisante, on va simplement montrer qu'elle est nécessaire. On peut alors supposer sans restriction que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de semi-normes sur E est croissante sur E. Comme E vérifie la propriété (DN), on peut se donner une norme dominante p_K de E. Prenons également un $k\in\mathbb{N}$. On a alors deux possibilités.

(1) Si $k\ge K$, on va définir une suite d'indices $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit. On pose $m_0 := K$ et $m_1 := k$. On sait qu'il existe $m\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tel que

$$p_k^2 \le C p_K p_m$$

sur E. On peux même supposer $m\ge k$. Dans ce cas, on pose $m_2 := m$ et $C_1 := C$. Par récurrence, on obtient la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de $]0,+\infty[$ vérifiant

a) $m_{n+1}\ge m_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

b) $p_{m_n}^2 \le C_n p_K p_{m_{n+1}}$ sur E pour tout $n\in\mathbb{N}_0$.

Ainsi, si $x\in E\setminus\{0\}$ et si $n\in\mathbb{N}_0$, il vient

$$\left(\frac{p_k(x)}{p_K(x)}\right)^n \le \prod_{j=1}^n \frac{p_{m_j}(x)}{p_K(x)} \le \prod_{j=1}^n C_j \frac{p_{m_{j+1}}(x)}{p_{m_j}(x)} = \left(\prod_{j=1}^n C_j\right)\frac{p_{m_{n+1}}(x)}{p_k(x)} \le \left(\prod_{j=1}^n C_j\right)\frac{p_{m_{n+1}}(x)}{p_K(x)}.$$

Posons $D_n := \left(\prod_{j=1}^n C_j\right)^{1/n}$. Par conséquent, sur E, on a

$$p_k \le D_n p_K^{1-1/n} p_{m_{n+1}}^{1/n}.$$

Ainsi, étant donné un $\theta\in]0,1[$, on prend $n\in\mathbb{N}_0$ tel que $1/n\le\theta$. Dès lors, si $x\in E\setminus\{0\}$, il vient

$$p_K^{1-1/n}(x)\; p_{m_{n+1}}^{1/n}(x) = p_K(x)\left(\frac{p_{m_{n+1}}(x)}{p_K(x)}\right)^{1/n} \le p_K(x)\left(\frac{p_{m_{n+1}}(x)}{p_K(x)}\right)^{\theta}.$$

Ainsi, on a $p_k \le D_n p_K^{1-\theta} p_{m_{n+1}}^{\theta}$ sur E.

(2) Si $k<K$ et si $\theta\in]0,1[$, alors on a bien sûr

$$p_k \le p_K^{1-\theta} p_K^{\theta}$$

sur E.

D'où la conclusion. □

Nous pouvons maintenant passer à la propriété (Ω).

3.2 La propriété (Ω)

Nous avons besoin dans la suite de la notion de polaire. Rappelons donc que si E est un espace localement convexe et si A est une partie non vide de E, on définit le polaire de A par

$$A^{\triangle} = \{e'\in E' : |e'(x)|\le 1\ \forall x\in A\}.$$

Dans le cas où A est un sous-espace vectoriel F de E, on a même

$$F^{\triangle} = \{e'\in E' : e'|_F = 0\}.$$

Ainsi, nous allons considérer les polaires de certains ensembles particuliers. Plus précisément, si $(E,(p_k)_{k\in\mathbb{N}})$ est un espace de Fréchet, nous allons considérer le polaire de

$$U_k := \{x \in E : x \in E,\ p_k(x) \leq 1\}$$

si $k \in \mathbb{N}$. Afin de simplifier les écritures, nous conserverons la notation U_k dans cette section pour désigner la semi-boule fermée de E de centre 0 et de rayon 1 associée à la semi-norme p_k.

Définition 3.2.1. Soit $(E,(p_k)_{k\in\mathbb{N}})$ un espace de Fréchet. Cet espace vérifie la *propriété* (Ω) si, pour tout $K \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ et $\theta \in]0,1[$ vérifiant

$$p_{U_k^\triangle} \leq C\left(p_{U_K^\triangle}\right)^{1-\theta}(p_{U_m^\triangle})^\theta$$

sur E', où, lorsque $n \in \mathbb{N}$, $p_{U_n^\triangle}$ est la semi-norme de jauge du polaire $U_n^\triangle$.

Insistons sur le fait que cette application $p_{U_n^\triangle}$ peut éventuellement prendre des valeurs infinies. De plus, si $e' \in E'$, on a

$$p_{U_n^\triangle}(e') = \inf\{\mu > 0 : e' \in \mu U_n^\triangle\} = \inf\{\mu > 0 : |e'|(U_n) \subset [0,\mu]\} = \sup\{|e'(x)| : x \in U_n\}.$$

Comme pour la propriété (DN), on vérifie que cette définition a bien un sens grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *La propriété* (Ω) *est un invariant topologique.*

Démonstration. Soit $(E,(p_k)_{k\in\mathbb{N}})$ un espace de Fréchet possédant la propriété (Ω). Comme annoncé, on reprend la notation U_k au niveau de E. Supposons que $(F,(q_k)_{k\in\mathbb{N}})$ est un espace de Fréchet et que

$$\Phi : E \to F$$

est un isomorphisme d'espaces de Fréchet. Pour F, on va noter V_k la semi-boule fermée de centre 0 et de rayon 1 associée à la semi-norme q_k, pour $k \in \mathbb{N}$.

Fixons $K \in \mathbb{N}$. On sait qu'il existe $D > 0$ et $K_0 \in \mathbb{N}$ tels que $q_K \circ \Phi \leq D p_{K_0}$ sur E. Prenons alors $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m_0 \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ et $\theta \in]0,1[$ avec

$$p_{U_{k_0}^\triangle} \leq C\left(p_{U_{K_0}^\triangle}\right)^{1-\theta}(p_{U_{m_0}^\triangle})^\theta$$

sur E'. Ensuite, choisissons $k \in \mathbb{N}$ tel que $p_{k_0} \circ \Phi^{-1} \leq C_k q_k$ sur F, pour un $C_k > 0$. Or, si $f' \in F'$, on a

$$\begin{aligned}
p_{V_k^\triangle}(f') &= \sup\{|f'(y)| : y \in F, q_k(y) \leq 1\} \\
&\leq \sup\{|f'(y)| : y \in F, (p_{k_0} \circ \Phi^{-1})(y) \leq C_k\} \\
&= \sup\{|(f' \circ \Phi)(x)| : x \in E,\ p_{k_0}(x) \leq C_k\} \\
&= C_k p_{U_{k_0}^\triangle}(f' \circ \Phi).
\end{aligned}$$

Enfin, fixons $m \in \mathbb{N}$ et prenons $m_0 \in \mathbb{N}$ et $D' > 0$ tels que $q_m \circ \Phi \leq D' p_{m_0}$ sur E. Par définition de la propriété (Ω), on peut trouver $C > 0$ et $\theta \in]0,1[$ tels que $p_{U_{k_0}^\triangle} \leq C\left(p_{U_{K_0}^\triangle}\right)^{1-\theta}(p_{U_{m_0}^\triangle})^\theta$ sur E'. Au total, si $f' \in F'$,

$$\begin{aligned}
p_{V_k^\triangle}(f') &\leq C_k p_{U_{k_0}^\triangle}(f' \circ \Phi) \\
&\leq C_k C\left(p_{U_{K_0}^\triangle}(f' \circ \Phi)\right)^{1-\theta}(p_{U_{m_0}^\triangle}(f' \circ \Phi))^\theta \\
&\leq C_k C D^{1-\theta} D'^\theta (p_{V_K^\triangle}(f'))^{1-\theta}(p_{V_m^\triangle}(f'))^\theta \\
&\leq C'(p_{V_K^\triangle}(f'))^{1-\theta}(p_{V_m^\triangle}(f'))^\theta,
\end{aligned}$$

où $C' = C_k C D^{1-\theta} D'^\theta$. □

En outre, à l'instar de la propriété (DN), la propriété (Ω) présente une stabilité vis-à-vis d'une structure particulière. Il s'agit ici du quotient. Pour démontrer ce fait, on va commencer par prouver un lemme, tiré de [20].

Lemme 3.2.1. *Soient E et G deux espaces localement convexes et soit F un sous-espace vectoriel de E. Notons $\pi_{E/F} : E \to E/F$ le passage au quotient. Si $T \in \mathrm{L}(E,G)$ est tel que $F \subset \ker(T)$, alors il existe un unique $\overline{T} \in \mathrm{L}(E/F, G)$ tel que $T = \overline{T} \circ \pi_{E/F}$ sur E.*

Démonstration. Il est clair qu'une telle application $\overline{T}$ est définie si et seulement si T est nul sur F. Dans cette situation, elle est nécessairement unique. De plus, il est évident que $\overline{T}$ est linéaire. Il ne reste plus qu'à prouver que $\overline{T}$ est continu sur E/F.

Soient P et Q des systèmes fondamentaux de semi-normes de E et G respectivement. Si $p \in P$, notons p/F la semi-norme

$$p/F : E/F \to [0, +\infty[\; : x + F \mapsto \inf\{p(y) : y \in (x + F)\}.$$

Il est bien connu que ces semi-normes forment un système fondamental de semi-normes de E/F. De plus, si $q \in Q$, il existe une semi-norme $p_0 \in P$ et $C > 0$ tels que $q \circ T \leq C p_0$ sur E. Ainsi, si $x \in E$ et si $\pi_{E/F}(x) = \pi_{E/F}(y)$, on a

$$\left(q \circ \overline{T}\right)(\pi_{E/F}(x)) = q(T(y)) \leq C p_0(y).$$

Donc $\left(q \circ \overline{T}\right)(\pi_{E/F}(x)) \leq C\,(p_0/F)\,(\pi_{E/F}(x))$, ce qui mène à la conclusion. □

Corollaire 3.2.1. *Soit (E, P) un espace localement convexe et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors l'application*

$$\phi : F^{\triangle} \to (E/F)' : f' \mapsto \overline{f'}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, où $\overline{f'}$ est l'application définie dans le lemme précédent. En particulier, si $q \in P$, on a

$$p_{U_F^{\triangle}} \circ \phi = (p_{U^{\triangle}})|_{F^{\triangle}}$$

où U est la semi-boule fermée de E associée à q et U_F est la semi-boule fermée de E/F associée à q/F.

Démonstration. Par le lemme précédent, l'application ϕ est clairement définie, linéaire et injective. Elle est aussi surjective, car si $g' \in (E/F)'$, en posant $f' = g' \circ \pi_{E/F}$ sur E, alors, on a bien sûr $\overline{f'} = g'$ sur E/F (par unicité de l'application $\overline{f'}$) et $f' \in F^{\triangle}$.

Il ne reste plus qu'à prouver l'égalité des semi-normes apparaissant dans l'énoncé. Pour ce faire, prenons $q \in P$ et reprenons les notations U et U_F de l'énoncé. Si $f' \in F^{\triangle}$, on a

$$p_{U_F^{\triangle}}\left(\overline{f'}\right) = \sup\left\{\left|\overline{f'}\left(\pi_{E/F}(x)\right)\right| : x \in E,\ q/F\left(\pi_{E/F}(x)\right) \leq 1\right\}.$$

Par conséquent, si on suppose que $x \in E$ est tel que $q/F\left(\pi_{E/F}(x)\right) \leq 1$ et si on choisit $y \in x + F$ tel que $q(y) \leq 1 + \varepsilon$ (pour un $\varepsilon > 0$ quelconque), il vient

$$\left|\overline{f'}\left(\pi_{E/F}(x)\right)\right| = |f'(y)| \leq \sup\{|f'(z)| : z \in E,\ q(z) \leq (1+\varepsilon)\} = (1+\varepsilon)\ p_{U^{\triangle}}(f').$$

Donc, en passant à la limite pour $\varepsilon \to 0^+$, il vient $p_{U_F^{\triangle}}\left(\overline{f'}\right) \leq p_{U^{\triangle}}(f')$. Inversement, si $x \in E$ est tel que $q(x) \leq 1$, alors $q/F\left(\pi_{E/F}(x)\right) \leq 1$ et

$$|f'(x)| = \left|\overline{f'}\left(\pi_{E/F}(x)\right)\right|,$$

ce qui prouve que $p_{U^{\triangle}}(f') \leq p_{U_F^{\triangle}}\left(\overline{f'}\right)$. Cela mène à la conclusion. □

Grâce à ce corollaire, on peut lier propriété (Ω) et passage au quotient. En effet, l'expression des semi-normes obtenue dans ce corollaire rend la proposition suivante directe.

Proposition 3.2.2. *Soit $(E,(p_k)_{k\in\mathbb{N}})$ un espace de Fréchet et soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Si E posséde la propriété (Ω), alors l'espace quotient E/F vérifie lui-même la propriété (Ω).*

Passons à différents exemples. Le premier est, comme dans le cadre de l'étude de la propriété (DN), direct.

Exemple 3.2.1. Tout espace de Banach possède la propriété (Ω).

Une nouvelle fois, une caractérisation des espaces de suites de Köthe généraux par rapport à la propriété (Ω) n'est pas connue. Néanmoins, on a malgré tout une condition nécessaire. Commençons par un lemme.

Lemme 3.2.2. *Soient $(l,\|.\|_l)$ un espace admissible et $A=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe. Soit $j\in\mathbb{N}$ et soit l'application linéaire continue*

$$\epsilon_j:\lambda^l(A)\to\mathbb{C}:\xi\mapsto\xi_j.$$

Alors, si $k\in\mathbb{N}$, on a

$$p_{U_k^{\triangle}}(\epsilon_j)=\begin{cases}1/a_k(j)\ \textit{si}\ a_k(j)>0\\ +\infty\ \textit{si}\ a_k(j)=0.\end{cases}$$

Démonstration. Par définition, on a $p_{U_k^{\triangle}}(\epsilon_j)=\sup\{|\xi_j|:\xi\in\lambda^l(A)\text{ et }p_k^l(\xi)\le 1\}$. On a deux possibilités.

a) Supposons que $a_k(j)>0$. Si $\xi\in\lambda^l(A)$ est tel que $p_k^l(\xi)\le 1$, alors $|a_k(j)\xi_j|\le 1$, donc

$$|\xi_j|\le\frac{1}{a_k(j)}.$$

Ainsi, $p_{U_k^{\triangle}}(\epsilon_j)\le 1/a_k(j)$. Or la suite $\eta:=(1/a_k(j))e_j$ est telle que $p_k^l(\eta)=1$ et telle que $\epsilon_j(\eta)=1/a_k(j)$. Par conséquent, on a

$$p_{U_k^{\triangle}}(\epsilon_j)=\frac{1}{a_k(j)}.$$

b) Si $a_k(j)=0$, alors, pour tout $N\in\mathbb{N}$, la suite $\gamma_N=Ne_j$ est telle que $p_k^l(\gamma_N)=0$ et $\epsilon_j(\gamma_N)=N$. Cela prouve que $p_{U_k^{\triangle}}(\epsilon_j)=+\infty$.

□

Proposition 3.2.3. *Soient $(l,\|.\|_l)$ un espace admissible et $A=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe. Si l'espace $\lambda^l(A)$ vérifie la propriété (Ω), alors pour tout $K\in\mathbb{N}$, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $m\in\mathbb{N}$, il existe $C>0$ et $\theta\in]0,1[$ vérifiant*

$$a_k(n)\ge C(a_K(n))^{1-\theta}(a_m(n))^{\theta}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $K,k,m\in\mathbb{N}$, $C>0$ et $\theta\in]0,1[$ sont tels que

$$p_{U_k^{\triangle}}\le C\left(p_{U_K^{\triangle}}\right)^{1-\theta}(p_{U_m^{\triangle}})^{\theta}$$

sur $\left(\lambda^l(A)\right)'$. Si $n\in\mathbb{N}$, on a en particulier

$$p_{U_k^{\triangle}}(\epsilon_n)\le C\left(p_{U_K^{\triangle}}(\epsilon_n)\right)^{1-\theta}(p_{U_m^{\triangle}}(\epsilon_n))^{\theta}$$

en reprenant les écritures de l'énoncé précédent. On va procéder au cas par cas en appliquant le lemme précédent.

(i) Si $a_k(n)a_K(n)a_m(n) \neq 0$, alors, on a $1/a_k(n) \leq C(1/a_K(n))^{1-\theta}(1/a_m(n))^{\theta}$, ou encore

$$a_k(n) \geq \frac{1}{C}(a_K(n))^{1-\theta}(a_m(n))^{\theta}.$$

(ii) Si $a_k(n) = 0$, alors $p_{U_k^\triangle}(\epsilon_n) = +\infty$. Cela impose que $p_{U_K^\triangle}(\epsilon_n) = +\infty$ ou $p_{U_m^\triangle}(\epsilon_n) = +\infty$. Dès lors, $a_K(n) = 0$ ou $a_m(n) = 0$. Dans tous les cas, on arrive à

$$a_k(n) = \frac{1}{C}(a_K(n))^{1-\theta}(a_m(n))^{\theta}.$$

(iii) Si $a_k(n) > 0$ et si $a_K(n)a_m(n) = 0$, alors on a toujours

$$a_k(n) > \frac{1}{C}(a_K(n))^{1-\theta}(a_m(n))^{\theta}.$$

D'où la conclusion.

□

Nous allons maintenant étudier le cas des espaces échelonnés de Köthe. Pour ce faire, considérons dans un premier temps le lemme suivant, tiré lui aussi de [20] (lemme 27.12).

Lemme 3.2.3. *Soit $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe et soit $p \in [1, +\infty[$. On note E l'un des trois espaces suivants : $\lambda_p(A)$, $\lambda_\infty(A)$ et $\lambda_0(A)$. Soient $x' \in E'$ et $k \in \mathbb{N}$. Considérons également l'ensemble $N_k := \{n \in \mathbb{N} : a_k(n) > 0\}$. Alors, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}\setminus N_k$ tel que $x'(e_{n_0}) \neq 0$, on a $p_{U_k^\triangle}(x') = +\infty$ dans tous les cas. Sinon, on a*

(i) $p_{U_k^\triangle}(x') = \left(\sum_{n\in N_k} |x'(e_n)/a_k(n)|^q\right)^{1/q}$ *si $E = \lambda_p(A)$ et si $p > 1$, avec* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *;*

(ii) $p_{U_k^\triangle}(x') = \sup_{n\in N_k} (|x'(e_n)|/a_k(n))$ *si $E = \lambda_1(A)$ $(p = 1)$;*

(iii) $p_{U_k^\triangle}(x') = \sum_{n\in N_k}(|x'(e_n)|/a_k(n))$ *si $E = \lambda_\infty(A)$ ou $E = \lambda_0(A)$.*

Démonstration. Dans un premier temps, supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}\setminus N_k$ tel que $x'(e_{n_0}) \neq 0$. Si $N \in \mathbb{N}$, prenons la suite $\gamma_N = \frac{N}{x'(e_{n_0})}e_{n_0}$. Dès lors, $p_k(\gamma_N) = 0$ et $|x'(\gamma_N)| = N$. Cela prouve que $p_{U_k^\triangle}(x') = +\infty$.
Supposons maintenant que $x'(e_{n_0}) = 0$ si $n_0 \in \mathbb{N}\setminus N_k$. On peut bien sûr supposer x' non nul, sans quoi le résultat est trivial. On va alors procéder au cas par cas.

(i) Supposons que $E = \lambda_p(A)$ avec $p > 1$. Dans ce cas, si $\xi \in E$, il vient

$$\begin{aligned}
|x'(\xi)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n x'(e_n)\right| \\
&= \left|\sum_{n\in N_k} \xi_n x'(e_n)\right| \\
&= \left|\sum_{n\in N_k} (\xi_n a_k(n)) \left(\frac{x'(e_n)}{a_k(n)}\right)\right| \\
&\leq p_k(\xi) \left(\sum_{n\in N_k} |x'(e_n)/a_k(n)|^q\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder, où $1/p + 1/q = 1$. D'où $p_{U_k^\triangle}(x') \leq \left(\sum_{n\in N_k} |x'(e_n)/a_k(n)|^q\right)^{1/q}$. Passons à l'autre inégalité. Prenons $\mu \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $|\mu_n| = 1$ et $\mu_n x'(e_n) = |x'(e_n)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme x' est non nul, le nombre

$$L_N = \left(\sum_{n\in N_k\cap[0,N]} |x'(e_n)/a_k(n)|^q\right)^{-1/p}$$

est bien défini pour $N \in \mathbb{N}$ suffisament grand. Enfin, définissons la suite $\eta^{(N)}$ comme suit :

$$\eta_n^{(N)} = \begin{cases} L_N \mu_n \dfrac{|x'(e_n)|^{q/p}}{a_k(n)^q} \text{ si } n \leq N \text{ et } n \in N_k, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} p_k\left(\eta^{(N)}\right) &= \left(\sum_{n \in N_k \cap [0,N]} a_k(n)^p L_N^p |\mu_n|^p \frac{|x'(e_n)|^q}{a_k(n)^{pq}} \right)^{1/p} \\ &= L_N \left(\sum_{n \in N_k \cap [0,N]} |x'(e_n)/a_k(n)|^q \right)^{1/p} \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $pq = p + q$. De plus, vu que $q = 1 + q/p$,

$$\begin{aligned} x'\left(\eta^{(N)}\right) &= \sum_{n=0}^{N} \eta_n^{(N)} x'(e_n) \\ &= \sum_{n \in N_k \cap [0,N]} L_N \frac{|x'(e_n)|^{1+q/p}}{a_k(n)^q} \\ &= \left(\sum_{n \in N_k \cap [0,N]} |x'(e_n)/a_k(n)|^q \right)^{1-1/p} \\ &= \left(\sum_{n \in N_k \cap [0,N]} |x'(e_n)/a_k(n)|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Cela implique que $\left(\sum_{n \in N_k \cap [0,N]} |x'(e_n)/a_k(n)|^q\right)^{1/q} \leq p_{U_k^\triangle}(x')$. Par conséquent, en passant à la limite pour $N \to +\infty$, on conclut que

$$p_{U_k^\triangle}(x') = \left(\sum_{n \in N_k} |x'(e_n)/a_k(n)|^q \right)^{1/q}.$$

(ii) Supposons que $E = \lambda_1(A)$. Dès lors, si $\xi \in E$,

$$\begin{aligned} |x'(\xi)| &= \left| \sum_{n \in N_k} (\xi_n a_k(n)) \left(\frac{x'(e_n)}{a_k(n)} \right) \right| \\ &\leq p_k(\xi) \left(\sup_{n \in N_k} |x'(e_n)/a_k(n)| \right). \end{aligned}$$

Qui plus est, si $N \in N_k$, notons $\eta^{(N)}$ la suite $(1/a_k(N))e_N$. Bien sûr, on a $p_k\left(\eta^{(N)}\right) = 1$ et $|x'\left(\eta^{(N)}\right)| = |x'(e_N)|/a_k(N)$. Donc $|x'(e_N)|/a_k(N) \leq p_{U_k^\triangle}(x')$. Ainsi, il vient

$$p_{U_k^\triangle}(x') = \left(\sup_{n \in N_k} |x'(e_n)/a_k(n)| \right).$$

(iii) Supposons que $E = \lambda_0(A)$ ou que $E = \lambda_\infty(A)$. Si $\xi \in E$, on a

$$|x'(\xi)| \leq p_k(\xi) \sum_{n \in N_k} (|x'(e_n)|/a_k(n)).$$

Ensuite, si $N \in N_k$, soit la suite $\eta^{(N)}$ donnée par

$$\eta_n^{(N)} = \begin{cases} \mu_n/a_k(n) \text{ si } n \leq N \text{ et } n \in N_k, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

où la suite μ est définie comme au point (i). De nouveau, on vérifie que $p_k\left(\eta^{(N)}\right) \leq 1$ et que $x'\left(\eta^{(N)}\right) = \sum_{n \in N_K \cap [0,N]} |x'(e_n)|/a_k(n)$. En passant à la limite pour $N \to +\infty$, cela permet de dire que

$$p_{U_k^\triangle}(x') = \sum_{n \in N_K} |x'(e_n)|/a_k(n),$$

ce qui mène à la conclusion.

□

Nous pouvons désormais considérer la caractérisation à proprement parler.

Proposition 3.2.4. *Soit $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une matrice de Köthe et soit $p \in [1, +\infty[$. On note E l'un des trois espaces suivants : $\lambda_p(A)$, $\lambda_\infty(A)$ et $\lambda_0(A)$. Alors E possède la propriété (Ω) si et seulement si, pour tout $K \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ et $\theta \in]0, 1[$ avec*

$$a_k(n) \geq C(a_K(n))^{1-\theta}(a_m(n))^\theta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous savons déjà que la condition est nécessaire. Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'elle est suffisante. On suppose ainsi que $K, k, m \in \mathbb{N}$, $C > 0$ et $\theta \in]0, 1[$ sont tels que

$$a_k(n) \geq C(a_K(n))^{1-\theta}(a_m(n))^\theta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x' \in E'$. On va montrer que $p_{U_k^\triangle}(x') \leq (1/C)\left(p_{U_K^\triangle}(x')\right)^{1-\theta}\left(p_{U_m^\triangle}(x')\right)^\theta$, ce qui permettra de conclure. On va procéder au cas par cas. Comme dans le lemme précédent, si $j \in \mathbb{N}$, notons N_j l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : a_j(n) > 0\}$. En particulier, on a

$$N_K \cap N_m \subset N_k.$$

Supposons d'abord qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus (N_K \cap N_m)$ tel que $x'(e_{n_0}) \neq 0$. Dans ce cas, vu le lemme précédent, $p_{U_k^\triangle}(x') \leq (1/C)\left(p_{U_K^\triangle}(x')\right)^{1-\theta}\left(p_{U_m^\triangle}(x')\right)^\theta = +\infty$, ce qui rend la thèse.
Dès lors, supposons que $x'(e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus (N_K \cap N_m)$. On va maintenant différencier les espaces échelonnés de Köthe considérés.

(i) Supposons que $E = \lambda_p(A)$, avec $p > 1$. Prenons $q \in]1, +\infty[$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Alors, il vient

$$\begin{aligned}
p_{U_k^\triangle}(x') &= \left(\sum_{n\in N_k} |x'(e_n)/a_k(n)|^q \right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{n\in N_K\cap N_m} |x'(e_n)/a_k(n)|^q \right)^{1/q} \\
&\leq \frac{1}{C} \left(\sum_{n\in N_K\cap N_m} \frac{|x'(e_n)|^q}{(a_K(n))^{(1-\theta)q}(a_m(n))^{\theta q}} \right)^{1/q} \\
&= \frac{1}{C} \left(\sum_{n\in N_K\cap N_m} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_K(n)}\right)^{(1-\theta)q} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_m(n)}\right)^{\theta q} \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

Pour continuer, l'idée est d'appliquer l'inégalité de Hölder. Le réel $p' := 1/(1-\theta)$ est strictement supérieur à 1 et son conjugué q' (i.e. le réel tel que $1/p' + 1/q' = 1$) vaut $1/\theta$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
p_{U_k^\triangle}(x') &\leq \frac{1}{C} \left[\left(\sum_{n\in N_K\cap N_m} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_K(n)}\right)^q \right)^{1-\theta} \right]^{1/q} \left[\left(\sum_{n\in N_K\cap N_m} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_m(n)}\right)^q \right)^{\theta} \right]^{1/q} \\
&= \frac{1}{C} \left[\left(\sum_{n\in N_K} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_K(n)}\right)^q \right)^{1/q} \right]^{1-\theta} \left[\left(\sum_{n\in N_m} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_m(n)}\right)^q \right)^{1/q} \right]^{\theta} \\
&= \frac{1}{C} \left(p_{U_K^\triangle}(x')\right)^{1-\theta} \left(p_{U_m^\triangle}(x')\right)^{\theta}.
\end{aligned}$$

(ii) Supposons que $E = \lambda_1(A)$. On a

$$\begin{aligned}
p_{U_k^\triangle}(x') &= \sup_{n\in N_k} \left(|x'(e_n)|/a_k(n)\right) \\
&\leq \frac{1}{C} \sup_{n\in N_K\cap N_m} \left(\frac{|x'(e_n)|}{(a_K(n))^{1-\theta}(a_m(n))^{\theta}} \right) \\
&\leq \frac{1}{C} \left[\sup_{n\in N_K} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_K(n)}\right) \right]^{1-\theta} \left[\sup_{n\in N_m} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_m(n)}\right) \right]^{\theta} \\
&= \frac{1}{C} \left(p_{U_K^\triangle}(x')\right)^{1-\theta} \left(p_{U_m^\triangle}(x')\right)^{\theta}.
\end{aligned}$$

(iii) Supposons que $E = \lambda_\infty(A)$ ou $E = \lambda_0(A)$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
p_{U_k^\triangle}(x') &= \sum_{n\in N_k} |x'(e_n)|/a_k(n) \\
&\leq \frac{1}{C} \sum_{n\in N_K\cap N_m} \frac{|x'(e_n)|}{(a_K(n))^{1-\theta}(a_m(n))^{\theta}} \\
&= \frac{1}{C} \sum_{n\in N_K\cap N_m} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_K(n)}\right)^{1-\theta} \left(\frac{|x'(e_n)|}{a_m(n)}\right)^{\theta} \\
&\leq \frac{1}{C} \left(\sum_{n\in N_K} \frac{|x'(e_n)|}{a_K(n)} \right)^{1-\theta} \left(\sum_{n\in N_m} \frac{|x'(e_n)|}{a_m(n)} \right)^{\theta} \\
&= \frac{1}{C} \left(p_{U_K^\triangle}(x')\right)^{1-\theta} \left(p_{U_m^\triangle}(x')\right)^{\theta}
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder.

D'où la conclusion. $\square$

Comme dans le cas de la propriété (DN), on peut faire un rapprochement vis-à-vis d'une classe définie dans la section concernant la classe de Dragilev. Plus précisément, on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.2. *Soit l l'un des trois admissibles suivants : l_p, $(p \geq 1)$, l_∞ et c_0. Alors tout espace de la classe $\mathcal{K}_{3,1}^l$ vérifie la propriété (Ω).*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente et du corollaire 2.6.1. $\square$

Au niveau des espaces de séries de puissances, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.3. *Tout espace de séries de puissances associé à l_p $(p \geq 1)$, l_∞ ou à c_0 vérifie la propriété (Ω).*

Démonstration. Au vu de la proposition 2.6.9 et du corollaire précédent, on sait déjà que le résultat concernant le type fini est vrai. Il ne nous reste plus qu'à considérer le type infini.

Prenons α une suite croissante et non majorée de réels positifs et considérons la matrice de Köthe
$$A' = \left(\left(e^{k\alpha_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{k \in \mathbb{N}}.$$
Fixons $K \in \mathbb{N}$ et posons $k := K + 1$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Si $m = 0$ ou $m = 1$, on a
$$e^{k\alpha_n} \geq \left(e^{K\alpha_n} \right)^{1/2} \left(e^{m\alpha_n} \right)^{1/2}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par contre, si $m > 1$, on prend $\theta := 1/m$. Dans ce cas, on a
$$e^{k\alpha_n} \geq \left(e^{K\alpha_n} \right)^{1-\theta} \left(e^{m\alpha_n} \right)^{\theta}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Nous obtenons dès lors de nouveaux exemples.

Exemples 3.2.1. Les espaces $\mathcal{O}(D(0,1))$, $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ et s vérifient la propriété (Ω).

Chapitre 4

Poursuite de l'étude des espaces S^ν

Passons enfin à un résumé concernant les espaces S^ν, comme annoncé dans l'introduction.

4.1 Définition générale

Commençons par rappeler la définition et les propriétés générales des espaces S^ν (pour plus de précisions, voir par exemple [1, 2, 3, 12, 15]).

Définition 4.1.1. Un *profil admissible* est une application $\nu : \mathbb{R} \to \{-\infty\} \cup [0,1]$ à la fois croissante, continue à droite et non identiquement égale à $-\infty$.

Pour une telle application ν, on définit

$$\alpha_{\min} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \nu(\alpha) \geq 0\}$$

et

$$\alpha_{\max} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \nu(\alpha) = 1\},$$

avec la convention selon laquelle $\inf \emptyset = +\infty$.

Pour le reste de ce chapitre, nous fixons une fois pour toutes la notation ν pour désigner un profil admissible quelconque. Un tel profil va ainsi permettre de définir un espace de suites qui lui est associé, appelé S^ν.

L'espace S^ν est en réalité constitué de suites de nombres complexes indicées non pas par un naturel, mais par un couple de naturels. Nous reprenons dès lors les notations employées dans [1, 2, 12]. Plus précisément, on pose

$$\Lambda := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{j\} \times \{0, ..., 2^{j-1}\}$$

et

$$\Omega := \mathbb{C}^\Lambda .$$

On ordonne Λ de la façon suivante : $(j,k) \leq (j',k')$ dans Λ si $(j \leq j')$ ou si $(j = j'$ et $k \leq k')$.

Afin de faciliter une distinction entre les suites "classiques" (indicées par $\mathbb{N}$) et les suites indicées par Λ, on emploiera une minuscule fléchée pour désigner un élément de Ω, comme par exemple $\vec{c}$.

Enfin, si $\vec{c} \in \Omega$, on pose

$$E_j(C,\alpha)(\vec{c}) := \left\{k \in \{0, ..., 2^j - 1\} : |c_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j}\right\}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $C \in [0, +\infty[$ et $j \in \mathbb{N}$.

Définition 4.1.2. *L'espace* S^ν est l'ensemble des suites $\vec{c} \in \Omega$ telles

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall C > 0\ \exists J \in \mathbb{N} : \#E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j}\ \forall j \geq J,$$

où le symbole $\#A$ désigne le cardinal de l'ensemble A.

Cet ensemble est un espace vectoriel complexe. De plus, il est possible d'adopter une autre approche pour définir l'espace S^ν. Ainsi, si $\vec{c} \in \Omega$, on définit

$$\nu_{\vec{c}}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\ln(\# E_j(1, \alpha+\varepsilon)(\vec{c}))}{\ln(2^j)} \right) \right)$$

quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dès lors, on obtient la caractérisation suivante.

Proposition 4.1.1. *Une suite $\vec{c} \in \Omega$ est un élément de S^ν si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha).$$

Maintenant que nous avons défini l'espace S^ν, nous allons le munir d'une topologie naturelle. Pour ce faire, considérons les espaces définis ci-dessous.

Définition 4.1.3. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in [0, +\infty[\cup \{-\infty\}$. *L'espace auxiliaire* $E(\alpha, \beta)$ est l'ensemble

$$E(\alpha, \beta) = \left\{ \vec{c} \in \Omega : \exists C, C' \geq 0 \textit{ tels que } \# E_j(C, \alpha)(\vec{c}) \leq C' 2^{\beta j} \ \forall j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Il est alors possible de munir un tel ensemble $E(\alpha, \beta)$ d'une topologie métrique.

Lemme 4.1.1. *Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in [0, +\infty[\cup \{-\infty\}$. Si $\vec{c}, \vec{d} \in E(\alpha, \beta)$, posons*

$$d_{\alpha,\beta}(\vec{c}, \vec{d}) := \inf\{C + C' : C, C' \geq 0 \textit{ et } \#\{k : |c_{j,k} - d_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j}\} \leq C' 2^{\beta j} \ \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

Dans ce cas, l'application $d_{\alpha,\beta} : E(\alpha, \beta) \times E(\alpha, \beta) \to [0, +\infty[: (\vec{c}, \vec{d}) \mapsto d_{\alpha,\beta}(\vec{c}, \vec{d})$ définit une distance sur $E(\alpha, \beta)$.

On munit ainsi $E(\alpha, \beta)$ de la topologie métrique définie par la distance $d_{\alpha,\beta}$. On peut alors montrer que cet espace est un espace métrique complet dont la topologie est plus forte que celle de la convergence ponctuelle.

Passons ensuite aux liens existant entre l'espace S^ν et les espaces auxiliaires définis ci-dessus.

Théorème 4.1.1. *On a*

$$S^\nu = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} E(\alpha, \nu(\alpha) + \varepsilon) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha_n, \nu(\alpha_n) + \varepsilon_m),$$

pour toute suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans $\mathbb{R}$ et toute suite $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $]0, +\infty[$ convergeant vers 0.

Grâce à ce résultat, on va pouvoir définir une topologie sur l'espace S^ν au moyen de celles venant d'être définies sur les espaces auxiliaires $E(\alpha, \beta)$.

Proposition 4.1.2. *Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans $\mathbb{R}$ et $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $]0, +\infty[$ convergeant vers 0. Si $m, n \in \mathbb{N}$, alors on pose*

$$d_{m,n} := d_{\alpha_n, \nu(\alpha_n) + \varepsilon_m} \textit{ et } E(m, n) := E(\alpha_n, \nu(\alpha_n) + \varepsilon_m).$$

Dans ce cas, l'application

$$d := \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-m-n} \frac{d_{m,n}}{1 + d_{m,n}}$$

définit une distance sur S^ν. Si on munit S^ν de la topologie métrique associée à d, alors on obtient un espace vectoriel topologique complet et séparable. De plus, on a les propriétés suivantes.

(i) La topologie définie par d sur S^ν est la plus faible topologie sur S^ν rendant les inclusions $S^\nu \to E(m, n)$ continues ; en particulier, elle est plus forte que la topologie de la convergence ponctuelle.

(ii) Une suite est convergente (respectivement de Cauchy) dans (S^ν, d) si et seulement si elle est convergente (respectivement de Cauchy) dans $E(m, n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.

Il serait utile de savoir si la topologie définie dans la proposition précédente est indépendante du choix des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$. C'est bien le cas et on a même le résultat suivant.

Proposition 4.1.3. *Toutes les topologies de S^ν à la fois métriques, complètes et plus fortes que la topologie de la convergence ponctuelle sont équivalentes.*

Dès lors, à partir de maintenant, on suppose que S^ν est muni de la topologie définie dans la proposition 4.1.2.

4.2 Le cas concave

Il existe certains profils pour lesquels les espaces S^ν associés ont une forme bien particulière, à savoir le cas où ces profils sont concaves. Des liens apparaissent alors avec les espaces dits de Besov. Rappelons la définition suivante.

Définition 4.2.1. Soient $s\in\mathbb{R}$, $p\in\,]0,+\infty[$ et $q\in\,]0,+\infty[\cup\{\infty\}$. L'espace de Besov $b^s_{p,q}$ est l'ensemble des suites $\vec{c}\in\Omega$ telles que

$$\left(2^{(s-\frac{1}{p})j}\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}|c_{j,k}|^p\right)^{1/p}\right)_{j\in\mathbb{N}}\in l^q.$$

On considèrera uniquement des espaces de Besov du type $b^s_{p,\infty}$. On munit alors l'espace $b^s_{p,\infty}$ de la $\min\{1,p\}$-norme définie par

$$\|.\|_{b^s_{p,\infty}} : b^s_{p,\infty}\to[0,+\infty[\,:\vec{c}\mapsto\sup_{j\in\mathbb{N}}\left(2^{(s-\frac{1}{p})j}\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}|c_{j,k}|^p\right)^{1/p}\right).$$

Citons au passage deux propriétés importantes de ces espaces.

Proposition 4.2.1. *Soient $s,s'\in\mathbb{R}$ et $p,p'\in]0,+\infty[$. Alors*

(i) si $p'\geq p$ et $s-\dfrac{1}{p}\geq s'-\dfrac{1}{p'}$, on a $b^s_{p,\infty}\subset b^{s'}_{p',\infty}$ continûment ;

(ii) si $p'\geq p$, on a $b^s_{p',\infty}\subset b^s_{p,\infty}$ continûment.

Nous avons également besoin de la définition suivante.

Définition 4.2.2. Le *conjugué concave* de ν est la fonction

$$\eta :]0,+\infty[\to\mathbb{R}:p\mapsto\inf_{\alpha\geq\alpha_{\min}}(\alpha p-\nu(\alpha)+1).$$

En conservant la notation η pour désigner le conjugué concave de ν, on obtient le théorème suivant.

Théorème 4.2.1. *Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de $]0,+\infty[$ et $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0,+\infty[$ convergeant vers 0. Alors on a*

$$S^\nu\subset\bigcap_{p>0}\bigcap_{\varepsilon>0}b^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon}_{p,\infty}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}b^{\frac{\eta(p_n)}{p_n}-\varepsilon_m}_{p_n,\infty}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si ν est concave.

De plus, si ν est concave, la topologie de S^ν est la plus faible topologie rendant les inclusions $S^\nu\to b^{\eta(p_n)/p_n-\varepsilon_m}_{p_n,\infty}$ continue, pour tous $m,n\in\mathbb{N}$.

Exemple 4.2.1. Nous allons considérer un exemple simple d'espaces S^ν, correspondant à un profil ν bien particulier. Plus précisément, considérons ν_q le profil admissible défini par

$$\nu_q : \alpha \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} -\infty \text{ si } \alpha < \alpha_0 \\ q(\alpha - \alpha_0) \text{ si } \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1] \\ 1 \text{ si } \alpha > \alpha_1, \end{cases}$$

où $q \in]0, +\infty[$ et où $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ sont tels que $\alpha_1 = 1/q + \alpha_0$. Dans ce cas, on a

$$S^{\nu_q} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} b^{\alpha_1 - \varepsilon_m}_{q,\infty}$$

et la topologie de S^{ν_q} est défini par le système filtrant de $\min(1, q)$-normes $\left\{ \|.\|_{b^{\alpha_1-\varepsilon_m}_{q,\infty}} : m \in \mathbb{N} \right\}$.

Démonstration. On vérifie sans difficulté que ν_q est une fonction concave : on peut donc déterminer l'espace S^{ν_q} en employant le théorème précédent. Si on note η_q le conjugué concave de ν_q, alors, pour $p > 0$,

$$\eta_q(p) = \inf_{\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1} ((p-q)\alpha + q\alpha_0 + 1) = \begin{cases} p\alpha_0 + 1 \text{ si } p \ge q \\ (p-q)\alpha_1 + q\alpha_0 + 1 = p\alpha_1 \text{ si } p \le q. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par le point (ii) de la proposition 4.2.1, on sait dès lors que

$$b^{\frac{\eta_q(q)}{q} - \varepsilon}_{q,\infty} \subset b^{\frac{\eta_q(p)}{p} - \varepsilon}_{p,\infty}$$

continûment, si $p \le q$. Maintenant, si $p \ge q$, alors

$$b^{\frac{\eta_q(q)}{q} - \varepsilon}_{q,\infty} = b^{\alpha_1 - \varepsilon}_{q,\infty} \subset b^{\alpha_0 + \frac{1}{p} - \varepsilon}_{p,\infty} = b^{\frac{\eta_q(p)}{p} - \varepsilon}_{p,\infty}$$

continûment car $(\alpha_0 + 1/p - \varepsilon) - 1/p = \alpha_0 - \varepsilon = (\alpha_1 - \varepsilon) - 1/q$ et on conclut par le point (i) de la proposition 4.2.1.

Par le théorème précédent, cela prouve que si $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de $]0, +\infty[$ convergeant vers 0, alors

$$S^{\nu_q} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} b^{\alpha_1 - \varepsilon_m}_{q,\infty}$$

et la topologie de S^{ν_q} est la plus faible topologie rendant les injections $S^{\nu_q} \to b^{\alpha_1 - \varepsilon_m}_{q,\infty}$ continues, quel que soit $m \in \mathbb{N}$. Or, comme la suite $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $]0, +\infty[$, cela implique le fait suivant : étant donné $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$, on peut trouver $M \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_M \le \inf\{\varepsilon_{m_0}, \varepsilon_{m_1}\}$, d'où

$$\sup \left\{ \|.\|_{b^{\alpha_1 - \varepsilon_{m_0}}_{q,\infty}}, \|.\|_{b^{\alpha_1 - \varepsilon_{m_1}}_{q,\infty}} \right\} \le \|.\|_{b^{\alpha_1 - \varepsilon_M}_{q,\infty}}.$$

Cela a pour conséquence que la topologie de S^{ν_q} est la topologie définie par l'ensemble filtrant de $\min\{1, q\}$-normes donné par

$$\left\{ \|.\|_{b^{\alpha_1 - \varepsilon_m}_{q,\infty}} : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

□

L'espace S^{ν_q} est de premier intérêt pour nous : il peut en effet être vu comme un espace de suites de Köthe lorsque $q \ge 1$. De fait, si $q \ge 1$, alors on considère l'ensemble

$$l_{\nu_q} = \left\{ \vec{c} \in \Omega : \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{2^j - 1} |c_{j,k}|^q \right) < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|.\|_{l_{\nu_q}} : l_{\nu_q} \to [0,+\infty[\, : \vec{c} \mapsto \sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k}|^q \right)^{1/q} \right).$$

Cet espace normé est un espace admissible généralisé, en ce sens qu'il est consitué de suites indicées par Λ et non par $\mathbb{N}$. On vérifie ainsi que si $\vec{c} \in \Omega$ est tel qu'il existe $C > 0$ avec $|c_{j,k}| \leq C$ pour tous $(j,k) \in \Lambda$ et si $\vec{d} \in l_{\nu_q}$, alors la suite $\vec{c}\vec{d} := (c_{j,k}d_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ est un élément de l_{ν_q} et

$$\left\|\vec{c}\vec{d}\right\|_{l_{\nu_q}} \leq C \left\|\vec{d}\right\|_{l_{\nu_q}}.$$

Qui plus est, si on désigne par $\overrightarrow{e_{j,k}}$ l'élément de Ω dont toutes les composantes sont nulles, à l'exception de celle d'indice (j,k) valant 1 (pour $(j,k) \in \Lambda$), alors $\overrightarrow{e_{j,k}} \in l_{\nu_q}$ et $\|\overrightarrow{e_{j,k}}\|_{l_{\nu_q}} = 1$.

Nous retrouvons bien les conditions de la définition des espaces admissibles (adaptée à Ω). Ensuite, si nous recherchons les liens existant entre les espaces S^{ν_q} et l_{ν_q}, alors nous pouvons voir apparaître une idée de pondération, comme au niveau des espaces de suites de Köthe. Plus précisément, considérons la matrice de Köthe (adaptée à Ω)

$$A_{\nu_q} = \left(\left(2^{(\alpha_1 - 1/q - \varepsilon_m)j} \right)_{(j,k)\in\Lambda} \right)_{m\in\mathbb{N}}.$$

On voit dès lors que $S^{\nu_q} = \lambda^{l_{\nu_q}}(A_{\nu_q})$ algébriquement et topologiquement (en reprenant les notations déjà utilisées au niveau des espaces de Köthe, mais bien sûr adaptées à Ω).

Ainsi, les résultats connus au niveau des espaces de suites de Köthe peuvent se généraliser au niveau de l'espace S^{ν_q}.

On peut également s'autoriser à conserver ces notations dans le cas où $q < 1$ (on considère alors des espaces de suites de Köthe localement q-convexes, i.e. associés à des espaces admissibles non pas normés, mais q-normés).

Grâce au théorème 4.2.1, on peut remarquer que si ν est concave, alors S^ν peut être vu comme une intersection dénombrable d'espaces S^{ν_q} (où $q > 0$ varie et prend pour différentes valeurs les composantes d'une suite dense dans $]0,+\infty[$). Comme on vient de constater que les espaces S^{ν_q} peuvent être vus comme des espaces de suites de Köthe, on obtient le prochain résultat.

Théorème 4.2.2. *Si le profil ν est concave, alors l'espace S^ν est une intersection dénombrable d'espaces de suites de Köthe (généralisés à Ω) associés à des espaces admissibles différents. De plus, la topologie de S^ν est la plus faible topologie rendant les inclusions de S^ν dans ces espaces de Köthe continues.*

4.3 Indice de convexité locale et p-convexité locale

On peut également essayer de déterminer la p-convexité locale de l'espace S^ν. Pour ce faire, on introduit la prochaine définition.

Définition 4.3.1. La "*right-inf derivative*" de ν est définie par

$$\underline{\partial}^+\nu(\alpha) := \liminf_{h\to 0^+} \frac{\nu(\alpha+h)-\nu(\alpha)}{h}$$

pour chaque $\alpha \in [\alpha_{\min}, +\infty[$. *L'indice de convexité locale* de ν est le nombre donné par

$$p_0 := \inf\left\{1, \inf_{\alpha_{\min}\leq\alpha\leq\alpha_{\max}} \underline{\partial}^+\nu(\alpha)\right\}.$$

L'idée de cette définition tire son origine d'un constat donné dans le prochain énoncé.

Proposition 4.3.1. *Si $p_0 > 0$, alors $b^{\eta(p_0)/p_0-\varepsilon}_{p_0,\infty} \subset b^{\eta(p)/p-\varepsilon}_{p,\infty}$ continûment pour tout $p \in]0,p_0]$ et tout $\varepsilon > 0$.*

Par conséquent, au vu du théorème 4.2.1, cela implique que si ν est concave et si $p_0 > 0$, alors

$$S^\nu = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{p \geq p_0} b^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon}_{p,\infty}.$$

Donc, dans une telle situation, cela prouve que ν est l'intersection d'espaces au moins localement p_0-convexe. Ce constat peut en fait être affiné et même étendu au cas où ν n'est pas nécessairement concave.

Théorème 4.3.1. *L'espace S^ν n'est pas un espace p-normé, quel que soit $p \in]0,1]$. De plus,*

(i) si $p_0 > 0$, alors l'espace S^ν est un espace localement p_0-convexe ;

(ii) si $p_0 < 1$, alors l'espace S^ν n'est pas un espace localement p-convexe, quel que soit $p \in]p_0, 1]$.

En particulier, S^ν est un espace de Fréchet si et seulement si $p_0 = 1$.

On peut alors obtenir davantage de précisions au niveau de la topologie de l'espace S^ν. Dans ce but, nous introduisons une nouvelle notation, similaire à celle des espaces de Besov. Si $s \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble $b^s_{\infty,\infty}$ comme l'ensemble des suites $\vec{c} \in \Omega$ telles que

$$\|\vec{c}\|_{b^s_{\infty,\infty}} := \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\{0,\ldots,2^j-1\}} \left(2^{js}|c_{j,k}|\right) < +\infty.$$

On note encore cet ensemble C^s et on parle d'*espace de suites de Hölder*. On le munit de la topologie définie par la norme $\|.\|_{b^s_{\infty,\infty}}$.

Théorème 4.3.2. *Supposons que $p_0 > 0$. La topologie de S^ν est induite par la famille des normes $\|.\|_{b^{\alpha_{\min}-\varepsilon}_{\infty,\infty}}$ et des p_0-normes données par*

$$\|\vec{c}\|_{\alpha,\varepsilon} := \inf \left\{ \left\|\vec{c'}\right\|_{b^s_{p_0,\infty}} + \left\|\vec{c''}\right\|_{b^\alpha_{\infty,\infty}} : \vec{c} = \vec{c'} + \vec{c''} \right\},$$

où $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}[$, $\varepsilon > 0$ et $s := \alpha + \frac{1-\nu(\alpha)}{p_0} - \varepsilon$. On peut rendre dénombrable cette famille de p_0-normes en considérant une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}[$ et une suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $]0, +\infty[$ convergeant vers 0.

Si jamais p_0 est nul, un autre phénomène se produit.

Théorème 4.3.3. *Supposons que $p_0 = 0$ et que $\alpha_{\min} > -\infty$. Dans ce cas, l'espace S^ν est localement pseudoconvexe. Plus précisément, pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $]0,1]$ convergeant 0, la topologie de S^ν peut être définie par une suite de p_n-semi-normes.*

Remarque 4.3.1. Si $p_0 = 0$, $\alpha_{\min} = -\infty$, alors l'espace S^ν n'est pas localement pseudoconvexe lorsque ν n'est pas identiquement égal à 1. Néanmoins, il s'agit d'un cas dégénéré non considéré en pratique (voir [12] pour plus de précisions).

Par contre, si ν est identiquement égal à 1, alors $S^\nu = \Omega$.

4.4 Dimension diamétrale et invariants (DN) et (Ω)

Grâce à l'exemple 4.2.1, on sait que certains espaces S^ν peuvent être vus comme des espaces de suites de Köthe. En reprenant les notations de cet exemple, on sait que si $p > 0$, alors

$$S^{\nu_p} = \lambda^{l_{\nu_p}}(A_{\nu_p}),$$

avec

$$A_{\nu_p} = \left(\left(2^{(\alpha_1 - 1/p - \varepsilon_m)j} \right)_{(j,k)\in\Lambda} \right)_{m\in\mathbb{N}},$$

où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et où $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque de $]0,+\infty[$ convergeant vers 0.

Dans le reste de cette section, pour simplifier les calculs, on va supposer que la suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est en fait la suite $(1/m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ (puisque le résultat est valable quel que soit $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$). Enfin, pour alléger les notations, on va écrire $p' = \alpha_1 - 1/p$.

On montre alors que, sous ces hypothèses, la matrice A_{ν_p} est régulière (en généralisant la définition des matrices régulières à Ω et en tenant compte de l'ordre de Λ).

En adaptant les raisonnements menant à la proposition 2.4.1 et le théorème 2.4.1, on peut obtenir la dimension diamétrale de l'espace S^{ν_p}. Néanmoins, pour appliquer le théorème 2.4.1, il faut obtenir la forme exacte de la $n^{\text{ème}}$ composante de la suite $\left(2^{(p'-1/m)j}\right)_{(j,k)\in\Lambda}$ en suivant l'ordre de Λ, pour tous $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. C'est ce que donne le prochain lemme.

Lemme 4.4.1. *Soient $m \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors la $n^{\grave{e}me}$ composante de la suite $\left(2^{(p'-1/m)j}\right)_{(j,k)\in\Lambda}$ s'écrit*

$$2^{(p'-1/m)j(n)},$$

où $j(n)$ est l'unique naturel tel que $2^{j(n)} - 1 \leq n \leq 2^{j(n)+1} - 2$.

Démonstration. Soit $(j_0, k_0) \in \Lambda$. Dans ce cas, on sait que la composante associée à (j_0, k_0) de la suite $\left(2^{(p'-1/m)j}\right)_{(j,k)\in\Lambda}$ vaut $2^{(p'-1/m)j_0}$. Autrement dit, cette composante ne dépend que de j_0 et non de k_0. Cela est résumé dans le tableau suivant.

Indices	(0,0)	$(1,k)$	$(2,k)$	$(3,k)$	...
Poids	1	$2^{(p'-1/m)}$	$2^{(p'-1/m)2}$	$2^{(p'-1/m)3}$	etc.

Tout revient donc à compter le nombre de couples $(j_0, k) \in \Lambda$ à j_0 fixé.

a) $\underline{j_0 = 0 :}$ Il n'y a qu'un seul couple, à savoir $(0,0)$. Il correspond au couple numéro 0 de Λ.

b) $\underline{j_0 = 1 :}$ Il y a deux couples : $(1,0)$ et $(1,1)$. Ils correspondent aux couples numérotés par 1 et 2.

c) $\underline{j_0 = 2 :}$ Il y a quatre couples : $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$ et $(2,3)$. Ils correspondent aux couples numérotés par les indices allant de 3 à 6.

En procédant par récurrence, on montre qu'étant donné $j_0 \in \mathbb{N}_0$, les couples $(j_0, k) \in \Lambda$ sont numérotés par les indices naturels allant de $1 + 2 + ... + 2^{j_0-1}$ à $2 + ... + 2^{j_0}$, ou encore de

$$\frac{2^{j_0} - 1}{2 - 1} = 2^{j_0} - 1 \ \text{ à } \ 2\frac{2^{j_0} - 1}{2 - 1} = 2^{j_0+1} - 2.$$

Notons que cette formule est valable pour tout $j_0 \in \mathbb{N}$ (i.e. même si $j_0 = 0$). De plus, on sait que pour les éléments de Λ numérotés par des naturels allant de $2^{j_0} - 1$ à $2^{j_0+1} - 2$, la composante de la suite $\left(2^{(p'-1/m)j}\right)_{(j,k)\in\Lambda}$ qui leur est associée vaut $2^{(p'-1/m)j_0}$. D'où la conclusion. $\square$

Nous sommes donc en mesure d'obtenir la dimension diamétrale de l'espace S^{ν_p} lorsque $p \geq 1$. Ce résultat peut en fait même s'étendre au cas où $p > 0$.

Proposition 4.4.1. *On a*

$$\Delta(S^{\nu_p}) = \left\{ \xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n (n+1)^{-1/m} \right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Démonstration. Par une adaptation de la proposition 2.4.1 et du théorème 2.4.1, on prouve que

$$\Delta(S^{\nu_p}) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \exists m \in \mathbb{N}_0 \ \text{tel que } \left(\xi_n 2^{(1/(k+m)-1/k)j(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\right\},$$

en reprenant les écritures du lemme précédent. Il reste à simplifier cette expression pour obtenir celle de l'énoncé. D'abord, on montre que

$$\Delta(S^{\nu_p}) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n 2^{-j(n)/m}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Si $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $k, m \in \mathbb{N}_0$ sont tels que $\left(\xi_n 2^{(1/(k+m)-1/k)j(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, alors, comme $j(n) \to +\infty$ si $n \to +\infty$, on doit avoir $\left(\xi_n 2^{-j(n)/k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. D'où

$$\Delta(S^{\nu_p}) \subset \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n 2^{-j(n)/m}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

L'inclusion inverse est également vraie. De fait, soit $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est tel que $\left(\xi_n 2^{-j(n)/m}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Prenons $k_0 \in \mathbb{N}_0$. Alors, si on pose $m_0 := 2k_0$, il vient

$$\xi_n 2^{(1/(k_0+m_0)-1/k_0)j(n)} = \left(\xi_n 2^{\frac{-j(n)}{3k_0}}\right) 2^{\frac{-j(n)}{3k_0}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\left(\xi_n 2^{(1/(k_0+m_0)-1/k_0)j(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

On va maintenant prouver l'égalité de l'énoncé. Prenons $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\left(\xi_n 2^{-j(n)/m}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ pour un $m \in \mathbb{N}_0$. Or, vu le lemme précédent, on sait que $2^{j(n)} - 1 \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $j(n) \leq \log_2(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\left(\xi_n (n+1)^{-1/m}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0.$$

Cela démontre que $\Delta(S^{\nu_p}) \subset \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n (n+1)^{-1/m}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0\right\}$. Prouvons l'autre inclusion pour conclure.
Supposons que $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est tel que $\left(\xi_n (n+1)^{-1/m}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Or, si $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $n \leq 2^{j(n)+1} - 2$, donc $j(n) \geq \log_2(n+2) - 1$. Dès lors, si $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\xi_n 2^{-j(n)/m} \leq 2^{1/m} \xi_n (n+2)^{-1/m} \leq 2^{1/m} \xi_n (n+1)^{-1/m}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela implique que $\xi \in \Delta(S^{\nu_q})$. □

On peut également réécrire le résultat précédent sous une autre forme.

Corollaire 4.4.1. *On a*

$$\Delta(S^{\nu_p}) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n (n+1)^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \ \forall s > 0\right\}.$$

Démonstration. Prenons $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $(\xi_n (n+1)^{-s})_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ pour tout $s > 0$. Fixons $m \in \mathbb{N}_0$. Comme $\left(\xi_n (n+1)^{\frac{-1}{2m}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ et comme

$$\xi_n (n+1)^{-1/m} = \left(\xi_n (n+1)^{\frac{-1}{2m}}\right) (n+1)^{\frac{-1}{2m}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela implique que $\left(\xi_n (n+1)^{-1/m}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Donc $\xi \in \Delta(S^{\nu_p})$.

Prouvons l'autre inclusion. Fixons $\xi \in \Delta(S^{\nu_p})$ et $s > 0$. Prouvons que $(\xi_n (n+1)^{-s})_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$. On sait qu'il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $1/m < s$. On conclut en remarquant que

$$\xi_n (n+1)^{-s} = \left(\xi_n (n+1)^{\frac{-1}{m}}\right) (n+1)^{\frac{1}{m}-s}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Nous avons déterminé la dimension diamétrale d'un certain type d'espaces S^ν. Dans [2], Aubry et Bastin ont montré que ce résultat est en fait bien plus général.

Théorème 4.4.1. *Si le profil admissible ν est tel que son indice de convexité locale p_0 est non nul, alors*

$$\Delta(S^\nu) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \left(\xi_n (n+1)^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \ \forall s > 0\right\}.$$

Comme annoncé dans l'introduction, tous les espaces S^ν ont la même dimension diamétrale (lorsqu'ils ont un indice de convexité locale non nul). Lors de futures recherches, il serait donc utile de voir si cela implique ou non l'existence d'isomorphismes entre certains S^ν.

Néanmoins, ce résultat confirme ce qui a été affirmé dans l'introduction, comme en témoigne le prochain résultat.

Proposition 4.4.2. *Si $p_0 = 1$ (i.e. si S^ν est un espace de Fréchet), alors S^ν est un espace de Schwartz non nucléaire.*

Démonstration. Comme $l_\infty \subset \Delta(S^\nu)$, cela prouve que S^ν est un espace de Schwartz. Par contre, on vérifie facilement que $(n+1)_{n\in\mathbb{N}} \notin \Delta(S^\nu)$ □

En fait, on peut même montrer que les espaces S^ν sont tous de Schwartz, quel que soit le profil admissible ν considéré (pour plus de précisions, voir par exemple [12]).

Par contre, il n'y a pas d'extension connue de la notion d'espaces nucléaires dans le cadre d'espaces localement p-convexes. En effet, en adaptant la définition des espaces nucléaires (par exemple, en prenant une base de voisinages absolument p-convexes de 0 dans la définition 2.7.3) ou en prenant la caractérisation des espaces nucléaires au moyen de la dimension diamétrale comme nouvelle définition, alors de tels espaces localement p-convexes nucléaires sont nécessairement localement convexes (voir [2, 18]).

Enfin, nous allons terminer cette section par quelques considérations au niveau des invariants (DN) et (Ω). À l'heure actuelle, il n'existe pas de résultat connu au sujet de ces invariants dans le cadre des espaces S^ν. Néanmoins, au vu des résultats et développements effectués vis-à-vis des espaces de suites de Köthe, nous sommes en mesure d'appliquer ces invariants à l'espace S^{ν_p}. Lors de futures recherches, il serait alors intéressant de tenter d'adapter ces raisonnements au niveau d'espaces S^ν plus généraux.

Comme les invariants (DN) et (Ω) sont normalement définis pour les espaces de Fréchet, on va supposer $p \geq 1$. Pour (DN), on a le résultat suivant.

Théorème 4.4.2. *L'espace S^{ν_p} ne possède pas la propriété (DN).*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons au contraire que S^{ν_p} possède la propriété (DN). Ainsi, en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 3.1.2, cela implique qu'il existe un $K \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe un $m_k \in \mathbb{N}_0$ et un $C > 0$ vérifiant

$$\left(2^{(p'-1/k)j}\right)^2 \leq C 2^{(p'-1/K)j} 2^{(p'-1/m_k)j}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. À partir d'une telle relation, en prenant $k = 2K$, on obtient même l'inégalité $2^{(2p'-1/K)j} \leq C 2^{(p'-1/K)j} 2^{(p'-1/m_{2K})j}$. Donc

$$1 \leq C 2^{-j/m_{2K}}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. En passant à la limite pour $j \to +\infty$, on obtient $1 \leq 0$, d'où une contradiction. □

Pour la propriété (Ω), on a le prochain théorème.

Théorème 4.4.3. *L'espace S^{ν_p} possède la propriété (Ω).*

Démonstration. Pour plus de simplicités, notons pour cette démonstration p_m ($m \in \mathbb{N}_0$) les différentes normes de l'espace étudié et nous emploierons la notation U_m comme dans la section consacrée à l'étude de la propriété (Ω). Fixons $x' \in (S^{\nu_p})'$. Si $\vec{c} \in S^{\nu_p}$ et si $m \in \mathbb{N}_0$, on a alors

$$\begin{aligned} |x'(\vec{c})| &= \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k}\ x'\left(\overrightarrow{e_{j,k}}\right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \left(2^{(p'-1/m)j} |c_{j,k}| \frac{|x'\left(\overrightarrow{e_{j,k}}\right)|}{2^{(p'-1/m)j}} \right) \\ &\leq \begin{cases} p_m(\vec{c}) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \left(2^{(1/m-p')j} \sup_{k\in\{0,\ldots,2^j-1\}} |x'\left(\overrightarrow{e_{j,k}}\right)| \right) \right) & \text{si } p=1; \\ p_m(\vec{c}) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \left(2^{(1/m-p')j} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |x'\left(\overrightarrow{e_{j,k}}\right)|^q \right)^{1/q} \right) \right) & \text{si } p>1 \text{ et } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \end{cases} \end{aligned}$$

En procédant comme dans la démonstration du lemme 3.2.3, on arrive alors à

$$p_{U_m^\triangle}(x') = \begin{cases} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(2^{(1/m-p')j} \sup_{k\in\{0,\ldots,2^j-1\}} |x'\left(\overrightarrow{e_{j,k}}\right)| \right) & \text{si } p=1; \\ \sum_{j=0}^{+\infty} \left(2^{(1/m-p')j} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |x'\left(\overrightarrow{e_{j,k}}\right)|^q \right)^{1/q} \right) & \text{si } p>1. \end{cases}$$

Ensuite, remarquons que, pour tout $K \in \mathbb{N}_0$, le naturel $2K$ est tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$2^{(p'-1/(2K))j} \geq \left(2^{(p'-1/K)j}\right)^{1/2} \left(2^{(p'-1/m)j}\right)^{1/2}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. Ainsi, par un raisonnement similaire à celui de la preuve de la proposition 3.2.4, on trouve que, pour tout $K \in \mathbb{N}_0$, le naturel $2K$ est tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$p_{U_{2K}^\triangle} \leq \left(p_{U_K^\triangle}\right)^{1/2} \left(p_{U_m^\triangle}\right)^{1/2}$$

sur E', ce qui mène à la conclusion. □

Annexe A

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

A.1 Les théorèmes du graphe fermé et de localisation

Les résultats énoncés dans cette partie sont directement tirées du cours de J. Schmets. Pour plus de précisions, nous renvoyons le lecteur intéressé à [23].

Définition A.1.1. Un espace localement convexe séparé est *ultrabornologique* si toute partie absolument convexe de E absorbant les compacts absolument convexes de E est un voisinage de 0 dans E.

Par exemple, tout espace de Fréchet est ultrabornologique.

Définition A.1.2. Soit E un espace localement convexe. Un *réseau* sur E est un ensemble de parties de E

$$\mathcal{R} = \{A_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0\}$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) tout élément de $\mathcal{R}$ est absolument convexe ;

(ii) on a

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

et, pour tous $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$,

$$A_{n_1,\dots,n_k} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{n_1,\dots,n_k,n};$$

(iii) pour toute suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de naturels non nuls, il existe une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de réels strictement positifs telle que, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ avec $x_k \in A_{n_1,\dots,n_k}$ si $k \in \mathbb{N}_0$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} r_k x_k$ converge dans E et vérifie, pour tout $k_0 \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} r_k x_k \in A_{n_1,\dots,n_{k_0}}.$$

Lorsque E admet un tel réseau, on dit que E est un *espace à réseau.*

On peut montrer, par exemple, que tout espace de Fréchet est à réseau.

Proposition A.1.1. *Soit $(E_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite d'espaces localement convexes à réseau et soit E un espace localement convexe. Si $E = \bigcup_{m=1}^{+\infty} E_m$ et si, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la topologie de E_m est plus forte que celle induite par E, alors E est à réseau. Plus précisément, E admet un réseau de la forme*

$$\mathcal{R} = \{A_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0\}$$

avec, pour $n \in \mathbb{N}_0$, $A_n = E_n$.

Passons maintenant au premier des deux grands théorèmes qui nous intéressent.

Théorème A.1.1 (Localisation, de Wilde)**.** *Soit E un espace de Fréchet et soit F un espace à réseau, de réseau $\mathcal{R} = \{A_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0\}$. Si $T : E \to F$ est un opérateur linéaire à graphe séquentiellement fermé, alors il existe une semi-boule B de E ainsi qu'un $n \in \mathbb{N}_0$ tels que $T(B) \subset A_n$.*

En combinant le théorème de localisation avec la proposition A.1.1, on obtient un nouveau résultat, fort intéressant.

Corollaire A.1.1. *Soit E un espace de Fréchet et soit $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Fréchet telle que $E = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$. Si la topologie de E_m est plus forte que celle induite par E, pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $E = E_n$.*

Passons au dernier théorème.

Théorème A.1.2 (Graphe fermé, de Wilde)**.** *Tout opérateur linéaire à graphe séquentiellement fermé d'un espace ultrabornologique dans un espace à réseau est continu.*

On obtient alors les corollaires suivants, bien connus au niveau des espaces de Fréchet.

Corollaire A.1.2. *Toute surjection linéaire continue entre espaces de Fréchet est ouverte. En particulier, toute bijection linéaire continue entre espaces de Fréchet est un isomorphisme d'espaces localement convexes.*

Corollaire A.1.3. *Si E est un espace vectoriel et si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies de Fréchet sur E dont l'une est plus forte que l'autre, alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Bibliographie

[1] AUBRY, J.-M. et F. BASTIN. Advanced topology on the multiscale sequence space S^ν. *J. Math. Anal. Appl.* 2009, 350, p. 439–454.

[2] AUBRY, J.-M. et F. BASTIN. Diametral dimension of some pseudoconvex multiscale spaces. *Studia Math.* 2010, 197(1), p. 27–42.

[3] AUBRY, J.-M., F. BASTIN, S. DISPA et S. JAFFARD. Topological properties of the sequence spaces S^ν. *J. Math. Anal. Appl.* 2006, 321, p. 364–387.

[4] BESSAGA, C., A. PELCZYNSKI et S. ROLEWICZ. On Diametral Approximative Dimension and Linear Homogeneity of F-spaces. *Bulletin de l'académie polonaise des sciences. Série des sciences math., astr. et phys.* 1961, IX(9), p. 677–683.

[5] BIERSTEDT, K.D. et J. BONET. Some aspects of the modern theory of Fréchet spaces. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Math.* 2003, 97(2), p. 159–188.

[6] BIERSTEDT, K.D., R.G. MEISE et W.H. SUMMERS. Köthe sets and Köthe sequence spaces. *North-Holland Mathematics Studies.* 1982, 71, p. 27–91.

[7] DE WILDE, M. *Topologie générale (cours de licence).* Université de Liège, 1997. 73 p.

[8] DRAGILEV, M.M. On regular bases in nuclear spaces. *Mat. Sb. (N.S.).* 1965, 68(2), p. 153–173.

[9] DRAGILEV, M.M. Këte spaces differing in diametral dimensionality. *Sib. Math. J.* 1970, 11(3), p. 389–399.

[10] DUBINSKY, E. *The Structure of Nuclear Fréchet Spaces.* Vol. 720. Berlin : Springer-Verlag, 1979. 187 p. (Lecture Notes in Mathematics). ISBN 3-540-09504-7.

[11] DYNIN, A. et B. MITYAGIN. Criterion for Nuclearity in Terms of Approximative Dimension. *Bulletin de l'académie polonaise des sciences. Série des sciences math., astr. et phys.* 1960, VIII(8), p. 535–540.

[12] ESSER, C. Les espaces de suites S^ν : propriétés topologiques, localement convexes et de prévalence. Mémoire de fin d'études, Université de Liège, 2011.

[13] GONCHAROV, A.P. et M. ZEKI. The diametral dimension of the spaces of Whitney jets on sequences of points. *Sib. Math. J.* 2005, 46(2), p. 276–282.

[14] GRACHEV, V.A. The diametral dimension of a Köthe space with a regular basis and its hypersubspaces. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1976, 20(1), p. 631–635.

[15] JAFFARD, S. Beyond Besov spaces, Part I : Distribution of wavelet coefficients. *J. Fourier Anal. Appl.* 2004, 10(3), p. 221–246.

[16] JARCHOW, H. *Locally Convex Spaces.* Stuttgart : B.G. Teubner, 1981. 548 p. (Mathematische Leitfäden). ISBN 3-519-02224-9.

[17] KARAPINAR, E. et V. ZAKHARYUTA. On Orlicz-Power Series Spaces. *Medit. J. Math.* 2010, 7(4), p. 553–563.

[18] LIGAUD, J.-P. Sur les rapports de convexité des topologies et bornologies dans les espaces nucléaires. *Studia Math.* 1973, XLV, p. 181–190.

[19] LINDENSTRAUSS, J. et L. TZAFRIRI. On Orlicz sequence spaces. *Israel J. Math.* 1971, 10(3), p. 379–390.

[20] MEISE, R. G. et D. VOGT. *Introduction to Functional Analysis.* Oxford : Clarendon Press, 1997. x, 437 p. (Oxford Graduate Texts in Mathematics ; 2). Traduit de l'allemand par M.S. Ramanujan. ISBN 0-19-851485-9.

[21] MITYAGIN, B.S. Approximative dimension and bases in nuclear spaces. *Russ. Math. Surv.* 1961, 16(4), p. 59–127.

[22] PIETSCH, A. *Nuclear Locally Convex Spaces.* Berlin : Springer-Verlag, 1972. vi, 193 p. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 66). Traduit de l'allemand par William H. Ruckle. ISBN 3-540-05644-0.

[23] SCHMETS, J. *Analyse fonctionnelle (notes du cours de la licence en sciences mathématiques).* Université de Liège, 2004. iv, 130 p. Disponible via l'URL `<http://www.anmath.ulg.ac.be/js/ens/af.pdf>` (consulté le 24/11/2013).

[24] SCHNEIDERS, J.-P. Analyse fonctionelle I. Notes de cours, Université de Liège, Année académique 2012-2013.

[25] TERZIOGLU, T. Die diametrale Dimension von lokalkonvexen Raümen. *Collect. Math.* 1969, 20(1), p. 49–99.

[26] TERZIOGLU, T. On Schwartz Spaces. *Math. Ann.* 1969, 182, p. 236–242.

[27] TERZIOGLU, T. Diametral Dimension and Köthe Spaces. *Turkish J. Math.* 2008, 32(2), p. 213–218.

[28] TERZIOGLU, T. Role of power series spaces in the structure theory of nuclear Fréchet spaces. Rapport technique, Université de Sabanci, 2012.

[29] TERZIOGLU, T. Quasinormability and diametral dimension. *Turkish J. Math.* 2013, 37(5), p. 847–851.

[30] VOGT, D. Charakterisierung der Unterraüme von s. *Math. Z.* 1977, 155, p. 109–117.

[31] VOGT, D. On two classes of (F)-spaces. *Arch. Math.* 1985, 45, p. 255–266.

[32] VOGT, D. Lectures on Fréchet spaces. Notes de cours, Bergische Universität Wuppertal, 2000.

[33] ZAHARIUTA, V. Linear topologic invariants and their applications to isomorphic classification of generalized power spaces. *Turkish J. Math.* 1996, 20(2), p. 237–289.

[34] ZEKI, M. Linear topological structure of spaces of Whitney functions defined on sequences of points. Mémoire de fin d'études, Université de Bilkent, 2002.

Index

Table des matières