

**Analyse de la loi régissant la dynamique d'une assemblée simple
de porteurs dans un diélectrique soumis à un champ électrique
faible, dans l'hypothèse d'électrodes partiellement bloquantes.**

par

H. VANDERSCHUEREN

Premier Assistant
à la Faculté des Sciences Appliquées de
l'Université de Liège

Extrait de la Collection des Publications de la Faculté des
Sciences Appliquées de l'Université de Liège (n°12, 1969)

**Analyse de la loi régissant la dynamique d'une assemblée simple
de porteurs dans un diélectrique soumis à un champ électrique
faible, dans l'hypothèse d'électrodes partiellement bloquantes.**

par

H. VANDERSCHUEREN *

Premier Assistant à la Faculté des Sciences Appliquées de
de l'Université de Liège

RESUME

L'influence des porteurs de charge mobiles et des barrières de potentiel aux électrodes sur la permittivité et l'angle de perte des diélectriques suscite un intérêt croissant de par l'augmentation des recherches entreprises dans les domaines des très basses fréquences et des couches minces notamment dans le cas des hauts polymères et des cristaux.

Les études théoriques entreprises à ce jour se fondent pour la plupart sur des approximations trop restrictives, voire même physiquement peu défendables (loi de Poisson non vérifiée par exemple).

Le problème a été abordé théoriquement avec plus de rigueur par Beaumont et Jacobs dont les résultats toutefois perdent en simplicité d'interprétation ce qu'ils ont gagné en généralité.

Nous basant sur leur étude, nous avons entrepris de remanier ces résultats et de les rendre d'accès plus aisé.

Nous n'avons pas repris ici une étude physique du problème, ce qui a été correctement et clairement fait chez les auteurs précités (leurs conditions de départ sont : une seule espèce de porteurs mobiles et des électrodes partiellement bloquantes). Notre contribution à l'étude est limitée ici à la partie mathématique ce qui a permis d'obtenir en toute généralité, une loi finale très concise dans laquelle toutes les particularités physiques du système se manifestent par l'intervention de deux paramètres seulement; nous proposons enfin sous forme polynomiale, donc facilement exploitable, des approximations applicables dans des cas particuliers d'intérêt majeur en précisant les limites de validité de ces simplifications.

SUMMARY

The influence of mobile charge carriers as well as those of potential barriers, at the boundary surface between dielectric and electrode, on the permittivity and the loss angle of the dielectrics suscitates increasing interest as witnessed by the large number of research projects in the areas of very low frequencies and thin layers, specially in the cases of high polymers and crystals.

The earlier theoretical studies were based for the greatest part on too highly restrictive approximations and sometimes not defendable from a physical

* Ing. Electronicien (1961), Physicien (1965).
Assistant au service de Mesures Electriques.

1. INTRODUCTION

Dans une publication récente, J. Beaumont et P. Jacobs [1] ont entrepris l'étude du comportement fréquentiel d'un diélectrique possédant des porteurs de charge libres de se mouvoir en son volume sous l'action d'un champ électrique. Ils supposent un seul type de porteurs mobiles (négatifs), et négligent la création et la recombinaison de ces porteurs. Ils limitent leur étude au cas des faibles tensions ($U \ll kT/e$), ce qui permet la linéarisation des équations. Enfin, il reprennent l'hypothèse, adoptée par Chang et Jaffé [2], puis par Friauf [3], d'électrodes partiellement bloquantes, cette propriété étant caractérisée par un paramètre ρ appelé "taux de transfert" des charges aux électrodes ou "paramètres de décharge" des porteurs accumulés au voisinage des électrodes.

Notre propos dans le présent travail est d'étudier mathématiquement avec plus de détails l'expression de l'admittance complexe établie par Beaumont et Jacobs. Par un réarrangement des termes de leur expression, nous obtiendrons une formulation plus concise et plus explicite dont l'exploitation dans le cas le plus général reste néanmoins malaisée de par l'intervention d'une fonction hyperbolique d'argument complexe. Pour la rendre plus accessible, nous en tracerons l'abaque cartésien.

Il va sans dire que nombre d'applications pratiques concernent une partie restreinte du domaine de définition de la formule générale. Citons par exemple les deux champs d'investigation actuellement très importants des propriétés diélectriques des solides : le domaine des très basses fréquences et le domaine des films minces. Il serait souhaitable, dans ces particularités d'emploi, de disposer d'une formule mathématique plus souple débarrassée de fonctions d'argument complexe non immédiatement séparables. A cette tâche se sont attelés Beaumont et Jacobs [1], puis M. R. Goffaux [4] qui a mieux précisé les conditions de validité des simplifications adoptées. Pour notre part, nous nous sommes efforcés d'être moins restrictifs quant aux approximations consenties et de déterminer les limites d'application des formules proposées dans les deux domaines précités; nous avons appliqué à notre problème les développements polynomiaux respectivement de Mac Laurin et de Bernoulli.

Après avoir posé les jalons de la théorie physique du problème, nous adopterons d'emblée l'équation de Beaumont et Jacobs, qui en est l'aboutissement, sans en reprendre l'élaboration systématique. Nous renvoyons pour une étude physique détaillée notamment aux références [1] à [4].

2. REPERTOIRE DES SYMBOLES UTILISES

d : épaisseur du diélectrique plan (c'est pour éviter une confusion ultérieure que nous changeons la notation L des auteurs cités), disposé perpendiculairement à l'axe de référence Ox (figure 1).

e, μ, D : charge, mobilité et coefficient de diffusion des porteurs.

n_0 ($= c_0$ en [1]) : densité des porteurs libres à l'équilibre thermique : électrons émis par les centres fixes ionisés du substrat ou par les impuretés incluses; a priori aucune hypothèse quant à la structure (cristalline ou amorphe) du diélectrique ne limite la validité des résultats établis. On suppose l'équilibre thermique non perturbé par le champ électrique appliqué. Macroscopiquement le diélectrique est neutre, de sorte que, en l'absence de champ, la densité en porteurs libres (électrons) est identique à la densité ionique fixe et constante.

$n \equiv n(x,t)$: densité locale des porteurs mobiles lorsque le champ électrique est appliqué (figure 1).

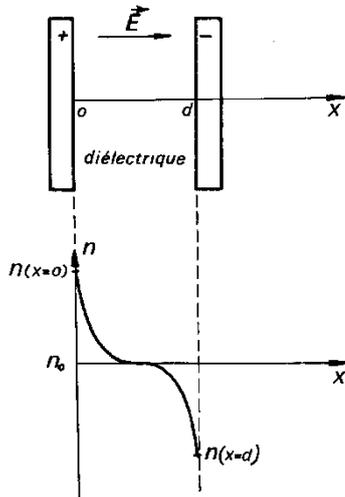


FIGURE 1

ϵ : permittivité du matériau en l'absence de charges d'espace.

$\beta = \frac{e}{\epsilon}$: coefficient de l'équation de Poisson.

$V = V_m \exp j\omega t$: différence de potentiel entre électrodes.

$I \equiv I(x,t)$: densité de courant local dans le diélectrique.

$E \equiv E(x,t)$: champ électrique local dans le diélectrique.

ρ : paramètre de décharge à l'électrode selon Chang et Jaffé [2].

m : notation simplificatrice introduite par Beaumont et Jacobs [1] et explicitée ci-dessous.

3. THEORIE PHYSIQUE ELEMENTAIRE

Les équations phénoménologiques adoptées au départ sont les suivantes :

1. L'équation de Poisson, mettant en relation le champ local et la charge d'espace effective locale :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \beta (n_0 - n) . \quad (1)$$

2. L'équation intégrale du champ :

$$\int_0^d E dx = V_m \exp j\omega t . \quad (2)$$

3. L'équation du courant local (courant de diffusion et de conduction) :

$$I = D \frac{\partial n}{\partial x} e + \mu n e E . \quad (3)$$

4. L'équation de conservation des charges (dans l'approximation des création et recombinaison négligeables) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e} \operatorname{div} I \equiv D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial (nE)}{\partial x} . \quad (4)$$

5. Les équations de définition du paramètre de décharge ρ [2] :

$$\begin{cases} I(x=0) = \rho \frac{D}{d} [n(x=0) - n_0] e & (5) \\ I(x=d) = -\rho \frac{D}{d} [n(x=d) - n_0] e . & (5') \end{cases}$$

Ceci traduit un fait intuitivement concevable : la proportionnalité entre le courant traversant l'électrode et la charge d'espace effective en son voisinage immédiat.

La résolution du système ci-dessus conduit finalement (dans l'hypothèse du champ faible qui permet de négliger les effets du second ordre, donc de s'en tenir à des équations différentielles linéaires) à l'équation (6) qui donne l'admittance équivalente du diélectrique par unité de surface d'électrode [1] et [4] :

$$Y_1 = \frac{e\mu n_0}{d} + j\omega \frac{\epsilon}{d} - 2e \frac{D}{d} \left[\frac{2\beta}{m^2} + j\omega \frac{d}{m\mu n_0} \coth \frac{md}{2} + \frac{D\rho}{\mu n_0} \right]^{-1} \quad (6)$$

avec :

$$m^2 D = \mu n_0 \beta + j\omega . \quad (7)$$

Nous écrivons la formule (6) sous la forme simplifiée (8)

$$Y_1 = \frac{1}{R_0} + j\omega C_0 - Y \quad (8)$$

avec

$$\begin{cases} R_0 = \frac{d}{e\mu n_0} \\ C_0 = \frac{\epsilon}{d} . \end{cases} \quad (9)$$

Ces deux éléments R_0 et C_0 sont respectivement les résistance et capacité unitaires en l'absence de diffusion ($D=0$). Le terme Y est la "variation" d'admittance introduite par la diffusion des porteurs.

4. TRANSFORMATION DE LA FORMULE DE L'ADMITTANCE SUPPLEMENTAIRE Y

De (6) et (8) nous tirons l'expression détaillée de Y que nous écrivons de manière à faire apparaître le produit $m^2 D$

$$Y = \frac{e}{d} \left[\frac{\beta}{m^2 D} + \frac{\rho}{2\mu n_0} + \frac{j\omega md}{2m^2 D \mu n_0} \coth \frac{md}{2} \right]^{-1} . \quad (10)$$

En éliminant $m^2 D$ par (7) et en introduisant la grandeur complexe :

$$\vartheta = \frac{md}{2} . \quad (11)$$

l'équation (10) devient :

$$Y = \frac{e}{d} \left[\frac{\beta}{\mu n_0 \beta + j\omega} + \frac{\rho}{2\mu n_0} + \frac{j\omega \vartheta \coth \vartheta}{\mu n_0 (\mu n_0 \beta + j\omega)} \right]^{-1} . \quad (12)$$

Enfin, en réduisant au même dénominateur et en mettant μn_0 en évidence

$$Y = \frac{e\mu n_0}{d} (\mu n_0 \beta + j\omega) \left[\left(1 + \frac{\rho}{2}\right) \mu n_0 \beta + j\omega \left(\frac{\rho}{2} + \wp \coth \wp\right) \right]^{-1} . \quad (13)$$

En vue de simplifier l'expression, nous poserons :

$$\mu n_0 \beta = \omega_c \quad (14)$$

que nous appellerons pulsation caractéristique : il s'agit d'une caractéristique intrinsèque du matériau (indépendante des conditions d'excitation et de l'épaisseur du diélectrique).

Des formules (9) et de la définition de β , on déduit immédiatement

$$\omega_c = \frac{1}{R_0 C_0} .$$

On voit donc que ω_c est égal à l'inverse du temps de relaxation τ du système R_0, C_0 .

De plus, nous introduirons la pulsation ou fréquence réduite ν :

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_c} \left(\equiv \frac{f}{f_c} \right) \equiv \omega \tau \quad (16)$$

L'expression (13) se réduit, après quelques manipulations élémentaires à :

$$Y = \frac{1}{R_c} \left[1 + \frac{\rho}{2} + \frac{\wp \coth \wp - 1}{1 - j\nu^{-1}} \right]^{-1} . \quad (17)$$

Ecrivant de cette manière, la formule fait apparaître le paramètre complexe \wp dans une expression ($\wp \coth \wp$) dont l'inverse a été partiellement tabulé et mis en abaques entre autres par Kennelly [5], Roberts et Von Hippel [6], Lowan [7].

Remarquons que nous pouvons modifier encore légèrement la formule pour faire apparaître la fonction de Langevin, étendue dans notre travail aux nombres complexes :

$$L(\wp) = \coth \wp - \frac{1}{\wp} \quad (18)$$

elle devient :

$$Y = \frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{\rho}{2} + \frac{\wp L(\wp)}{1 - j\nu^{-1}} \right)^{-1} . \quad (19)$$

Explicitons \wp à l'aide des formules (7), (11) et (16) :

$$\wp = \frac{m d}{2} = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\mu n_0 \beta}{D}} \sqrt{1 + j\nu} . \quad (20)$$

Enfin, en faisant appel à la relation d'Einstein liant la mobilité au coefficient de diffusion :

$$\mu = \frac{eD}{kT} \quad (21)$$

et en réexplicitant le coefficient de Poisson, nous obtenons la formule dé-

veloppée :

$$\vartheta = \frac{d}{\sqrt{4 \epsilon kT n_0^{-1} e^{-2}}} \sqrt{1 + j\nu} \quad (22)$$

où l'on reconnaît en dénominateur l'expression de la "longueur de Debye" L_D de sorte que nous écrirons ϑ de façon très simplifiée sous la forme (23)

$$\vartheta = A \sqrt{1 + j\nu} \quad (23)$$

avec le coefficient adimensionnel A , défini par :

$$A = d L_D^{-1} = d \cdot (4 \epsilon kT n_0^{-1} e^{-2})^{-1/2}.$$

La forme particulière de l'expression (19) suggère de parler en termes d'impédance plutôt que d'admittance. On introduira donc l'impédance réduite Z :

$$Z = \frac{1}{YR_0} = 1 + \frac{\rho}{2} + \frac{\vartheta \coth \vartheta - 1}{1 - j\nu^{-1}}$$

ou encore

$$Z = 1 + \frac{\rho}{2} + j\nu A^2 F(\vartheta) \quad (25)$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture

$$F(\vartheta) = \vartheta^{-2} (\vartheta \coth \vartheta - 1) = \vartheta^{-1} L(\vartheta) \quad (26)$$

On voit en (25) le rôle particulier joué par les paramètres physiques ρ et A . Le paramètre ρ n'intervient que dans le terme réel et sans corrélation avec la fréquence, de sorte que son intervention dans le diagramme polaire de l'impédance réduite se limite à une translation sans déformation de la courbe.

Le paramètre A , par contre, apparaît en corrélation avec la fréquence dans le terme ϑ . Il intervient donc dans la forme du diagramme polaire.

Avant de nous attaquer à l'étude de la fonction essentielle $F(\vartheta)$ nous donnons l'abaque de la fonction intermédiaire $(\vartheta \coth \vartheta)^{-1}$ dans le domaine de définition correspondant à notre problème. Nous y voyons un double intérêt; tout d'abord de façon tout à fait générale, compléter l'abaque de Kennelly qui, vu son objectif particulier, n'a pas considéré l'entièreté du domaine en question, ensuite permettre de préciser le domaine de validité des simplifications que l'on pourrait appliquer à (25) suivant le mode conventionnel adopté en [1] et [4] c'est-à-dire l'étude des cas extrêmes d'application.

Nous donnons en annexe (A) quelques propriétés de la très particulière fonction $(\vartheta \coth \vartheta)^{-1}$.

5. ABAQUE DE LA FONCTION $(\vartheta \coth \vartheta)^{-1}$

La forme particulière de $v \equiv \rho' \angle \delta$ dont le domaine de définition de l'argument δ est limité à 45° , ainsi que le montre directement (23), rend l'interprétation de la formule générale (25) moins compliquée que ne le suggère l'intervention du terme complexe en $\coth \vartheta$ dans $F(\vartheta)$:

En effet, de

$$v \in [0, \infty[$$

on déduit de (23) :

$$\vartheta \in [0, 45^\circ[\quad (27)$$

et la consultation des abaques de Kennelly [5] conduit, comme explicité à l'annexe A, à :

$$\arg (\vartheta \coth \vartheta)^{-1} \in]-46^\circ 36', 0] . \quad (28)$$

Comme première approche de l'étude, nous avons choisi de tracer, à la figure 2, l'abaque cartésien de cette fonction, inverse de $\vartheta \coth \vartheta$ qui intervient dans notre formule, parce que au contraire de celle-là, le domaine d'existence de son module est fini : on sait en effet que, quel que soit ϑ :

$$\text{mod} (\vartheta \coth \vartheta)^{-1} \in [0, 1] \quad (29)$$

de sorte que le domaine total de définition de $(\vartheta \coth \vartheta)^{-1}$ dans un abaque cartésien du type de Kennelly est fini (et même non fermé si on exclut la pos-

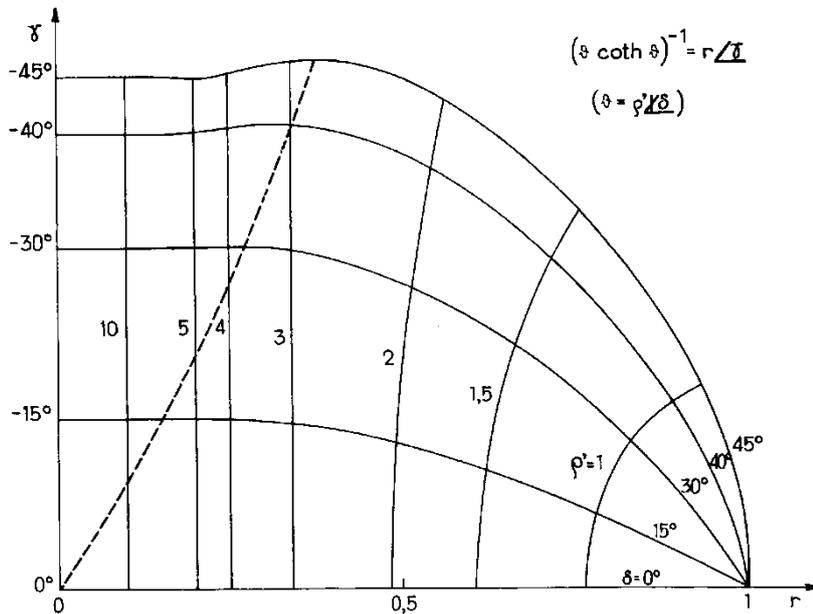


FIGURE 2

sibilité d'une fréquence ν infinie, ce qui est physiquement logique).

Les coordonnées de l'abaque sont le module r et argument γ de $(\mathcal{S} \coth \mathcal{S})^{-1}$

$$(\mathcal{S} \coth \mathcal{S})^{-1} \equiv r / \angle \gamma \quad (30)$$

tandis que les paramètres en sont le module ρ' et argument δ de \mathcal{S} .

Nous avons tracé à la figure 3 un second abaque dont les paramètres sont les grandeurs physiques indépendantes A et ν .

Le passage de l'un à l'autre s'effectue à partir de l'équation (23) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' = A (1 + \nu^2)^{1/4} \\ \delta = \frac{1}{2} \arctg \nu. \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' = A (1 + \nu^2)^{1/4} \\ \delta = \frac{1}{2} \arctg \nu. \end{array} \right. \quad (32)$$

Cet abaque cartésien du type de Kennelly pourrait suffire à l'étude de tous les cas d'application de la formule (25). Moyennant la connaissance des paramètres ρ et A , il est possible, à l'aide de l'abaque et de la formule (25) de tracer très simplement le diagramme (polaire par exemple) fréquentiel de l'impédance réduite, et, à l'aide de R_0 , on obtiendra le diagramme de l'impédance effective; une inversion conduira alors au diagramme de l'admittance effective dont on peut évidemment déduire notamment la courbe fréquentielle de la capacitance.

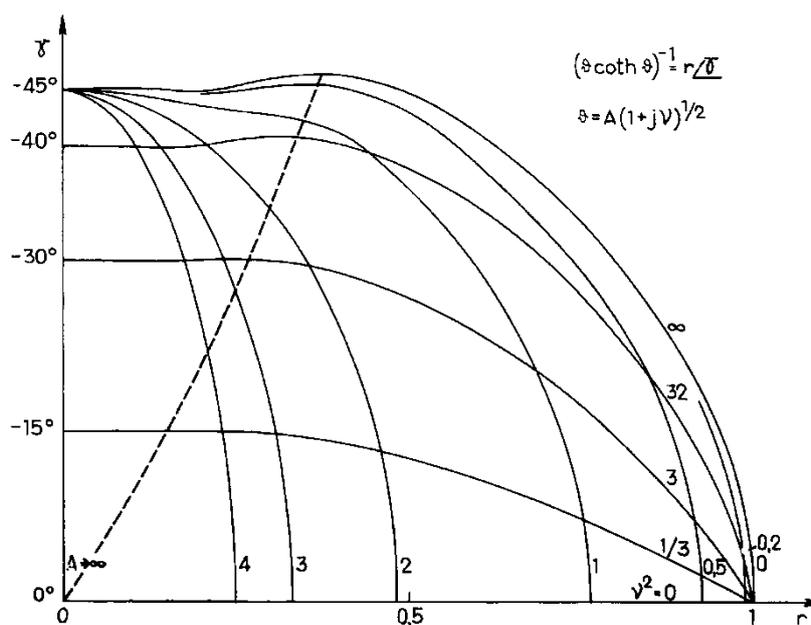


FIGURE 3

6. ETUDE DE LA FONCTION $F(\vartheta) = \vartheta^{-2} (\vartheta \coth \vartheta - 1)$

Afin de permettre l'exploitation aisée de la formule générale, nous donnons à la figure 4 le diagramme polaire de $F(\vartheta)$ pour diverses valeurs de A , ainsi que la famille de courbes isofréquentielles ν (Ce tracé a été effectué au Centre de Calcul de l'Université de Liège), le tableau 1 donne les coordonnées de quelques points du diagramme.

TABLEAU 1

F(A, ν)

	$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$	$\nu = 6$	$\nu = 7$	$\nu = 8$	$\nu = 9$
A=0.1	0.33312 -0.	0.33312 -0.00023	0.33311 -0.00045	0.33311 -0.00066	0.33311 -0.00089	0.33311 -0.00111	0.33310 -0.00133	0.33310 -0.00155	0.33310 -0.00177	0.33309 -0.00200
A=0.5	0.32791 -0.	0.32778 -0.00530	0.32742 -0.01058	0.32681 -0.01582	0.32596 -0.02101	0.32488 -0.02613	0.32358 -0.03117	0.32206 -0.03611	0.32054 -0.04093	0.31842 -0.04563
A=1.0	0.31304 -0.	0.31146 -0.01841	0.30688 -0.03598	0.29971 -0.05203	0.29056 -0.06607	0.28007 -0.07786	0.26888 -0.08741	0.25749 -0.09484	0.24631 -0.10042	0.23559 -0.10443
A=1.5	0.29208 -0.	0.28643 -0.03307	0.27147 -0.06072	0.25164 -0.08034	0.23103 -0.09236	0.21204 -0.09869	0.19557 -0.10128	0.18165 -0.10163	0.16997 -0.10074	0.16013 -0.09921
A=2.0	0.26866 -0.	0.25715 -0.04411	0.23095 -0.07362	0.20322 -0.08766	0.18004 -0.09224	0.16203 -0.09236	0.14808 -0.09066	0.13707 -0.08832	0.12814 -0.08583	0.12073 -0.08340
A=2.5	0.24543 -0.	0.22829 -0.04997	0.19534 -0.07573	0.16678 -0.08338	0.14596 -0.08366	0.13084 -0.08159	0.11941 -0.07890	0.11043 -0.07616	0.10314 -0.07353	0.09709 -0.07109
A=3.0	0.22388 -0.	0.20264 -0.05172	0.16751 -0.07256	0.14101 -0.07630	0.12285 -0.07490	0.10988 -0.07222	0.10012 -0.06934	0.09248 -0.06657	0.08630 -0.06402	0.08118 -0.06168
A=3.5	0.20460 -0.	0.18095 -0.05103	0.14626 -0.06779	0.12218 -0.06947	0.10610 -0.06739	0.09471 -0.06452	0.08619 -0.06164	0.07954 -0.05897	0.07418 -0.05655	0.06975 -0.05436
A=4.0	0.18767 -0.	0.16293 -0.04915	0.12973 -0.06290	0.10780 -0.06345	0.09337 -0.06106	0.08321 -0.05817	0.07565 -0.05538	0.06977 -0.05285	0.06504 -0.05058	0.06114 -0.04855
A=5.0	0.16002 -0.	0.13538 -0.04435	0.10577 -0.05432	0.08724 -0.05376	0.07528 -0.05120	0.06696 -0.04846	0.06079 -0.04593	0.05602 -0.04368	0.05219 -0.04169	0.04904 -0.03994
A=6.0	0.13889 -0.	0.11559 -0.03974	0.08926 -0.04749	0.07325 -0.04647	0.06306 -0.04398	0.05601 -0.04145	0.05081 -0.03918	0.04679 -0.03718	0.04358 -0.03543	0.04093 -0.03389
A=7.0	0.12245 -0.	0.10078 -0.03577	0.07718 -0.04206	0.06313 -0.04085	0.05425 -0.03849	0.04814 -0.03618	0.04364 -0.03413	0.04018 -0.03234	0.03740 -0.03078	0.03512 -0.02942
A=8.0	0.10938 -0.	0.08930 -0.03241	0.06798 -0.03770	0.05546 -0.03641	0.04760 -0.03421	0.04221 -0.03209	0.03825 -0.03023	0.03520 -0.02861	0.03276 -0.02721	0.03076 -0.02599
A=9.0	0.09877 -0.	0.08015 -0.02958	0.06074 -0.03413	0.04945 -0.03283	0.04240 -0.03077	0.03758 -0.02882	0.03404 -0.02712	0.03132 -0.02565	0.02915 -0.02438	0.02736 -0.02327
A=10.0	0.09000 -0.	0.07269 -0.02718	0.05489 -0.03116	0.04462 -0.02988	0.03823 -0.02795	0.03386 -0.02615	0.03067 -0.02459	0.02821 -0.02324	0.02625 -0.02208	0.02464 -0.02107

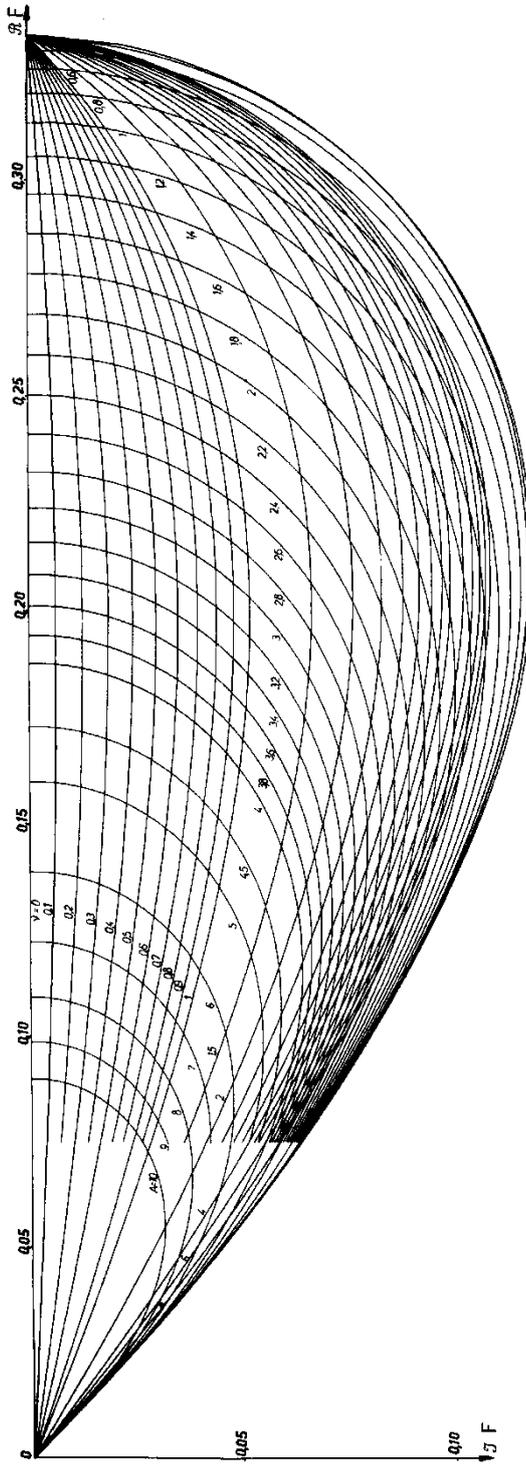


FIGURE 4

$$F(\phi) = \phi^{-2}(\phi \coth \phi - 1)$$

$$\phi = A \sqrt{1 + j\nu}$$

L'intérêt de ce choix réside principalement dans le fait que le domaine d'existence de cette fonction est borné et qu'elle peut donc être représentée dans son entièreté. D'autre part, le terme fréquentiel de l'impédance réduite (formule (25)) s'obtient simplement en multipliant $F(\vartheta)$ par un nombre imaginaire pur : $j \nu A^2$.

La fonction $F(\vartheta)$ possède une propriété remarquable qui en facilite le tracé et l'exploitation (permet des interpolations précises) :

$F(\vartheta)$ est une transformation de ϑ^2 localement conforme en tout point autre que l'origine.

Nous démontrerons cette proposition à l'annexe B.

Nous en soulignerons ici les principales conséquences. Afin de les visualiser, nous avons groupé à la figure 5 les quatre fonctions, transformations conformes l'une de l'autre :

$$\vartheta^2 (\equiv x + iy = A^2 + j \nu A^2), \vartheta, \vartheta \coth \vartheta - 1, F(\vartheta). \quad (33)$$

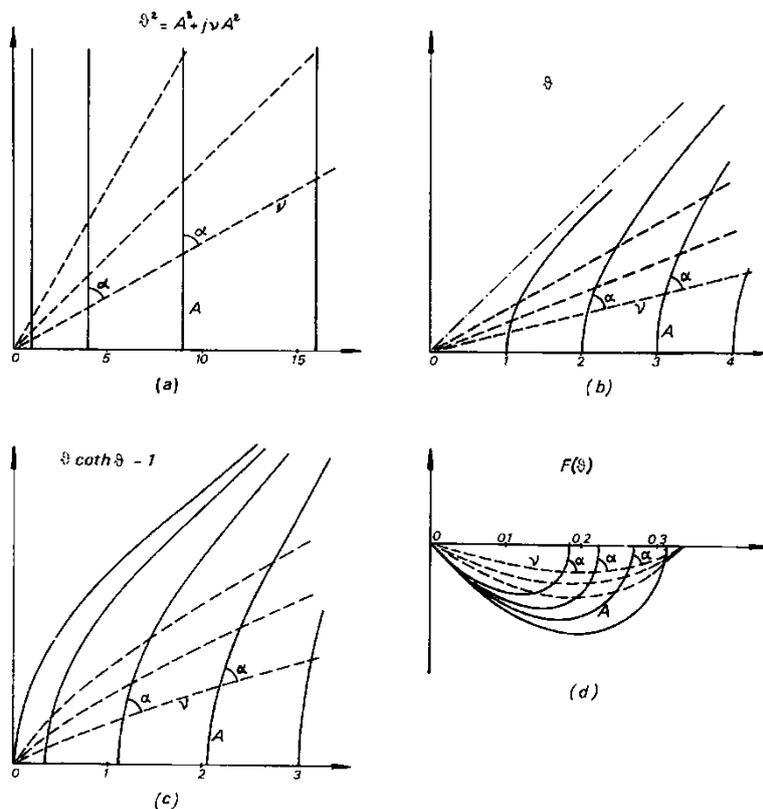


FIGURE 5

Nous avons choisi de représenter toutes ces fonctions par les familles paramétriques :

$$\begin{cases} A = m \\ v = n \end{cases} \quad (34)$$

où m et n sont des constantes positives ou nulles.

Considérons la première fonction (§²) figurée en 5a .

De (33) on déduit :

$$\begin{cases} x = A^2 \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \quad (35)$$

Ces familles de courbes (que nous appellerons respectivement courbes A et courbes v) sont donc des demi-droites dans le cas particulier de la figure 5a .

Les formules (35) et (36) montrent qu'il s'agit de l'ensemble des verticales (A) et du faisceau de demi-droites issues de l'origine (v) et confinées dans le premier quadrant.

Il s'ensuit qu'une "courbe" v coupe la famille A suivant un même angle α donné par

$$\alpha = \operatorname{arccotg} v . \quad (37)$$

En d'autres termes, les courbes A sont isoclines le long d'une courbe v et cette propriété angulaire se transmet, en vertu de la conformité de la transformation dans tous les diagrammes de la figure 5. En particulier on déduit immédiatement :

- a) La courbe $v = 1$ est la trajectoire à 45° des courbes A .
- b) Les courbes A sont orthogonales à l'axe polaire, qui se confond avec $v = 0$.
- c) Les trajectoires orthogonales aux courbes A sont caractérisées par l'équation paramétrique : $v A^2 = \text{constante}$.

Cette dernière assertion est évidente si l'on se réfère au système (35), (36) d'où l'on tire :

$$y = v A^2 .$$

En effet, comme $y = v A^2 = \text{constante}$ caractérise le réseau orthogonal (dans 5a) au réseau :

$$x = A^2 = \text{constante},$$

leurs transformées respectives sont aussi deux réseaux orthogonaux.

7. COMPORTEMENT DU DIELECTRIQUE AUX BASSES FREQUENCES

L'importance croissante des techniques expérimentales basses et très basses fréquences dans l'étude des diélectriques, l'un des objets principaux des recherches en cours au Laboratoire des Diélectriques de l'Institut Montefiore, incite à accorder une attention particulière au domaine des faibles valeurs de v , domaine qui justement est le plus souple et permet une formulation gé-

nérale très simple et sans équivoque, dans le cadre de la théorie développée ci-dessus et dans l'esprit de synthèse qui a présidé à son élaboration.

Cette particularité est suggérée par le diagramme polaire de la figure 4 où l'on voit que les courbes A sont normales à l'axe correspondant à $\nu = 0$, et les premières isofréquentielles équidistantes.

Il s'ensuit que le développement de la fonction $F(\nu)$ au voisinage de $\nu = 0$, limité aux deux premiers termes, fournira avec une excellente approximation respectivement le premier terme réel et le premier terme imaginaire correctifs. Le développement en série considéré

$$F_{BF}(A, \nu) = F(A, 0) + \nu \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)_0 \frac{\partial F(A, 0)}{\partial A} \quad (38)$$

donne, tous calculs faits :

$$F_{BF}(A, \nu) = \frac{L(A)}{A} - \frac{j}{2} \frac{\nu}{A^2} \left[\left(\frac{A}{\sinh A} \right)^2 + \left(\frac{A}{\sinh A} \right) \cosh A - 2 \right] \quad (39)$$

L'impédance réduite extrinsèque s'écrit donc aux basses fréquences, suivant (25) :

$$Z_{BF} = 1 + \frac{\rho}{2} + j \nu A^2 F_{BF}(A, \nu)$$

et l'impédance extrinsèque elle-même est finalement donnée par l'expression (40)

$$Z_{BF} = R_{BF} + j \omega L_{BF} \quad (40)$$

dans laquelle

$$\begin{cases} R_{BF} = \left(1 + \frac{\rho}{2}\right) R_0 + \omega^2 m(A) \frac{R_0}{\omega_0^2} \\ L_{BF} = \lambda(A) \frac{R_0}{\omega_c} \end{cases} \quad (41)$$

où l'on a posé :

$$\lambda(A) = A L(A) \quad (42)$$

$$2 m(A) = \left(\frac{A}{\sinh A} \right)^2 + \left(\frac{A}{\sinh A} \right) \cosh A - 2 . \quad (43)$$

Discussion

La formule (41) traduit avec une excellente précision le comportement théorique du diélectrique dans le domaine des basses fréquences relatives ν quels que soient A et ρ .

Si nous prenons comme critère de définition du domaine des basses fréquences $\nu \leq 0,1$, la figure 3 montre que le terme correctif en ω^2 de la formule (41) introduit dans l'expression (40) un déphasage et un écart sur la valeur absolue de Z_{BF} toujours très faibles. Par exemple, la valeur limite δ_1 du déphasage est, en tout état de cause, inférieure à l'angle à l'origine entre les isofréquentielles $\nu = 0,1$ et $\nu = 0$ puisqu'on néglige ainsi l'intervention du terme favorable

$$\left(1 + \frac{\rho}{2}\right) R_0 .$$

Donc

$$\delta_1 < \lim \frac{\mathcal{I}(F_{BF})}{\Re(F_{BF})} \quad \text{pour } \nu = 0,1 \text{ et } A \rightarrow \infty .$$

Cette valeur est de l'ordre de 3°.

Encore faut-il pour l'approcher que soient réalisées simultanément les deux conditions :

$$\begin{cases} A \gg 1 \\ \rho \ll 1 \end{cases}$$

On voit clairement en (41) l'évolution du terme L_{BF} en fonction du paramètre A , elle est proportionnelle à la fonction de Langevin $L(A)$ dont on sait qu'elle passe de $A/3$ à l'unité quand A augmente depuis 0 jusqu'à l'infini.

On trouvera à la figure 9 l'allure des coefficients $\ell(A)$ et $m(A)$ du développement.

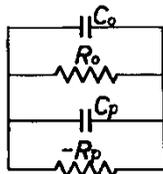
De la formule (40), analogue à celle d'un montage série résistance-self nous pouvons passer très facilement à celle du montage résistance-capacité en parallèle qui est plus directement utile puisque les diverses méthodes expérimentales de mesure fournissent évidemment les composantes réelle et imaginaire de l'impédance équivalente ou la capacité et la tangente de l'angle de perte du schéma R.C équivalent.

Nous rappelons en (44) les formules de conversion correspondantes :

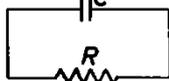
$$\begin{cases} R_p = \frac{|Z_{BF}|^2}{R_{BF}} \\ C_p = \frac{-L_{BF}}{|Z_{BF}|^2} \end{cases} \quad (44)$$

Schéma équivalent du condensateur réel :

Avec les notations introduites ci-dessus, le schéma équivalent du condensateur réel est évidemment donné par la figure 6a, elle-même identique au simple circuit parallèle RC de la figure 6b avec les définitions



(a)



(b)

$$\begin{cases} R^{-1} = R_o^{-1} - R_p^{-1} \\ C = C_o + C_p \end{cases} \quad (45)$$

Expression détaillée de C_p et R_p

Des formules générales ci-dessus (44), on déduit respectivement les formules développées suivantes :

FIGURE 6

$$\begin{cases} \frac{C_p}{C_o} = \frac{\ell(A)}{[1 + \frac{\rho}{2} + \omega^2 m(A) \omega_c^{-2}]^2 + \omega^2 [\ell(A) \omega_c^{-1}]^2} \\ - \frac{R_p^{-1}}{R_o^{-1}} = \frac{[1 + \frac{\rho}{2} + \omega^2 m(A) \omega_c^{-1}]^2}{[1 + \frac{\rho}{2} + \omega^2 m(A) \omega_c^{-2}]^2 + \omega^2 [\ell(A) \omega_c^{-1}]^2} \end{cases} \quad (46)$$

Celles-ci sont, rappelons-le, rigoureusement valables pour toutes valeurs de A et ρ , pourvu que $\omega\omega_c^{-1}$ soit faible (disons $\ll 0,1$).

Dans cette gamme, il serait utopique de pousser plus avant le calcul et de compliquer le modèle obtenu car il est évident que la théorie physique du phénomène, qui a servi de base à l'élaboration de la formulation développée ci-dessus se fonde encore, malgré sa complexité, sur trop d'approximations pour espérer tirer d'une correction mathématique du second ordre des renseignements que corroborerait l'expérience.

Du schéma équivalent parallèle de la figure 6 et des formules (46) on peut immédiatement déduire les expressions des capacité (C) et conductance (R^{-1}) équivalentes totales et de l'angle de perte du diélectrique :

$$C = C_0 (1 + C_p C_0^{-1}) \quad (47)$$

$$R^{-1} = R_0^{-1} (1 - R_p^{-1} R_0) \quad (48)$$

$$\text{tg } \delta = \frac{1}{\omega CR} = \frac{1}{\omega C_0 R_0} \cdot \frac{1 - R_p^{-1} R_0}{1 + C_p C_0^{-1}} \quad (49)$$

Les formules (46) apparaissent donc comme les taux de variation, à partir des valeurs intrinsèques, des capacité et conductance de l'échantillon à l'intervention des porteurs dont les mouvements à l'intérieur du diélectrique suivant l'excitation extérieure sont régis par la loi de la diffusion.

Influence de la géométrie et de la température

Remarquons tout d'abord de façon tout à fait générale que si nous choisissons de représenter les graphes des grandeurs qui nous intéressent, en fonction de A pour diverses valeurs du paramètre ρ et diverses valeurs de la fréquence réduite ν , nous obtenons des courbes traduisant par anamorphose soit l'effet de la température seule, soit l'effet de l'épaisseur seule puisque les trois paramètres A , T et d sont reliés par la relation (24).

On trouvera à la figure 7 les courbes donnant les taux de variation $C_p C_0^{-1}$ et $R_p^{-1} R_0$ correspondant à une fréquence réduite $\nu = 0,1$. Elles font apparaître un domaine particulier de température ou d'épaisseur de l'échantillon - assez étendu en général (il couvre deux décades dans le cas particulier de $\rho = 0$) - domaine correspondant à une transition de la conductance totale R^{-1} entre les valeurs extrêmes $R_0^{-1} (1 + 2/\rho)^{-1}$ et R_0^{-1} lorsque A grandit. Dans ce même domaine, on constate un accroissement de la capacité qui peut être très important et cela d'autant plus que ρ est faible ce qui est physiquement logique : moins les électrodes seront perméables aux porteurs et plus ceux-ci participeront à la polarisation, toutes autres conditions restant égales.

REMARQUE. A titre indicatif, nous avons tracé à la figure 7 (en traits pointillés) et dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire $\rho = 0$, une courbe correspondant aux formules (46) dans lesquelles on a négligé le terme correctif du second ordre en $m(A)$; on se rend compte que, sans être négligeable, ce terme est néanmoins très faible. Joint à la remarque faite après la formule (46) ceci confirme qu'il était licite de limiter, comme nous l'avons fait, les développements calculés.

Enfin, à la figure 8, nous mettons en évidence l'influence de l'épaisseur du diélectrique sur la capacité totale C dont l'expression développée se déduira de (47) en y explicitant C_0 et $C_p C_0^{-1}$ à l'aide des formules (9) et (46) :

$$C = \frac{\epsilon}{d} \left(1 + \frac{\ell(A)}{\left[1 + \frac{\rho}{2} + \omega^2 m(A) \omega_c^{-2} \right]^2 + \omega^2 [\ell(A) \omega_c^{-1}]^2} \right) \quad (50)$$

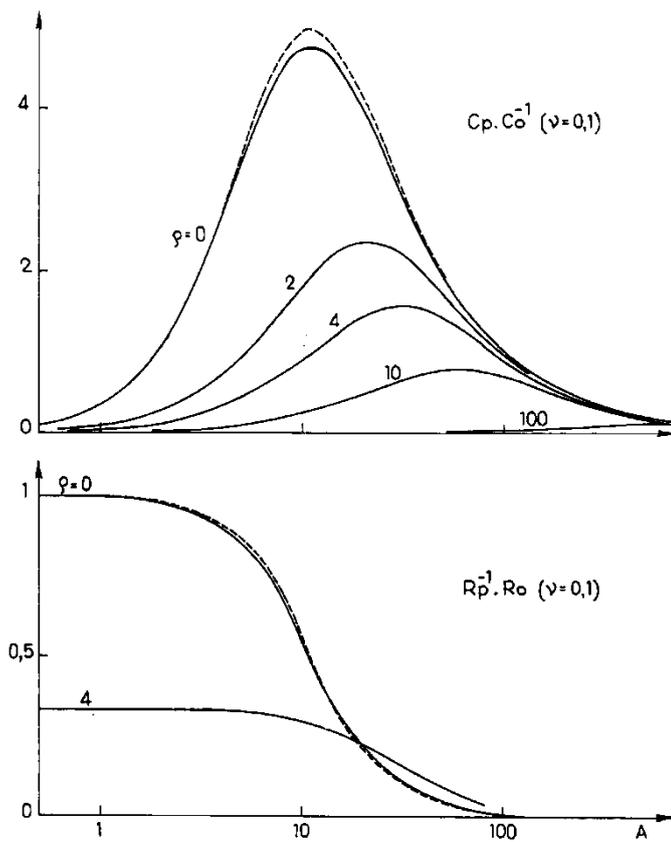


FIGURE 7

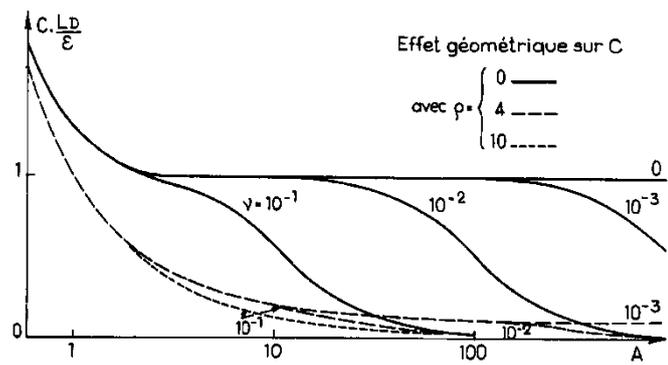


FIGURE 8

ou, en n'utilisant qu'un seul paramètre géométrique (l'épaisseur relative A)

$$C = \frac{\epsilon}{L_D} \left(\frac{1}{A} + \frac{L(A)}{[1 + \frac{\rho}{2} + \omega^2 m(A) \omega_c^{-2}]^2 + \omega^2 [l(A) \omega_c^{-1}]^2} \right) \quad (51)$$

Ce choix de représentation est très important puisqu'il concerne une grandeur (C) directement mesurable et qu'il visualise de façon remarquable l'effet du phénomène concerné.

Si nous nous référons à une courbe typique, par exemple la courbe de la figure 8 correspondant à $\rho = 0$ et $\nu = 10^{-2}$ (nous l'avons retracée à la figure 9) nous y voyons trois zones particulières.

Aux faibles épaisseurs correspond une loi en $\coth A$, en effet $m(A)$ et $l(A)$ sont négligeables, et (51) se réduit à

$$\frac{L_D C'}{\epsilon} = \frac{1}{A} + L(A) = \coth A, \quad (52)$$

et à la limite cette formule se réduit elle-même à

$$\frac{L_D C''}{\epsilon} = \frac{1}{A}$$

soit

$$C'' = \frac{\epsilon}{d} \quad (53)$$

ce qui traduit le fait que, le diélectrique étant très mince, le nombre de porteurs qui y sont injectés est trop faible pour avoir une influence sur la polarisabilité du milieu.

Aux très fortes épaisseurs, la parenthèse de (51) se réduit à son premier terme de sorte qu'on retombe sur la même loi que (53) :

$$C''' = \frac{\epsilon}{d} \quad (54)$$

ce qui traduit le fait que, dans la gamme de fréquence considérée, le parcours des porteurs, même nombreux, sous l'action du champ électrique est très faible en regard de l'épaisseur du diélectrique de sorte que l'effet de ce mouvement sur la polarisabilité est négligeable.

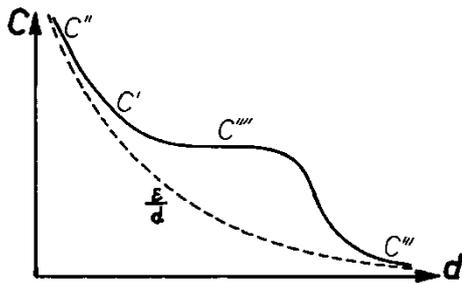


FIGURE 9

Dans une gamme d'épaisseur intermédiaire, un équilibre peut s'établir entre la diminution de la capacité géométrique correspondant à un accroissement de l'épaisseur du diélectrique et l'augmentation de la polarisation due à la diffusion des porteurs, de sorte que l'on peut obtenir un palier très important dans la courbe (la longueur de celui-ci dépend essentiellement de la fréquence d'excitation, ce qui est évident a priori, puisque celle-ci conditionne directement la longueur du parcours

des porteurs) : ce palier correspond à une capacité C''' donnée par :

$$C''' = \frac{\epsilon}{L_D} \quad (55)$$

ceci est particulièrement important, tout se passe dans cette gamme d'épaisseur comme si l'on était en présence d'un diélectrique d'épaisseur L_D .

Extension du développement polynomial

Nous avons jusqu'ici utilisé le développement de Mac Laurin de la fonction $F(\vartheta)$ au voisinage de $v = 0$, limité à ses deux premiers termes et montré que ceci était licite dans un faible domaine $[0 ; 0,1]$.

Il peut être utile de considérer les termes suivants du développement polynomial de Mac Laurin pour accroître le domaine de validité en fréquence de la formule correspondante. Toutefois au voisinage de $v = 1$ la convergence de la série est très faible. Il s'ensuit que le bénéfice obtenu en étendant le développement est faible eu égard à la longueur des calculs consécutifs. Nous donnons ci-dessous sous forme récurrente la valeur des quatre premiers coefficients du développement de $A^2 \cdot F(\vartheta)$ [le choix de cette forme particulière étant suggéré par l'utilisation ultérieure de $F(\vartheta)$ dans la formule complète (25)]

$$A^2 F(\vartheta) = A^2 F(A, v=0) + A^2 v \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)_0 + A^2 \frac{v^2}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right)_0 + A^2 \frac{v^3}{3} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial v^3} \right)_0 + \dots \quad (56)$$

que nous pouvons écrire sous forme d'un développement en série de puissances de $(-jv)$:

$$A^2 F(\vartheta) = \ell(A) - jv m(A) - v^2 n(A) + jv^3 p(A) \dots \quad (57)$$

Tous calculs faits les coefficients sont donnés en introduisant la notation simplificatrice a définie par (58) :

$$a \equiv A \coth A \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \ell(A) &= a - 1 \\ m(A) &= \frac{1}{2} \ell + \frac{(a^2 - A^2) - 1}{2} \\ n(A) &= \frac{3}{4} m + \frac{(a^2 - A^2) a - 1}{4} \\ p(A) &= \frac{5}{6} n + \frac{(a^2 - A^2) (a^2 + \frac{1}{3} a - \frac{1}{2} A^2) - 1}{8} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

On comprend le manque de maniabilité de tels résultats. Ils sont toutefois fortement simplifiés dans la gamme correspondant aux faibles écarts entre a et A soit donc pour les épaisseurs relativement importantes, auquel cas on obtient :

8. COMPORTEMENT DU DIELECTRIQUE SOUS FAIBLE EPAISSEUR

Dans la gamme des valeurs faibles de l'épaisseur relative A (exactement dans le domaine de 0 à π) la fonction $F(A)$ de la variable réelle A se développe en série.

Un calcul immédiat permet de passer du développement classique de $\coth A$ [10] en la série polynomiale alternée de $F(A)$:

$$F(A) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n} \frac{B_{2n-1}}{(2n)!} A^{2(n-1)} \quad (62)$$

dans laquelle les B_{2n-1} désignent les nombres de Bernoulli dont nous rappelons les premiers ci-dessous :

$$B_1 = \frac{1}{6} ; \quad B_3 = \frac{1}{30} ; \quad B_5 = \frac{1}{42} ; \quad B_7 = \frac{1}{30} ; \quad B_9 = \frac{5}{66}$$

Le théorème du "prolongement analytique" [11] permet d'étendre le développement (62) au plan complexe en y remplaçant A^2 par

$$\phi^2 = A^2 + j\nu A^2$$

pourvu que la série (63) ainsi obtenue soit convergente

$$F(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n} \frac{B_{2n-1}}{(2n)!} A^{2(n-1)} (1 + j\nu)^{n-1} . \quad (63)$$

Tous calculs faits, la série (63) devient :

$$F(\phi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{45} A^2 (1 + j\nu) + \frac{2}{945} A^4 (1 + j\nu)^2 - \frac{2}{9450} A^6 (1 + j\nu)^3 + \frac{2}{93555} A^2 (1 + j\nu)^4 + \dots \quad (64)$$

dont on pourrait évidemment séparer facilement la partie réelle de la partie imaginaire.

A titre indicatif, les calculs effectués à partir de (64) fournissent des résultats différant d'environ 5 % des valeurs exactes correspondantes dans les conditions $A = 1$, $\nu = 6$.

Nous ferons remarquer que les valeurs numériques très particulières des coefficients de (64) permettent d'écrire avec une excellente approximation la formule simplifiée (65)

$$F(\phi) \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{45} A^2 (1 + j\nu) + \frac{2}{945} A^4 (1 + j\nu)^2 \left[1 - \frac{1}{10} A^2 (1 + j\nu) + \frac{1}{100} A^4 (1 + j\nu)^2 \right] \quad (65)$$

CONCLUSION

Le présent travail n'a aucune prétention à l'originalité quant à la théorie physique du phénomène mis en cause.

Il constitue un essai de synthèse et de coordination des tentatives d'approche de la loi mathématique assez complexe qui régit ce phénomène.

Dans cet esprit, nous avons montré que la loi la plus générale, est en définitive régie par deux paramètres physiques A et ρ caractéristiques du diélectrique et, pour l'un d'eux (ρ), des électrodes. De même, nous n'avons pas évoqué les divers cas d'approximations possibles, travail qui vient d'être effectué avec discussions détaillées par M. Goffaux [4], mais nous avons préconisé le recours à un abaque d'emploi très simple vu ses deux particularités remarquables : domaine d'existence borné et transformation conforme d'un double réseau linéaire.

Deux cas particuliers cependant ont retenu notre attention, celui des très basses fréquences d'excitation et celui des faibles épaisseurs d'échantillon, car ils concernent les domaines spécialement étudiés au "Laboratoire de Recherche sur les Diélectriques" de l'Institut Montefiore.

Au terme de cette analyse, il nous est particulièrement agréable d'exprimer notre gratitude à Monsieur le Professeur Listray, ainsi qu'à Monsieur Goffaux, Chef de service au Laboratoire de Recherches Physiques des A.C.E.C.-Charleroi, promoteur de cette étude, pour l'intérêt constant qu'ils ont manifesté à l'égard de notre travail.

* *
*

ANNEXE A

PROPRIETES PARTICULIERES DE $(\vartheta \coth \vartheta)^{-1}$

Nous avons donné plus haut les abaques du type de Kennelly de la fonction $(\vartheta \coth \vartheta)^{-1}$. Celle-ci présentant des propriétés de phase intéressantes nous avons jugé utile de les signaler, en les soustrayant toutefois du texte principal, leur intervention dans la formule finale étant accessoire.

a) PROPRIETE DE LA COURBE FRONTIERE

On voit sur les figures 2 et 3 que la frontière du domaine d'existence de $(\vartheta \coth \vartheta)^{-1}$ (espace borné, non fermé) correspond à $\delta = 45^\circ$ ou $\nu^{-1} = 0$.

Cette courbe frontière, que nous appellerons dorénavant \mathcal{F} , possède des propriétés remarquables.

Lorsque ρ' varie de 0 à ∞ , \mathcal{F} tend vers la droite $\gamma = -45^\circ$ par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

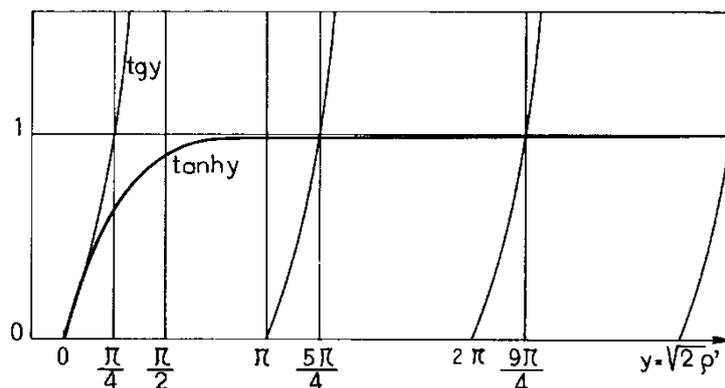


FIGURE A.1

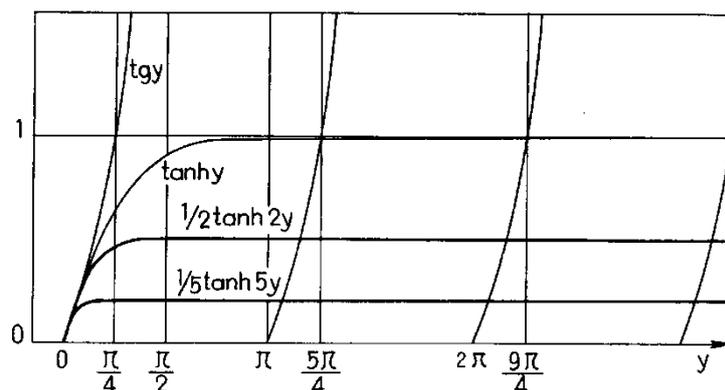


FIGURE A.2

$$\operatorname{tg} \delta \cdot \tanh \left(\frac{Y}{\operatorname{tg} \delta} \right) = \operatorname{tg} y . \quad (\text{A.7})$$

Nous avons tracé à la figure A.2 les graphes des deux membres de (A.7) pour quelques valeurs particulières de $\operatorname{tg} \delta$.

Cette figure suggère évidemment une grande simplification (avec une excellente approximation) : valable dans tout le domaine d'existence des solutions (A.7)

$$\operatorname{tg} \delta \cdot \tanh \left(\frac{Y}{\operatorname{tg} \delta} \right) = \operatorname{tg} \delta .$$

D'où la forme simplifiée de (A.7)

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \delta \quad (\text{A.8})$$

dont les solutions :

$$y = \delta + n\pi$$

donnent, avec (A.6) les valeurs de ρ' correspondant aux extrema des isofréquentielles :

$$\rho'_{n,\delta} = \frac{1}{2} \frac{\delta + n\pi}{\sin \delta} . \quad (\text{A.9})$$

Et en particulier le premier maximum est donné par

$$\rho'_{1,\delta} = \frac{1}{2} \frac{\delta + \pi}{\sin \delta} . \quad (\text{A.10})$$

Ceci nous a permis de tracer sur les figures 1 et 2 (courbe en traits interrompus) le lieu du premier extremum des courbes isofréquences.

* *
*

$$\operatorname{tg} \delta \cdot \tanh \left(\frac{y}{\operatorname{tg} \delta} \right) = \operatorname{tg} y . \quad (\text{A.7})$$

Nous avons tracé à la figure A.2 les graphes des deux membres de (A.7) pour quelques valeurs particulières de $\operatorname{tg} \delta$.

Cette figure suggère évidemment une grande simplification (avec une excellente approximation) : valable dans tout le domaine d'existence des solutions (A.7)

$$\operatorname{tg} \delta \cdot \tanh \left(\frac{y}{\operatorname{tg} \delta} \right) = \operatorname{tg} \delta .$$

D'où la forme simplifiée de (A.7)

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \delta \quad (\text{A.8})$$

dont les solutions :

$$y = \delta + n\pi$$

donnent, avec (A.6) les valeurs de ρ' correspondant aux extrema des isofréquentielles :

$$\rho'_{n,\delta} = \frac{1}{2} \frac{\delta + n\pi}{\sin \delta} . \quad (\text{A.9})$$

Et en particulier le premier maximum est donné par

$$\rho'_{1,\delta} = \frac{1}{2} \frac{\delta + \pi}{\sin \delta} . \quad (\text{A.10})$$

Ceci nous a permis de tracer sur les figures 1 et 2 (courbe en traits interrompus) le lieu du premier extremum des courbes isofréquences.

* *
*

ANNEXE B

 DEMONSTRATION DE LA CONFORMITE
 DE $F(\vartheta)$ PAR RAPPORT A ϑ^2

ϑ^2 étant évidemment conforme à ϑ , il nous suffira de démontrer que $F(\vartheta)$ est transformation conforme de ϑ .

Le domaine d'existence de ϑ est, dans notre cas, le premier demi-quadrant du plan complexe car :

$$\vartheta = A \sqrt{1 + jv}$$

avec A, v positifs ou nuls.

Il nous suffira donc de démontrer que les conditions suivantes sont satisfaites [8]

$$\begin{cases} 1^\circ) & F(\vartheta) \text{ est holomorphe} \\ 2^\circ) & F'(\vartheta) \neq 0. \end{cases}$$

REMARQUE. Le diagramme de la figure 3 (ou 4 d) étant suffisamment explicite, nous ne démontrerons pas analytiquement que le domaine D de $F(\vartheta)$, image du domaine d de ϑ est fini. Remarquons que c'est cette propriété qui nous a guidé dans le choix d'une fonction fondamentale à mettre en abaque.

1°) Holomorphie de $F(\vartheta)$ pour ϑ fini non nul

$F(\vartheta)$ est évidemment fonction uniforme et finie de ϑ . Il nous suffira de montrer qu'elle est monogène pour toute valeur finie non nulle de ϑ .

Calculons sa dérivée :

$$\text{De} \quad F(\vartheta) = \frac{\vartheta \coth \vartheta - 1}{\vartheta^2}$$

on tire :

$$F'(\vartheta) = \vartheta^{-3} [2 + \vartheta^2 - \vartheta \coth \vartheta - \vartheta^2 \coth^2 \vartheta] \quad (\text{B.1})$$

et cette fonction est évidemment finie pour toute valeur de ϑ finie non nulle.

Etudions plus attentivement le comportement de $F'(\vartheta)$ en $\vartheta = 0$.

Le développement en série de $\vartheta \coth \vartheta$ limité aux trois premiers termes s'obtiendra par "prolongement analytique" du développement correspondant à un argument réel A , développement que l'on trouvera par exemple à la référence [5] :

$$\coth \vartheta = 1 + \frac{1}{3} \vartheta^2 - \frac{1}{45} \vartheta^4.$$

On s'aperçoit que les termes d'ordre 0 et 2 en ϑ s'éliminent dans le crochet, et il reste :

$$F'(0) = \lim \left(-\frac{2}{45} \vartheta \right) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Conclusion

En tout point du domaine d de \mathfrak{g} les trois conditions d'holomorphie de $F(\mathfrak{g})$ sont réunies :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\mathfrak{g}) : \text{uniforme et finie} \\ F'(\mathfrak{g}) : \text{finie} \end{array} \right.$$

2°) Domaine de conformité de $F(\mathfrak{g})$

On sait que $F(0)$ est exclu puisque $F'(0) = 0$ d'après (B.2) .

On montrerait qu'aucun autre point de D ne satisfait à $F'(\mathfrak{g}) = 0$ c'est-à-dire à :

$$\mathfrak{g}^2 \coth^2 \mathfrak{g} + \mathfrak{g} \coth \mathfrak{g} - (2 + \mathfrak{g}^2) = 0 . \quad (\text{B.3})$$

CONCLUSION GENERALE

La transformation $F(\mathfrak{g})$ est localement conforme en tout point du domaine où \mathfrak{g} est physiquement défini, sauf en $\mathfrak{g} = 0$.

* *
*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.H. BEAUMONT and P.W.M. JACOBS, "Polarization in KCl crystals"
J. Phys. Chem. Solids, 28, 657 (1967).
- [2] H. CHANG et G. JAFFE, .
J. Chem. Phys. 20, 1071 (1952).
- [3] R. FRIAUF, "Polarization effects in the ionic conductivity of AgBr "
J. Chem. Phys. 22, 1329 (1954).
- [4] R. GOFFAUX, "Sur les propriétés de décharge des diélectriques aux électrodes", à paraître dans R. G. E.
- [5] A.E. KENNELLY, "Chart atlas of complex hyperbolic and circular functions"
et "Tables of complex hyperbolic and circular functions".
Harvard University Press, Cambridge (1924).
- [6] S. ROBERTS et A. VON HIPPEL,
J. Appl. Phys., 17, 610 (1946).
- [7] A.N. LOWAN, P.M. MORSE, H. FESHBACH et E. HAURWITZ, "Tables des solutions des équations d'ondes pour des terminaisons rectangulaires ou circulaires d'impédance finie".
AMP Note n° 18, N.D.R.C. section 6, 1-sr 1046-2043 (1945).
- [8] J. FAVARD, "Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique. Tome II, Représentations - Fonctions analytiques". Gauthier-Villars (1960), p. 190.
- [9] N.W. Mc LACHLAN, "Complex variable theory and transform calculus". University Press, Cambridge (1963), p. 14, 15.
- [10] PEIRCE-FOSTER, "A short Table of Integrals". Ginn and Co. 4 éd. p. 103.
- [11] GOLDMAN, "Transformation Calculus and Electrical Transients". Prentice Hall, N.Y. 5.16 p. 175 et sq.

* *
*

