

CATALAN

**Sur la sommation de certains coefficients
binomiaux (voir t. XIX, p. 32)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 260-263.

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__260_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA SOMMATION DE CERTAINS COEFFICIENTS BINOMIAUX

(voir t. XIX, p. 32) ;

PAR M. CATALAN (*).

I. PROBLÈME. *Dans le développement de $(1+z)^m$, on prend les termes de p en p . Quelle est la somme de*

(*) Né à Bruges (Belgique) le 30 mai 1814.

III. Soit maintenant

$$(4) \quad \theta = \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi;$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \theta = 2 \cos \frac{1}{2} \varphi \cdot e^{\frac{1}{2} \varphi \sqrt{-1}}, \\ 1 + \theta^2 = 2 \cos \frac{2}{2} \varphi \cdot e^{\frac{2}{2} \varphi \sqrt{-1}}, \\ \dots \dots \dots \\ 1 + \theta^p = 2 \cos \frac{p}{2} \varphi \cdot e^{\frac{p}{2} \varphi \sqrt{-1}}. \end{array} \right.$$

La formule (3) devient

$$p S_k = 2^m \left\{ \begin{array}{l} \cos^m \frac{1}{2} \varphi \cdot e^{\left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi \sqrt{-1}} + \cos^m \frac{2}{2} \varphi \cdot e^{2 \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi \sqrt{-1}} + \dots \\ \dots \dots \dots \\ + \cos^m \frac{p}{2} \varphi \cdot e^{p \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi \sqrt{-1}} \end{array} \right\}.$$

Par conséquent

$$(A) \quad p S_k = 2^m \left\{ \begin{array}{l} \cos^m \frac{1}{2} \varphi \cos \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi + \cos^m \frac{2}{2} \varphi \cos 2 \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi + \dots \\ \dots \dots \dots \\ + \cos^m \frac{p}{2} \varphi \cdot \cos p \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi \end{array} \right\},$$

et

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} 0 = \cos^m \frac{1}{2} \varphi \sin \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi + \cos^m \frac{2}{2} \varphi \sin 2 \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi + \dots \\ \dots \dots \dots \\ + \cos^m \frac{p}{2} \varphi \sin p \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi. \end{array} \right.$$

IV. Très-souvent l'évaluation de la quantité entre parenthèses, dans la formule (A), est plus compliquée que la détermination *directe* de S_k . Mais, par cela même, l'é-

quation (A) peut être regardée comme donnant la somme de cette quantité. Pour plus de simplicité, posons

$$m - 2k = q,$$

et rappelons-nous que

$$\varphi = \frac{2\pi}{p};$$

nous aurons

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} \cos^m \frac{\pi}{p} \cos q \frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q \frac{\pi}{p} + \dots \\ + \cos^m \frac{p\pi}{p} \cos pq \frac{\pi}{p} = \frac{p}{2^m} S_k. \end{array} \right.$$

Par exemple,

$$\cos^7 \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} + \cos^7 \frac{2\pi}{3} \cos \frac{10\pi}{3} + \cos^7 \pi \cos 5\pi = \frac{3}{2^7} (7 + 35 + 1).$$

V. Si $k + p$ surpasse $m + 1$, la somme S_k est composée d'un seul terme, égal à $C_{m,k}$; donc alors

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \cos^m \frac{\pi}{p} \cos q \frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q \frac{\pi}{p} + \dots + \cos^m \frac{p\pi}{p} \cos pq \frac{\pi}{p} \\ = \frac{p}{2^m} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}. \end{array} \right.$$

Soient, pour fixer les idées,

$$m = 13, p = 11, k = 3, q = 7:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^{13} \frac{\pi}{11} \cos \frac{7\pi}{11} + \cos^{13} \frac{2\pi}{11} \cos \frac{14\pi}{11} + \cos^{13} \frac{3\pi}{11} \cos \frac{21\pi}{11} + \dots \\ + \cos^{13} \pi \cos 7\pi = \frac{11}{2^{13}} \cdot 286. \end{array} \right.$$