NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Note sur la formule de Simpson et sur une autre formule de quadratures

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 412-415.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__412_0>

NOTE SUR LA FORMULE DE SIMPSON ET SUR UNE AUTRE FORMULE DE QUADRATURES;

Par E. CATALAN.

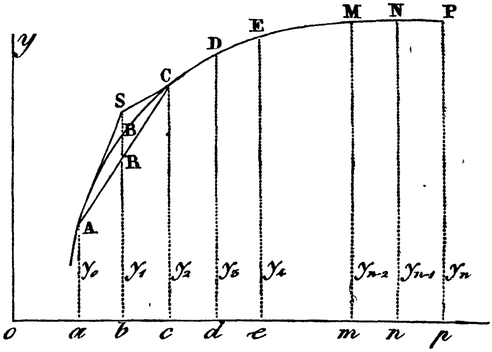
(Communiquée à la Société Philomathique.)

Pour évaluer l'aire comprise entre un arc de courbe, l'axe des abscisses et deux ordonnées extrêmes, il faut, après avoir inséré, entre ces deux dernières droites, un nombre impair d'ordonnées équidistantes, remplacer la courbe donnée par des arcs de paraboles tels, que chacun d'eux passe par les extrémités de trois ordonnées consécutives, et faire la somme des segments paraboliques ainsi obtenus.

Telle est la *Méthode de Robert Simpson*.

Il n'est pas difficile de voir que cette méthode doit, en général, conduire à des résultats peu approchés. En effet, les paraboles substituées à la courbe proposée, au lieu de former une ligne continue, présentent, le plus souvent, des *jarrets* à leurs points d'intersections; car chacune d'elles est déterminée indépendamment de celle qui la précède et de celle qui la suit. En cherchant à corriger le défaut inhérent à la formule de Simpson, j'en ai rencontré une autre qui, si je ne me trompe, pourra presque toujours être préférée à la formule de Simpson et à celle de M. Poncelet.

Pour arriver à cette formule, proposons-nous d'abord de remplacer une courbe donnée, par une suite de paraboles du second degré.



AP étant l'arc donné, menons les ordonnées extrêmes Aa, Pp; divisons l'intervalle ap en un nombre *quelconque* n de parties égales; puis élevons les ordonnées bB, cC,..., Nn.

Cela étant, faisons passer, par les trois points consécutifs A, B, C, une parabole dont l'axe soit parallèle à Aa, *et conservons seulement l'arc* AB *de cette ligne*. De même, par les trois points B, C, D, faisons passer une nouvelle parabole, et ne conservons que la partie BC de cette courbe, etc. En continuant ainsi, nous arriverons aux trois derniers points M, N, P, que nous joindrons par un arc parabolique, pris cette fois dans son entier.

Il est visible que les paraboles employées dans cette construction se *raccordent* mieux que celles du tracé de Simpson; car deux arcs consécutifs, au lieu d'avoir seulement un point de commun, en ont deux. Si donc on fait la somme de tous les segments paraboliques AaBb, BbCc,..., MnPp, on aura une aire A' qui différera assez peu de l'aire cherchée A.

Il est bon d'observer pourtant que, la construction étant irrégulière dans la partie MNP de la courbe, la valeur de A' ne sera pas symétrique. Mais si l'on refait, dans un ordre inverse, cette même construction, et que l'on prenne la moyenne des deux aires A′, A″ obtenues, on aura, à fort peu près, la valeur de A.

Développons les calculs qui viennent d'être indiqués.

Désignons par y_0, y_1, y_2,..., y_{n-1}, y_n les ordonnées des points A, B, C,..., N, P, et par δ l'intervalle de deux ordonnées consécutives. Menons la corde ARC; prenons BS = BR, et menons AS; cette droite sera tangente à l'arc AB de la parabole ABC. Or, le *triangle parabolique* ABR est les deux tiers du *triangle rectiligne* ARS; donc

$$\mathrm{ABR} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{RS}.ab = \frac{2}{3}\mathrm{BR}.ab = \frac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0+y_2}{2}\right)\delta.$$

D'ailleurs,

$$\mathrm{AR}\,ab = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{y_0+y_2}{2}\right)\delta.$$

Donc, en ajoutant,

$$\mathrm{AB}\,ab = \left(\frac{1}{2}y_0 + \frac{2}{3}y_1 - \frac{y_0+y_2}{12}\right)\delta.$$

Un simple changement d'*indices* donne ensuite

$$\mathrm{BC}\,bc = \left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{y_2+y_4}{12}\right)\delta,$$

$$\mathrm{CD}\,cd = \left(\frac{1}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3 - \frac{y_3+y_5}{12}\right)\delta,$$

. . . .

$$\mathrm{MN}\,mn = \left(\frac{1}{2}y_{n-2} + \frac{2}{3}y_{n-1} - \frac{y_{n-2}+y_n}{12}\right)\delta,$$

$$\mathrm{NP}\,np = \left(\frac{1}{2}y_n + \frac{2}{3}y_{n-1} - \frac{y_n+y_{n-2}}{12}\right)\delta.$$

La somme de ces valeurs sera

$$\mathrm{A}' = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\mathrm{S} - y_{n-1}) + \frac{2}{3}(\mathrm{S} - y_0 - y_n + y_{n-1}) \\ - \frac{2\mathrm{S} - y_{n-1} - y_0 - y_1 + y_{n-2}}{12} \end{array}\right]\delta,$$

ou

$$A' = \left(S - \frac{7}{12} y_0 + \frac{1}{12} y_1 - \frac{1}{12} y_{n-2} + \frac{1}{4} y_{n-1} - \frac{2}{3} y_n\right) \delta,$$

S étant la somme de toutes les ordonnées.

Changeant y_0 en y_2, y_1 en y_{n-1}, etc., nous aurons

$$A'' = \left(S - \frac{7}{12} y_n + \frac{1}{12} y_{n-1} - \frac{1}{12} y_2 + \frac{1}{4} y_1 - \frac{2}{3} y_0\right) \delta;$$

d'où

$$A' + A'' = \left[\begin{array}{l} 2S - \frac{5}{4}(y_0 + y_n) + \frac{1}{3}(y_1 + y_{n-1}) \\ \quad - \frac{1}{12}(y_2 + y_{n-2}) \end{array}\right] \delta.$$

La formule cherchée est donc

$$A = \left[S - \frac{5}{8}(y_0 + y_n) + \frac{1}{6}(y_1 + y_{n-1}) - \frac{1}{24}(y_2 + y_{n-2})\right] \delta \; (^*).$$