Nouvelles annales de mathématiques

E. Catalan

Sur les normales aux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 332-337.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__332_1>

SUR LES NORMALES AUX CONIQUES.

PAR E. CATALAN.

Parmi les différentes méthodes que l'on peut employer pour mener, d'un point donné, une normale à une conique donnée, il en est une qui exige seulement l'*emploi de la règle et du compas*. Cette méthode, trop peu connue, a été indiquée, il y a *cent soixante-dix* ans, par de la Hire, célèbre géomètre français (*). J'ai cru faire une chose utile en la reproduisant avec quelques simplifications.

(*) Nouveaux Éléments des coniques (1679).

1. Supposons que la conique soit une ellipse : les normales abaissées sur cette courbe par un point (p, q) pris dans son plan seront déterminées par les équations

$$a^2Y^2 + b^2X = a^2b^2, \tag{1}$$

$$c^2XY - a^2pY + b^2qX = 0; \tag{2}$$

lesquelles donnent, par l'élimination de Y :

$$X^4 - 2\frac{a^2}{c^2}pX^3 + \frac{a^2}{c^4}(a^2p^2 + b^2q^2 - c^4)X^2 + 2\frac{a^4}{c^2}pX - \frac{a^6}{c^4}p^2 = 0. \tag{3}$$

2. Afin de construire les racines de cette équation, essayons de combiner l'ellipse donnée avec un cercle.

L'équation de ce cercle sera :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2; \tag{4}$$

et si l'on cherche les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes, on trouvera qu'elles sont fournies par l'équation

$$\left.\begin{aligned} x^4 - 4\frac{a^2}{c^2}\alpha x^3 + 2\frac{a^2}{c^4}[2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) + c^2k^2]x^2 - 4\frac{a^4}{c^4}k^2\alpha x \\ + \frac{a^4}{c^4}(k^4 - 4b^2\beta^2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dans laquelle

$$k^2 = b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2.$$

3. Maintenant, pour ramener l'équation (3) à l'équation (5), posons $X = mx$, et identifions ; il viendra :

$$\alpha = \frac{p}{2m}, \quad 2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) + c^2k^2 = \frac{1}{2m^2}(a^2p^2 + b^2q^2 - c^4),$$

$$k^2\alpha = -\frac{c^2p}{2m^3}, \quad k^4 - 4b^2\beta^2 = -\frac{a^2p^2}{m^4}.$$

Ces relations déterminent facilement α, β, R et m. En effet, la première et la troisième donnent $k^2 = -\dfrac{c^2}{m^2}$.

On tire ensuite de la quatrième, $\beta^2=\frac{c^4+a^2p^2}{4m^4b^2}$. Puis, de la seconde :

$$m^2=\frac{a^2p^2+c^4}{b^2q^2+c^4}. \tag{6}$$

Cette formule donne pour m *deux valeurs réelles*, égales et de signes contraires : comme m est un rapport, on peut convenir de prendre seulement la valeur positive. Alors

$$\alpha=\frac{p}{2}\sqrt{\frac{b^2q^2+c^4}{a^2p^2+c^4}}, \tag{7}$$

$$\beta=\pm\frac{b^2q^2+c^4}{2b\sqrt{a^2p^2+c^4}}, \tag{8}$$

$$R^2=\alpha^2+\beta^2+b^2+c^2m^2. \tag{9}$$

Le centre et le rayon de la circonférence étant connus, si l'on construit cette circonférence, et que l'on multiplie par m les abscisses des points communs aux deux courbes, on connaîtra les abscisses des pieds des différentes normales menées à l'ellipse par le point donné.

4. Si l'on pose $f=\frac{ap}{c}$, $g=\frac{bq}{c}$, on obtient :

$$m^2=\frac{f^2+c^2}{g^2+c^2},\quad \alpha=\frac{p}{2}\sqrt{\frac{g^2+c^2}{f^2+c^2}},\quad \beta=\pm\frac{c(g^2+c^2)}{2b\sqrt{f^2+c^2}};$$

et ces dernières valeurs se construisent assez simplement.

Supposons $ap=bq$. Alors $m=1$, $\alpha=\frac{p}{2}$, $\beta=\pm\frac{2}{2b}\sqrt{f^2+c^2}$, $R^2=\alpha^2+\beta^2+a^2$. En même temps, les équations (3) et (5) ont les mêmes racines ; et par conséquent, *si dans le plan d'une ellipse on prend un point tel que ses distances aux deux axes soient en raison inverse des grandeurs de ces axes, les pieds des différentes normales menées à l'ellipse par ce point seront situés sur une même circonférence.*

Il ne faut pas oublier que le point fournira quatre normales, seulement quand il sera dans l'intérieur de la *développée* de l'ellipse, laquelle a pour équation :

$$(ap)^{\frac{2}{3}} + (bq)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

6. Si le point est à l'intersection de cette développée et de la droite représentée par $ap = bq$, on aura $ap = bq = \frac{c^2}{2\sqrt{2}}$.

Au moyen de ces valeurs, l'équation (3) devient :

$$X^4 - \frac{a}{\sqrt{2}} X^3 - \frac{3}{4} a^2 X^2 + \frac{a^3}{\sqrt{2}} X - \frac{a^4}{8} = 0.$$

Posons $X = \frac{a}{\sqrt{2}} t$, d'où $2t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t - 1 = 0$.

Cette équation a pour racines :

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \quad t_4 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2};$$

donc

$$X_1 = X_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad X_3 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} a, \quad X_4 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} a.$$

Les valeurs correspondantes de Y sont, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer :

$$Y_1 = Y_2 = -\frac{b}{\sqrt{2}}, \quad Y_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} b, \quad Y_4 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} b.$$

Ici, le point donné étant situé sur la développée de l'ellipse, les quatre normales se réduisent à trois; et la circonférence qui passe par leurs pieds est tangente à l'ellipse au point (X_1, Y_1). On peut remarquer, de plus, que $X_1 + X_2 + X_3 = 0$, $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0$; par conséquent, *le triangle formé par les pieds des trois normales a pour centre de gravité le centre de l'ellipse.*

7. Les mêmes considérations s'appliqueraient au cas de la normale à l'hyperbole, et plus généralement à la construction des racines de l'équation du quatrième degré. Ainsi, *on peut construire les racines d'une équation du quatrième degré, à l'aide d'une ellipse ou d'une hyperbole donnée et d'un cercle.*

8. Revenons au cas de l'ellipse. Au lieu de considérer l'hyperbole représentée par l'équation (2), on pourrait se proposer de construire les droites qui passent par les pieds des différentes normales, prises deux à deux. Pour cela, multiplions l'équation (1) par un facteur indéterminé λ, et ajoutons à l'équation (2), nous aurons :

$$\lambda a^2Y^2+c^2XY+\lambda b^2X^2-a^2pY+b^2qX-\lambda a^2b^2=0, \qquad (10)$$

équation d'un lieu passant par les pieds des différentes normales. Cette équation, comparée à

$$AY^2+BXY+CX^2+DY+EX+F=0, \qquad (11)$$

donne :

$$A=\lambda a^2,\ B=c^2,\ C=\lambda b^2,\ D=-a^2p,\ E=b^2q,\ F=-\lambda a^2b^2.$$

Or, pour que l'équation (11) représente le système de deux droites concourantes, il faut que l'on ait

$$(BD-2AE)^2=(B^2-4AC)(D^2-4AF),$$

ou

$$AE^2+B^2F+CD^2-BDE-4ACF=0,$$

ou enfin

$$\lambda^3+\frac{a^2p^2+b^2q^2-c^4}{4a^2b^2}\lambda+\frac{c^2pq}{4a^2b^2}=0. \qquad (12)$$

Telle est la relation à laquelle doit satisfaire le facteur λ pour que l'équation (10) représente deux droites. Cette relation, nécessaire, n'est cependant pas suffisante : il faut encore que l'on ait $B^2-4Ac>0$. Or, il est facile de reconnaître que les racines réelles de l'équation (12) sont comprises entre $+\frac{c^2}{2ab}$ et $-\frac{c^2}{2ab}$; donc $\lambda^2<\frac{c^4}{4a^2b^2}$, $c^4-4a^2b^2\lambda^2>0$;

ou, d'après les valeurs de A, B, C, $B^2 - 4AC > 0$. Il est donc certain que chaque valeur réelle de λ, tirée de l'équation (12), fournira un système de droites concourantes passant par les pieds des normales menées du point donné à l'ellipse donnée.

9. Si l'équation (12) a ses trois racines réelles, il y aura trois systèmes de droites passant par les pieds des normales; c'est-à-dire que ces droites formeront un quadrilatère complet avec ses deux diagonales, et qu'il y aura quatre normales, etc.

10. La condition de réalité des trois racines de l'équation (12) est :

$$(a^2p^2 + b^2q^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4p^2q^2 < 0. \qquad (13)$$

Pour tous les points situés intérieurement à la développée de l'ellipse, on a :

$$(ap)^{\frac{2}{3}} + (bq)^{\frac{2}{3}} < c^{\frac{4}{3}};$$

d'où, en élevant les deux membres à la troisième puissance :

$$a^2p^2 + b^2q^2 - c^4 + 3(abpq)^{\frac{2}{3}}[(ap)^{\frac{2}{3}} + (bq)^{\frac{2}{3}}] < 0;$$

et, à plus forte raison :

$$a^2p^2 + b^2q^2 - c^4 + 3(abpq)^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}} < 0;$$

condition qui rentre dans (13). Donc cette dernière exprime que, par tout point intérieur à la développée de l'ellipse, on pourra mener quatre normales à cette courbe, etc.

11. Remarquons enfin que ce qui précède donne le moyen de ramener la résolution de l'équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième.