

E. CATALAN

**Solution de la question 46. Théorème de géométrie sur les pyramides**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6 (1847), p. 353-356.

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_\\_353\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__353_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

SOLUTION DE LA QUESTION 46 (t. I, p. 517).

*Théorème de géométrie sur les pyramides.*

**PAR E. CATALAN.**

*De toutes les pyramides ayant même angle polyèdre au sommet et même hauteur, la plus petite en volume a pour centre de gravité de sa base le pied de sa hauteur.*

La base est déterminée par un plan tangent à une sphère ayant pour centre le sommet de la pyramide, et pour rayon la hauteur, que nous adoptons pour unité.

Prenons le sommet pour origine des coordonnées rectangulaires; chaque arête sera déterminée par les angles qu'elle forme avec les trois axes.

Soient  $x, y, z$  les coordonnées du point où le plan de la base touche la sphère, nous aurons :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (1)$$

Soient ensuite  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles que forme, avec les axes, la première arête, et  $x_1, y_1, z_1$  les coordonnées du point où cette droite perce le plan tangent, nous aurons encore :

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 1; \quad \frac{x_1}{\cos \alpha} = \frac{y_1}{\cos \beta} = \frac{z_1}{\cos \gamma} = \frac{1}{l_1} \quad (2)$$

en posant :

$$l_i = x \cos \alpha_i + y \cos \beta_i + z \cos \gamma_i. \quad (3)$$

$x_i, y_i, z_i$  sont les coordonnées du premier sommet de la base, et il est facile de voir que  $l_i$  représente la longueur de l'arête qui répond à ce sommet.

On aurait des équations de même forme pour les autres sommets.

Projetons, sur le plan des  $xy$ , la base de la pyramide, et soit  $2C$  l'aire de cette projection, nous aurons, par une formule due à *de Stainville* :

$$2C = \sum_{\alpha} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i). \quad (4)$$

Menons, de l'origine des coordonnées, des rayons vecteurs  $\delta_1, \delta_2, \dots$  aux différents sommets du polygone situé sur le plan des  $xy$ ; soient  $\theta_1, \theta_2, \dots$  les angles formés par ces droites avec la partie positive de l'axe des  $x$ , nous aurons :

$$\begin{aligned} x_i &= \delta_i \cos \theta_i, & x_2 &= \delta_2 \cos \theta_2 \dots \\ y_i &= \delta_i \sin \theta_i, & y_2 &= \delta_2 \sin \theta_2 \dots \end{aligned}$$

donc

$$x_i y_2 - x_2 y_i = \delta_i \delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_i),$$

et comme

$$\delta_i = l_i \sin \gamma_i, \quad \delta_2 = l_2 \sin \gamma_2 \dots,$$

la formule (4) devient :

$$2C = \sum l_i l_2 \sin \gamma_i \sin \gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_i). \quad (5)$$

Actuellement l'angle que forme la base de la pyramide avec le plan des  $xy$ , a pour cosinus  $z$ ; donc, en représentant par  $2P$  l'aire de cette base,

$$2P = \frac{1}{z} \sum l_i l_2 \sin \gamma_i \sin \gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_i). \quad (6)$$

Dans cette dernière équation,  $l_1, l_2, l_3, \dots$  sont des fonctions de

$x, y, z$ ; les autres quantités sont indépendantes de ces variables : d'ailleurs, comme le *minimum* du volume répond évidemment au *minimum* de la base, la question est ramenée à un problème de calcul différentiel.

Posons  $\Sigma l_1 l_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = F(x, y, z)$ ; en différenciant la formule (6), par rapport aux trois variables, et égalant à zéro cette différentielle, nous aurons :

$$z^2 \left( \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz \right) - z dz F(x, y, z) = 0.$$

A cause de l'équation (1), on a  $x dx + y dy + z dz = 0$ ; donc l'équation précédente devient :

$$z^2 \left( \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy \right) + \left( F - z \frac{dF}{dz} \right) (x dx + y dy) = 0.$$

Actuellement  $x$  et  $y$  sont des variables indépendantes, donc

$$z^2 \frac{dF}{dx} + x \left( F - z \frac{dF}{dz} \right) = 0, \quad z^2 \frac{dF}{dy} + y \left( F - z \frac{dF}{dz} \right) = 0.$$

Je multiplie la première équation par  $y$ , la seconde par  $x$ , et je retranche; ce qui me donne simplement :

$$y \frac{dF}{dx} = x \frac{dF}{dy}. \quad (7)$$

Développons cette formule ; on a :

$$\frac{d.l_1 l_2}{dx} = l_1 \frac{dl_2}{dx} + l_2 \frac{dl_1}{dx} = l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos \alpha_1 = + l_1 l_2 (x_1 + x_2);$$

le premier membre de l'équation (7) équivaut donc à

$$y \Sigma l_1 l_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot (x_1 + x_2) = y \Sigma \delta_1 \delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot (x_1 + x_2).$$

$\delta_1 \delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$  est le double du triangle ayant pour côtés les deux rayons vecteurs  $\delta_1$  et  $\delta_2$ ;  $x_1 + x_2$  est le double de l'abscisse du milieu de sa base; appelons  $t$ , l'aire de ce

triangle élémentaire, et  $g_i$  l'abscisse de son centre de gravité, nous aurons :

$$\Sigma \delta_i \lambda_i \sin(\theta_i - \theta_i) \cdot (x_i + x_i) = 6 \Sigma t_i g_i = 12CX.$$

En désignant par X l'abscisse du centre de gravité de la base, l'équation (7) devient donc :

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y}; \quad (8)$$

ainsi les coordonnées du point de contact cherché sont proportionnelles à celles du centre de gravité de la base : ce qui démontre le théorème. (Août 1840.)

---