

E. CATALAN

**Sur les foyers des courbes d'intersection  
de deux surfaces du second degré**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6  
(1847), p. 421-424.

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_\\_421\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__421_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

SUR LES  
FOYERS DES COURBES D'INTERSECTION

*De deux surfaces du second degré.*

**PAR E. CATALAN.**

---

Si l'on appelle *foyer* d'une courbe dans l'espace, un point tel que sa distance à un point quelconque de cette courbe soit une fonction entière, du premier degré, des coordonnées de ce dernier point ; on peut se proposer de chercher dans quel cas l'intersection de deux surfaces du second degré a des foyers.

Représentons par  $\alpha, \beta, \gamma$  les coordonnées rectangulaires du foyer cherché, et par  $x, y, z$ , celles d'un point quelconque de la courbe ; nous devons avoir, pour tous les points de la courbe d'intersection,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = (mx + ny + pr + q)^2. \quad (1)$$

Or, cette équation (1) peut être regardée comme une conséquence des deux équations :

$$\begin{aligned} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 &= R^2, \\ mx + ny + pr + q &= R, \end{aligned}$$

lesquelles représentent respectivement une sphère de centre fixe et de rayon variable, et un plan parallèle à un plan donné ; conséquemment, cette équation (1) représente une *surface de révolution sur laquelle doit se trouver la courbe donnée.*

Il faut donc, pour que l'intersection de deux surfaces du second degré puisse avoir un foyer, que cette intersection soit située sur une surface de révolution, du second degré.

Cette condition *nécessaire* est *suffisante*, car il est évident

que la surface engendrée par une conique tournant autour de l'axe focal, a pour foyers ceux de la section méridienne.

La question ci-dessus est donc ramenée à cette autre :  
*Dans quel cas l'intersection de deux surfaces de second degré appartient-elle à une surface de révolution du second degré ?*

Si l'on prenait les équations des deux surfaces sous la forme la plus générale, on arriverait très-péniblement à la condition cherchée ; pour simplifier, on peut supposer que l'une des deux équations est ramenée à la forme

$$(2) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + D = 0,$$

l'autre étant

$$(3) \quad ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0.$$

L'intersection des deux surfaces devant être située sur une surface de révolution, il doit exister un facteur  $\lambda$  tel, que

$$(4) \quad (\lambda A + a)x^2 + (\lambda A' + a')y^2 + (\lambda A'' + a'')z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy + 2(\lambda C + c)x + 2c'y + 2c''z + (\lambda D + d) = 0,$$

représente cette surface de révolution.

En employant les deux équations de conditions connues (\*), éliminant  $\lambda$ , et développant, on trouve

$$A \left[ a' - a'' + b \left( \frac{b'}{b''} - \frac{b''}{b'} \right) \right] + A' \left[ a'' - a + b' \left( \frac{b''}{b} - \frac{b}{b''} \right) \right] + A'' \left[ a - a' + b'' \left( \frac{b}{b'} - \frac{b'}{b} \right) \right] = 0. \quad (5)$$

Telle est la relation cherchée.

Cette relation étant peu susceptible d'une interprétation géométrique, il vaut mieux supposer que les deux surfaces données se coupent en effet suivant une courbe tracée sur une surface de révolution, et prendre pour axe des  $z$  l'axe de rotation, ou seulement une parallèle à cet axe.

---

(\*) Analyse appliquée de Leroy, 3<sup>e</sup> édit., p. 200.

Alors, en supposant que les équations des deux surfaces données soient

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + \dots = 0, \quad (6)$$

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + \dots = 0, \quad (7)$$

il faudra qu'il existe entre les coefficients des relations telles, que l'équation

$$(\lambda A + a)x^2 + (\lambda A' + a')y^2 + (\lambda A'' + a'')z^2 + \dots = 0 \quad (8)$$

représente une surface de révolution autour d'une droite parallèle à l'axe des  $z$ . Ceci exige que

$$\lambda A + a = \lambda A' + a', \quad \lambda B + b = 0, \quad \lambda B' + b' = 0, \quad \lambda B'' + b'' = 0;$$

d'où l'on conclut généralement

$$\frac{b}{B} = \frac{b'}{B'} = \frac{b''}{B''} = \frac{a - a'}{A - A'}. \quad (9)$$

Si donc deux surfaces de second degré jouissent de la propriété énoncée, il devra arriver, *en général*, que les équations de ces deux surfaces puissent être ramenées à

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

$$(A + \delta)x^2 + (A' + \delta)y^2 + a''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0.$$

Si, dans ces formules (9), trois des rapports sont  $\frac{0}{0}$ , le quatrième rapport est égal à  $-\lambda$ ; et les deux surfaces jouissent de la propriété demandée. Ainsi, en particulier,

*Si deux surfaces du second degré ont leurs plans principaux parallèles chacun à chacun, leur intersection est toujours sur une surface de révolution.*

Cela fait voir, comme l'a énoncé Jacobi (\*), que *chaque ligne de courbure d'un ellipsoïde a deux foyers*, etc.

(\*) Liouville, XI, 237.

J'ai laissé de côté une circonstance qu'il est bon de noter.

On sait qu'à une ellipse donnée correspond toujours une hyperbole, dont le plan est perpendiculaire à celui de l'ellipse, et qui est telle, que chacun de ses points est un *foyer* relativement à la première courbe; c'est-à-dire que la distance d'un point quelconque de l'ellipse à un point quelconque de l'hyperbole est une fonction rationnelle des coordonnées du point pris sur l'ellipse. Par analogie, on pourrait supposer que l'intersection d'un ellipsoïde de révolution avec une surface du second degré a des foyers autres que ceux de l'ellipse méridienne; on pourrait supposer même qu'à une courbe quelconque tracée sur un ellipsoïde de révolution, correspond toujours une courbe *focale*.

Il est facile de voir que ces suppositions ne seraient pas fondées.

Considérons, pour un instant, une ellipse et son hyperbole *focale*. Lorsque ces deux courbes tournent autour de leur axe commun, elles engendrent respectivement un ellipsoïde et un hyperboloïde de révolution. Si l'on prend un point *particulier* sur l'ellipsoïde, il aura pour ligne focale l'hyperbole déterminée par un plan méridien perpendiculaire à celui qui passe en ce point.

Pour un autre point de l'ellipsoïde, non situé sur le méridien, il y aura une autre hyperbole focale, et ainsi de suite.

Il suit de là que si l'on trace une ligne quelconque sur l'ellipsoïde, le lieu des foyers relatifs aux divers points de cette ligne, sera l'enveloppe des hyperboles correspondant à ces divers points : or, toutes ces hyperboles n'ont que deux points communs, savoir, les sommets réels de l'hyperboloïde.