E. CATALAN

Note sur les sphères tangentes à quatre plans donnés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 253-260.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__253_0>

NOTE

Sur les sphères tangentes à quatre plans donnés.

PAR E. CATALAN.

On sait que si quatre plans se coupent de manière à former un tétraèdre, on peut généralement construire huit sphères tangentes à ces quatre plans (*). De ces huit sphères, la *première*, intérieure au tétraèdre, est appelée *sphère inscrite*; les *quatre* suivantes sont tangentes chacune à une face du tétraèdre et aux prolongements des trois autres faces : elles sont dites *ex-inscrites*; enfin chacune des *trois* dernières, inscrite dans l'angle dièdre formé par deux faces du tétraèdre ou par les prolongements de ces deux faces, touche aussi les plans des deux autres faces. Ces *trois* dernières sphères se réduisent à *deux* ou à *une* dans certains cas particuliers, dont on peut voir la discussion dans l'ouvrage de M. *Olivier*. Je me suis proposé, dans cette note, d'indiquer les relations qui existent entre les rayons de toutes ces sphères. Je donne aussi, sous une forme assez simple, les valeurs absolues de ces rayons, en fonction des éléments du tétraèdre formé par les plans donnés.

I.

Soient :

A, B, C, D, les aires des quatre faces du tétraèdre;
V le volume du tétraèdre;
r le rayon de la sphère inscrite;

(*) Geometrie descriptive de M. Leroy; Developpements de Geométrie descriptive par M. T. Olivier

α, β, γ, δ, les rayons des quatre sphères *ex-inscrites;*
R_1, R_2, R_3, les rayons des trois dernières sphères.

Nous supposerons, pour fixer les idées, $A > B > C > D$.

Si l'on joint par des droites le centre d'une quelconque des sphères aux sommets du tétraèdre donné, on le décomposera en quatre tétraèdres, ayant pour bases les faces du tétraèdre donné, pour hauteur commune le rayon de la sphère, et pour sommet commun le centre de la sphère. Il est facile de voir, en outre, que cette construction appliquée à la sphère inscrite, donnera quatre tétraèdres *additifs*. La même construction, appliquée à une sphère ex-inscrite, donnera lieu à trois tétraèdres additifs et à un tétraèdre soustractif; enfin, elle donnera, pour chacune des trois autres sphères, deux tétraèdres additifs et deux tétraèdres soustractifs. Nous aurons donc, en appliquant à chacune de ces décompositions l'expression ordinaire du volume d'une pyramide, ces trois groupes d'équations :

$$\frac{3V}{r} = A + B + C + D, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{3V}{\alpha} &= B + C + D - A, \\ \frac{3V}{\beta} &= C + D + A - B, \\ \frac{3V}{\gamma} &= D + A + B - C, \\ \frac{3V}{\delta} &= A + B + C - D, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{3V}{R_1} &= A + B - C - D, \\ \frac{3V}{R_2} &= A + C - B - D, \\ \frac{3V}{R_3} &= A + D - B - C, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

II.

La somme des équations (2) donne :

$$3V\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)=2(A+B+C+D);$$

d'où, à cause de l'équation (1) ·

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{2}{r}. \qquad (4)$$

Ainsi *la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites* est égale *à deux fois l'inverse du rayon de la sphère inscrite.*

III.

Les équations (3) donnent :

$$3V\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=3A-B-C-D.$$

D'ailleurs, si de la somme des trois dernières équations du groupe (2), on retranche la première multipliée par 3, on obtient :

$$3V\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{3}{\alpha}\right)=6A-2B-2C-2D;$$

donc

$$2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{3}{\alpha}; \qquad (5)$$

c'est-à-dire que, *si de la somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites opposées aux petites faces du tétraèdre on retranche trois fois l'inverse du rayon de la sphère ex-inscrite opposée à la grande face, on obtient pour résultat deux fois la somme des inverses des rayons des sphères de la troisième espèce.*

IV.

D'autres combinaisons des équations (2) et (3) donneront encore :

$$2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)=\frac{3}{\delta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}, \qquad (6)$$

$$2\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_1}\right)=\frac{3}{\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}, \qquad (7)$$

$$2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{3}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\delta}, \qquad (8)$$

V.

Si de l'équation (5) on retranche successivement les équations (6), (7), (8), on obtient :

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{R_3}&=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha},\\ \frac{2}{R_1}&=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha},\\ \frac{2}{R_2}&=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Ces dernières équations prouvent que *l'inverse du rayon de la sphère inscrite dans l'angle dièdre formé par le prolongement de deux faces, est égal à la demi-somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites opposées aux deux autres faces, moins la demi-somme des inverses des rayons des sphères ex-inscrites opposées aux deux premières faces.*

Parmi les équations que nous venons de trouver, il y en a qui rentrent dans les autres ; ainsi l'équation (5) est une conséquence, soit des équations (6), (7), (8), soit des équations (9).

Mais ces dernières, jointes à l'équation (4), donnent quatre équations distinctes.

VI.

Si, dans les équations (3) on suppose $A+D=B+C$, on trouve $R_3=\infty$. Ainsi, *quand la somme des aires de deux des faces du tétraèdre est égale à la somme des aires des deux autres faces, les sphères de la troisième espèce se réduisent à deux.*

Si, avec $A+D=B+C$, nous supposons $D=C$, d'où $A=B$, nous aurons en même temps $R_2=\infty$, $R_3=\infty$; *les sphères de la troisième espèce se réduisent à une, si les faces du tétraèdre sont équivalentes deux à deux.*

Enfin, si les quatre faces du tétraèdre sont équivalentes entre elles, $R_1=\infty$, $R_2=\infty$, $R_3=\infty$, et les sphères inscrites dans les angles dièdres opposés à ceux du tétraèdre se transportent toutes les trois à l'infini.

VII.

Proposons-nous maintenant de déterminer les rayons des différentes sphères. Afin d'avoir des valeurs simples, nous prendrons pour éléments du tétraèdre formé par les quatre plans, les trois côtés a, b, c de la face D, et les inclinaisons λ, μ, ν de D sur les trois autres faces A, B, C.

D'après les équations (1), (2), (3), les rayons des différentes sphères seront connus, si nous exprimons, en fonction des données, les aires A, B, C, D et le volume V.

Du sommet opposé à la face D, menons la perpendiculaire H sur cette face, et les perpendiculaires p, q, r sur les côtés a, b, c. En appelant p', q', r' les projections de ces perpendiculaires sur la face D, nous aurons évidemment :

$$p'=p\cos\lambda,\quad q'=q\cos\mu,\quad r'=r\cos\nu,$$
$$H=p\sin\lambda=q\sin\mu=r\sin\nu;$$

puis, comme il est facile de s'en assurer :

$$2D=ap'+bq'+cr',$$
$$2A=ap,\quad 2B=bq,\quad 2C=cr.$$

Ces équations donnent

$$p=\frac{\mathrm{H}}{\sin\lambda},\quad q=\frac{\mathrm{H}}{\sin\mu},\quad r=\frac{\mathrm{H}}{\sin\nu},$$
$$p'=\mathrm{H}\cot\lambda,\quad q'=\mathrm{H}\cot\mu,\quad r'=\mathrm{H}\cot\nu,$$
$$2\mathrm{D}=\mathrm{H}(a\cot\lambda+b\cot\mu+c\cot\nu).$$

La quantité $a\cot\lambda+b\cot\mu+c\cot\nu$ est une certaine longueur. Pour abréger, représentons-la par $2l$; nous aurons :

$$\mathrm{H}=\frac{\mathrm{D}}{l},\ \mathrm{A}=\frac{\mathrm{D}}{2l}\frac{a}{\sin\lambda},\ \mathrm{B}=\frac{\mathrm{D}}{2l}\frac{b}{\sin\mu},\ \mathrm{C}=\frac{\mathrm{D}}{2l}\frac{c}{\sin\nu}.$$

Actuellement, le volume V du tétraèdre est représenté par $\frac{1}{3}\mathrm{DH}$; donc

$$3\mathrm{V}=\frac{\mathrm{D}^2}{l}.$$

Transportons cette valeur et celles de A, B, C dans les équations (1), (2), (3), nous obtiendrons :

$$\frac{\mathrm{D}}{r}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{b}{\sin\mu}+\frac{c}{\sin\nu}\right)+l,$$
$$\frac{\mathrm{D}}{\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sin\mu}+\frac{c}{\sin\nu}-\frac{a}{\sin\lambda}\right)+l,$$
$$\frac{\mathrm{D}}{\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\sin\nu}+\frac{a}{\sin\lambda}-\frac{b}{\sin\mu}\right)+l,$$
$$\frac{\mathrm{D}}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{b}{\sin\mu}-\frac{c}{\sin\nu}\right)+l,$$
$$\frac{\mathrm{D}}{\delta}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{b}{\sin\mu}+\frac{c}{\sin\nu}\right)-l,$$
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{b}{\sin\mu}-\frac{c}{\sin\nu}\right)-l,$$
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}+\frac{c}{\sin\nu}-\frac{b}{\sin\mu}\right)-l,$$
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\lambda}-\frac{b}{\sin\mu}-\frac{c}{\sin\nu}\right)+l.$$

Si, dans la première équation, nous remplaçons l par sa valeur, il vient :

$$\frac{D}{r}=\frac{1}{2}\left[\frac{a(1+\cos\lambda)}{\sin\lambda}+\frac{b(1+\cos\mu)}{\sin\mu}+\frac{c(1+\cos\nu)}{\sin\nu}\right],$$

ou

$$\frac{D}{r}=\frac{1}{2}\left[a\cot\frac{1}{2}\lambda+b\cot\frac{1}{2}\mu+c\cot\frac{1}{2}\nu\right];$$

puis

$$r=\frac{2D}{a\cot\frac{1}{2}\lambda+b\cot\frac{1}{2}\mu+c\cot\frac{1}{2}\nu}.$$

Ces valeurs pourraient se déduire immédiatement de la formule

$$H=\frac{2D}{a\cot\lambda+b\cot\mu+c\cot\nu}.$$

Des simplifications analogues se rencontrent dans les autres équations, et l'on trouve définitivement :

$$\alpha=\frac{2D}{-a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\lambda+b\cot\frac{1}{2}\mu+c\cot\frac{1}{2}\nu},$$

$$\beta=\frac{2D}{a\cot\frac{1}{2}\lambda-b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mu+c\cot\frac{1}{2}\nu},$$

$$\gamma=\frac{2D}{a\cot\frac{1}{2}\lambda+b\cot\frac{1}{2}\mu-c\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\nu},$$

$$\delta=\frac{2D}{a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\lambda+b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mu+c\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\nu},$$

$$R_1=\frac{2D}{a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\lambda+b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mu-c\cot\frac{1}{2}\nu},$$

$$R_2=\frac{2D}{a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\lambda-b\cot\frac{1}{2}\mu+c\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\nu},$$

$$R_3=\frac{2D}{a\cot\frac{1}{2}\lambda-b\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mu-c\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\nu}.$$

Note. **M. Aubert, de Christiania, en Norwége, démontre les relations suivantes. (Crelle, t. V, p. 163, 1830.)**

$$r^{-1}=\delta^{-1}+\gamma^{-1}+R_1^{-1}=\delta^{-1}+\beta^{-1}+R_2^{-1}=\delta^{-1}+\alpha^{-1}\pm R_3^{-1},$$

$$r^{-1}-\alpha^{-1}-\beta^{-1}-\gamma^{-1}-\delta^{-1}+R_1^{-1}+R_2^{-1}\pm R_3^{-1}=0,$$

$$\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}+\delta^{-2}=r^{-2}+R_1^{-2}+R_2^{-2}+R_3^{-2}.$$

Ceci se rapporte à la notation de M. Catalan; voici celle de M. Aubert, qui me semble plus mnémonique : R, rayon de la sphère inscrite; R_1, R_2, R_3, R_4, rayons des sphères ex-inscrites et rangés par ordre de grandeur; R_5, R_6, R_7, rayons des sphères ex-inscrites dans les bi-angles et aussi rangés par ordre de grandeur.