

E. CATALAN

Lettre. Sur les fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4 (1845), p. 257-259.

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__257_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LETTRE

Sur les fractions continues.

Mon cher monsieur Terquem,

Le dernier numéro des *Nouvelles Annales* contient une lettre de M. *Guilmin*, relative à ma note sur les fractions continues périodiques. Cette lettre demande une réponse : soyez assez bon pour accueillir celle-ci.

M. Guilmin dit d'abord : « M. Catalan démontre une proposition dont voici l'énoncé : *Dans une fraction continue périodique, le nombre des périodes étant illimité, il est indifférent d'en prendre une de plus ou une de moins.* »

Cet énoncé n'est pas de moi, et je serais fâché qu'il en fût.

M. Guilmin dit ensuite :

« Soient

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{y}}} \quad y = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \text{etc.}}}}}$$

» Si on forme successivement les réduites de x et de y , en prenant dans chacune le même nombre de quotients incomplets, on aura chaque fois le même résultat pour les deux; or une réduite $\frac{Q}{Q'}$ obtenue à cette condition, diffère de x et de y , dans le même sens d'une quantité moindre que... » etc.

J'avoue qu'il m'est absolument impossible de suivre le

raisonnement de M. Guilmin, et d'attacher un sens clair à des phrases telles que celles-ci :

« Si on forme successivement les réduites de x et de y ,
» en prenant dans chacune le même nombre de quotients in-
» complets » ;

» On aura chaque fois le même résultat pour les deux » ;

» Une réduite commune obtenue à cette condition » ;

» Diffère dans le même sens d'une quantité... ; »

etc.

Je voudrais, encore un coup, débrouiller cet écheveau, mais je ne puis.

M. Guilmin dit plus loin : « M. Catalan a moins eu peut-être pour objet de démontrer cette proposition que d'établir les théorèmes, » etc.

La supposition de M. Guilmin est très-fondée. Si j'avais voulu seulement démontrer la proposition dont il s'agit, j'aurais dit :

« La différence entre deux réduites consécutives $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, peut devenir aussi petite que l'on voudra, si $\frac{P}{P'}$ occupe un rang assez éloigné ; donc la différence entre deux réduites $\frac{P}{P'}$, $\frac{U}{U'}$, distantes l'une de l'autre d'un nombre déterminé de rangs, peut également devenir moindre qu'une quantité donnée ; donc on pourra satisfaire à l'inégalité $y_n - y_{n+1} < \delta$ »

Je suis content d'avoir laissé à M. Guilmin l'occasion de chercher une démonstration.

La note *incriminée* contient la formule :

$$y_n = \frac{Py_{n-1} + N}{P'y_{n-1} + N'}$$

dans laquelle P , P' , N , N' sont des constantes. M. Guilmin trouve plus commode d'employer cette autre formule :

$$y_{n+1} = \frac{Py_n + N}{P'y_n + N'}$$

dans laquelle P, P', N, N' sont *des variables* : permis à lui.

Enfin, M. Guilmin enlève quelques mots et quelques virgules à cette malencontreuse note ; il supprime quelques calculs ; il appelle A ce que j'avais appelé Q, etc. Ces *perfectionnements* lui permettent de démontrer en deux pages une partie de ce que j'avais démontré en trois pages et demie. Ici, je n'ai rien à dire : car l'économie est une belle chose !

Agréez, mon cher M. Terquem, l'assurance de mes sentiments affectueux et dévoués.

E. CATALAN.

21 avril 1845.