NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Note sur la toroïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 553-555.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__553_1>

NOTE SUR LA TOROÏDE

PAR E. CATALAN,
Répetiteur à l'École polytechnique.

Pour obtenir l'équation de cette courbe, il faut, ainsi que l'a fait voir M. Cauchy, éliminer θ entre les deux équations

$$\frac{a^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=1,\quad \frac{\theta^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{\theta^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=k^2.$$

(*Nouvelles Annales*, t. III, p. 455).

Cette élimination se fait assez simplement de la manière suivante.

Chassant les dénominateurs, on obtient d'abord :

$$a^2(\theta+b^2)^2x^2+b^2(\theta+a^2)^2y^2=(\theta+a^2)^2(\theta+b^2)^2, \quad (1)$$
$$\theta^2(\theta+b^2)^2x^2+\theta^2(\theta+a^2)^2y^2=k^2(\theta+a^2)^2(\theta+b^2)^2. \quad (2)$$

Multipliant l'équation (1) par θ^2, l'équation (2) par a^2 ; retranchant membre à membre, et supprimant le facteur $(\theta+a^2)^2$, j'obtiens :

$$(a^2-b^2)\theta^2y^2=(\theta+b^2)^2(a^2k^2-\theta^2). \quad (3)$$

On aurait de même :

$$(a^2-b^2)\theta^2x^2=(\theta+a^2)^2(\theta^2-b^2k^2). \quad (4)$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (3) et (4), et si l'on supprime le facteur a^2-b^2, commun aux deux membres de l'équation résultante, on obtient :

$$\theta^2(x^2+y^2)=\theta^2(a^2+b^2+2\theta)+k^2(\theta^2-a^2b^2). \quad (5)$$

Multiplions l'équation (3) par a^2, l'équation (4) par b^2, ajoutons, et supprimons le facteur $(a^2-b^2)\theta$; il viendra :

$$\theta(a^2y^2+b^2x^2)=\theta(a^2b^2-\theta^2)+k^2\theta(a^2+b^2)+2a^2b^2k^2. \quad (6)$$

Ces deux dernières équations étant ordonnées par rapport à θ, deviennent :

$$2\theta^3-\theta^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)-a^2b^2k^2=0, \quad (5')$$
$$\theta^3+\theta(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)-2a^2b^2k^2=0. \quad (6')$$

J'élimine tour à tour, entre ces deux dernières équations, le terme en θ^3 et le terme indépendant ; j'obtiens ainsi

$$A\theta^2+2B\theta-3C=0, \quad (7) \qquad 3\theta^2-2A\theta-B=0; \quad (8)$$

en posant, pour abréger,

$$A=x^2+y^2-a^2-b^2-k^2,\quad B=a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2,$$
$$C=a^2b^2k^2.$$

Les équations (7) et (8), traitées comme les deux précédentes, donnent

$$2(A^2+3B)\theta+(AB-9C)=0, \qquad (9)$$

$$(AB-9C)\theta+2(B^2+3AC)=0. \qquad (10)$$

Enfin, l'élimination de θ entre ces deux dernières équations, conduit à

$$(AB-9C)^2=4(A^2+3B)(B^2+3AC).$$

L'équation de la toroïde est donc

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^2\\
&+4a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^3-27a^4b^4k^4\\
&+18a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\\
&+4(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^3=0.
\end{aligned}$$