

E. CATALAN

## Sur les fractions décimales périodiques

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 1 (1842), p. 457-470.

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1842\\_1\\_1\\_\\_457\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__457_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

SUR LES  
FRACTIONS DECIMALES PERIODIQUES,

PAR M. CATALAN (E).

---

La note suivante ne contient rien de neuf: si je me décide à la publier, c'est parce que la manière dont on présente ordinairement la théorie des fractions périodiques n'est, si je ne me trompe, ni très-logique, ni très-rigoureuse. En outre, cette théorie s'appuie assez naturellement sur le théorème de Fermat, et sur d'autres propriétés intéressantes. qu'il serait peut-être convenable de faire entrer dans les éléments (\*).

Dans tout ce qui va suivre, on supposera que la fraction ordinaire donnée est réduite à sa plus simple expression, et que son numérateur n'est pas terminé par zéro.

I. Lorsque le dénominateur ne renferme que les facteurs premiers 2 ou 5, la fraction est exactement réductible en décimales, le nombre des chiffres décimaux est égal au plus grand des exposants de 2 et 5 dans le dénominateur.

Soit la fraction  $\frac{13}{8000} = \frac{13}{2^6 \times 5^3}$ . En multipliant haut et bas par  $5^3$ , elle devient  $\frac{13 \times 5^3}{2^6 \times 5^6} = \frac{13 \times 5^3}{10^6}$ . Donc la fraction proposée est équivalente à une fraction décimale contenant six chiffres décimaux. On voit de plus, que l'on peut obtenir le nouveau numérateur sans effectuer de division.

---

(\*) En 1835, M. Midy, alors professeur au collège de Nantes, a publié un petit mémoire que ma note reproduit en grande partie. d'après ce que j'ai dit et dessus, cette conformité était inévitable.

II. *Dans tous les autres cas, la fraction donnée n'est pas exactement réductible en décimales, et elle conduit à une fraction périodique.*

Soit, s'il est possible  $\frac{23}{30} = \frac{763}{1000}$ . La première fraction étant irréductible, les deux termes de la seconde doivent être des multiples de ceux de la première; donc 1000 serait divisible par 30; ce qui est absurde, puisque 30 contient le facteur 3, qui n'entre pas dans 1000.

Si donc, on procède à la réduction de  $\frac{23}{30}$  en décimales, aucune division ne se fera exactement; et comme chaque reste est moindre que 30, il arrivera qu'à la 30<sup>e</sup> division au plus, on retombera sur un reste déjà obtenu. Ce reste étant suivi d'un zéro, donnera un dividende partiel, un quotient et un reste déjà obtenus, etc. Donc les quotients et les restes formeront deux suites périodiques: *le nombre des termes de chaque période sera moindre que le dénominateur.*

III. *Si le dénominateur est premier avec 10, la période décimale commence dès la virgule.*

Soit la fraction  $\frac{4024}{21}$ . Pour la réduire en décimales, on divise 4024 par 21, ce qui donne la partie entière de la fraction périodique; puis on écrit 0 à la droite du reste, on divise par 21; il résulte de là, que pour opérer cette réduction, on divise par 21 les quantités suivantes :

$$4024, \quad 4024 \times 10, \quad 4024 \times 10^2, \quad 4024 \times 10^3, \dots \quad (A)$$

La fraction  $\frac{4024}{21}$  donne lieu à une période, donc les restes fournis par les dividendes de la suite (A) doivent pareillement former une période. Supposons que  $4024 \times 10^i$  et  $4024 \times 10^n$  soient deux dividendes donnant des restes égaux leur différence devra être divisible par 21, donc

$$\frac{4024 \times 10^{14} - 4024 \times 10^4}{21} = \text{entier, ou } \frac{10^4(4024 \times 10^7 - 4024)}{21} = \text{entier.}$$

Et comme 21 est premier avec 10, il résulte d'un principe connu, que  $\frac{4024 \times 10^7 - 4024}{21} = \text{entier}$ . C'est-à-dire que le terme  $4024 \times 10^7$ , de la suite (A), étant divisé par 21, donne le même reste que 4024, divisé par 21. Autrement dit, la période des restes commence au premier dividende 4024, et la période décimale commence immédiatement après la virgule.

On pourrait se demander si cette dernière période ne peut pas commencer avant la virgule, c'est-à-dire si le chiffre des unités peut-être égal au dernier chiffre de la première période qui suit la virgule. Par exemple, peut-on avoir

$$\frac{4024}{21} = 191,61904\dot{1}61904\dot{1} \dots ?$$

D'après ce qui précède, il est évident que non.

Effectivement, soient Q et Q' les quotients de 4024 et de  $4024 \times 10^7$ , R étant le reste. On a

$$\begin{aligned} 4024 &= Q \times 21 + R, \\ 4024 \times 10^7 &= Q' \times 21 + R : \end{aligned}$$

d'où

$$4024 \times (10^7 - 1) = (Q' - Q) \times 21, \text{ ou } 4024 \times 999999 = (Q' - Q) \times 21.$$

Le premier membre n'est pas divisible par 10, donc le second ne l'est pas non plus; donc  $Q' - Q$  n'est pas terminé par zéro; ou, ce qui est la même chose,  $Q'$  et  $Q$  ne sont pas terminés par le même chiffre.

IV. Lorsque le dénominateur n'est pas premier avec 10, la période est précédée d'une partie décimale non périodique, renfermant autant de chiffres que l'indique le plus grand des exposants de 2 et 5 dans le dénominateur.

Soit la fraction  $\frac{17}{10500} = \frac{17}{21 \times 2 \times 5^3}$ . En multipliant les deux termes par  $2^2$ , elle devient  $\frac{17 \times 2^2}{21 \times 2^3 \times 5^3} = \frac{17 \times 2^2}{21 \times 10^3} = \frac{17 \times 2^2}{21} \times \frac{1}{10^3}$ . Si l'on réduit en décimales la fraction  $\frac{17 \times 2^2}{21} = \frac{68}{21}$ , on aura une période commençant dès la virgule, *et non avant*. Ensuite, pour multiplier cette quantité décimale par  $\frac{1}{10^3}$ , il faudra reculer la virgule de trois rangs vers la gauche.

V. LEMME. 1° Si N et A sont deux nombres premiers entre eux, les restes que l'on obtiendra en divisant par N les N—1 premiers multiples de A, seront tous différents ;

2° Si parmi ces multiples, on ne prend que ceux qui sont premiers avec N, les restes seront tous les nombres moindres que N et premiers avec N.

Soient les nombres 8 et 15, premiers entre eux Prenons les sept premiers multiples de 15 ; savoir

$$15 \times 1, 15 \times 2, 15 \times 3, 15 \times 4, 15 \times 5, 15 \times 6, 15 \times 7$$

Aucune division par 8, ne se fera exactement. Car soit, s'il est possible,  $\frac{15 \times 4}{8} =$  entier ; le diviseur 8 premier avec 15, devrait diviser 4 qui est moindre que 8

En second lieu, si deux de ces dividendes donnaient le même reste, leur différence devrait être divisible par 8. Or cette différence est un de nos multiples.

Il résulte de cette observation, que ces restes dont il s'agit seront les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dans un certain ordre. Et, en général, les restes seront les entiers 1, 2, 3, . . . N—1, dans un certain ordre.

Quant à la seconde partie du lemme, elle est évidente.

car si un dividende et un diviseur sont premiers entre eux, le reste est premier avec le diviseur.

Dans l'exemple que nous avons choisi, les dividendes sont :

$$15, 30, 45, 60, 75, 90, 105,$$

et les restes correspondants :

$$7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Si, parmi ces multiples de 15, on ne prend que ceux qui sont premiers avec 8 ; savoir :

$$15, 45, 75, 105,$$

les restes seront

$$7, 5, 3, 1,$$

et ces restes sont, comme nous l'avons énoncé, les nombres inférieurs et premiers à 8

Soient encore les nombres 14 et 33 premiers entre eux.

Nous aurons :

$$\text{dividendes : } 33 \times 1, 33 \times 2, 33 \times 3, 33 \times 4, 33 \times 5, 33 \times 6,$$

$$\text{restes : } 5, 10, 1, 6, 11, 2,$$

$$33 \times 7, 33 \times 8, 33 \times 9, 33 \times 10, 33 \times 11, 33 \times 12, 33 \times 13,$$

$$7, 12, 3, 8, 13, 4, 9.$$

Observons en passant que, d'après un principe connu, les termes de la seconde ligne se forment par voie d'addition et de soustraction. Ainsi le 1<sup>er</sup> reste étant 5, on a

$$2^{\text{e}} \text{ reste} = 5 + 5 = 10, \quad 2^{\text{e}} \text{ reste} = 10 + 5 - 14 = 1,$$

$$4^{\text{e}} \text{ reste} = 1 + 5 = 6, \quad \text{etc.}$$

Si, dans la première ligne, nous prenons ces dividendes premiers avec 14 ; savoir :

$$33 \times 1, 33 \times 3, 33 \times 5, 33 \times 9, 33 \times 11, 33 \times 13,$$

les restes seront

$$5, 1, 11, 3, 13, 9.$$

Ces restes sont inférieurs et premiers à 14.

VI. Si le dénominateur est premier, la période a un nombre de chiffres qui divise le dénominateur moins un.

Soit le dénominateur 17, et supposons pour plus de simplicité, que le numérateur soit 1. Les quantités

$$10 \times 1, \quad 10 \times 2, \quad 10 \times 3, \dots \quad 10 \times 16,$$

donneront, étant divisées par 17, des restes qui seront les nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \dots \quad 16,$$

dans un certain ordre.

Multiplions entre eux, tous les termes de la première ligne, et tous ceux de la seconde les produits, divisés par 17, doivent donner des restes égaux; donc leur différence est divisible par 17. Ainsi,

$$\frac{10^{16} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 16 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 16}{17} = \text{entier, ou } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 16 (10^{16} - 1)}{17} = \text{entier}$$

17 étant un nombre premier, doit diviser un des facteurs du numérateur. Les facteurs 1, 2, 3, ... 16 sont moindres que 17; donc  $\frac{10^{16} - 1}{17} = \text{entier}$

Si donc on divise par 17 les nombres

$$1, \quad 10, \quad 10^2, \dots \quad 10^{16}, \dots$$

le reste 1, provenant de la première division, se reproduira à la 17<sup>e</sup>. Autrement dit, quand on réduira  $\frac{1}{17}$  en décimales, la période sera telle, que le premier chiffre décimal sera égal au 17<sup>e</sup>, le deuxième égal au 18<sup>e</sup>, etc. Ceci exige évidemment que le nombre des chiffres de la période soit un diviseur de 16.

En réduisant  $\frac{1}{17}$  en décimales, on trouve

$$0,0588235294117647058 \dots$$

la période a 16 chiffres.  $\frac{1}{13}$  donne 0.076923076 .. la période a 6 chiffres, etc.

VII. *Théorème de Fermat.* Si  $P$  est un nombre premier qui ne divise pas  $N$ , la puissance  $P-1$  de  $N$ , étant diminuée de l'unité, donne un reste divisible par  $P$ ; ou

$$\frac{N^{P-1} - 1}{P} = \text{entier.}$$

La démonstration employée dans le paragraphe précédent est évidemment indépendante des nombres 17 et 10 que nous avons considérés; elle suppose seulement le nombre 17 premier et non diviseur de 10. Remplaçant donc 10 par  $N$  et 17 par  $P$ , on tombe sur le théorème de Fermat.

VIII. *Si le dénominateur de la fraction, au lieu d'être premier absolu, est seulement premier relativement à 10, la période a un nombre de chiffres qui divise le nombre des entiers moindres que le dénominateur, et premiers avec lui.*

Soit le dénominateur 33: divisons par ce nombre les multiples de 10, premiers avec 33, jusqu'à l'ordre  $33-1$ ; savoir:

$$10 \times 1, 10 \times 2, 10 \times 4, 10 \times 5, 10 \times 7, 10 \times 8, 10 \times 10, \\ 10 \times 13, \dots, 10 \times 32.$$

D'après le paragraphe V, les restes seront, dans un certain ordre, les nombres

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 7, \quad 8, \quad 10, \\ 13, \quad 32,$$

inférieurs et premiers à 33.

Donc, par le même raisonnement que ci-dessus, on aura,  $k$  désignant combien il y a de ces derniers nombres

$$\frac{1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 8 \times 10 \times 13 \times \dots \times 32 (10^k - 1)}{33} = \text{entier.}$$

33 est premier avec tous les facteurs, sauf le dernier; donc

$$\frac{10^k - 1}{33} = \text{entier.}$$

Ainsi, dans la réduction de  $\frac{1}{33}$  en décimales, le reste 1, qui se présente à la première division, se représentera à la  $(k+1)^{\text{e}}$ . On conclut de là que le nombre des chiffres de la période décimale doit diviser  $k$ .

Il sera démontré (XI) que  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  désignant les facteurs premiers inégaux du dénominateur, on a

$$k = D \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{\beta-1}{\beta} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma}.$$

On pourra donc facilement, dans chaque cas particulier, avoir une limite du nombre des chiffres de la période.

Par exemple, pour la fraction  $\frac{7}{33}$ , comme  $33 = 3 \times 11$ ,  $k = 33 \times \frac{2}{3} \times \frac{10}{11} = 20$ . Le nombre des chiffres sera 20, ou un diviseur de 20. Effectivement  $\frac{7}{33}$  donne la fraction 0,2121...

IX. *Généralisation du théorème de Fermat.* Si  $D$  est un nombre premier par rapport à  $N$ , et si  $k$  indique le nombre des entiers inférieurs et premiers à  $D$ , on a

$$\frac{N^k - 1}{D} = \text{entier}.$$

Ce théorème, qui donne celui de Fermat, quand  $D = P$ , se démontre de la même manière.

X. PROBLÈME. *Revenir d'une fraction décimale périodique à sa génératrice.*

1° Une fraction périodique simple est équivalente à une fraction ordinaire, qui a pour numérateur la période, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période :

2° Une fraction périodique mixte est équivalente à une fraction ordinaire, qui a pour numérateur l'ensemble de la partie non périodique et de la période, moins la partie non

périodique, et dont le dénominateur est un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.

Soit la fraction périodique 0,619047619047... Cherchons la fraction ordinaire qui, réduite en décimales conduirait à cette période.

Observons que les fractions  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{99}$ ,  $\frac{1}{999}$ , ..... réduites en décimales, conduiraient aux fractions périodiques 0,111... 0,010101... 0,001001001...; donc la fraction  $\frac{1}{999999}$  donnerait 0,000001000001..... Par suite, une fraction double, triple, de  $\frac{1}{999999}$ , produirait une période double, triple,... de (003001); et enfin  $\frac{619047}{999999}$ , réduite en décimales, donnerait la fraction périodique proposée.

Nous dirons alors que la fraction ordinaire  $\frac{619047}{999999}$  est la *génératrice* de 0,619047619, ... et nous regarderons ces deux quantités comme étant *équivalentes* (\*).

Soit maintenant la fraction périodique mixte 0,45652652... On peut la mettre sous la forme

$$0,45 + 0,00652652... = \frac{45}{100} + \frac{1}{100} \times 0,652652...$$

Cette dernière fraction périodique simple équivaut à  $\frac{652}{999}$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc la proposée} &= \frac{45}{100} + \frac{652}{99900} = \frac{45 \times 999 + 652}{99900} = \\ &= \frac{45000 - 45 + 652}{99900} = \frac{45652 - 45}{99900}. \end{aligned}$$

---

(\*) Dans un cours d'arithmétique, c'est seulement à l'article des Progressions par quotient, que l'on peut démontrer ce que nous admettons ici.

XI. PROBLÈME. *Trouver combien il y a, pour un nombre donné, d'entiers moindres que ce nombre, et premiers avec lui.*

Soit le nombre  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ .

Supposons que l'on écrive la suite des nombres naturels, de 1 à 360. Si, dans cette suite de termes, on efface tous ceux qui ont des facteurs communs avec 360, les nombres restant, seront premiers à 360. Soit donc la suite

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots 360. \quad (A)$$

Commençant par la gauche, je marque d'un trait tous les multiples de 2; savoir

$$2 \times 1, \quad 2 \times 2, \quad 2 \times 3, \dots 2 \times \frac{360}{2}.$$

La suite (A) devient ainsi

$$1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \dots 360. \quad (B)$$

Il est clair que les termes restant sont premiers avec 2 : leur nombre est  $360 - \frac{360}{2} = 360 \left(1 - \frac{1}{2}\right)$ . Actuellement j'efface de même les multiples de 3 :  $3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4, \dots 3 \times \frac{360}{3}$ . Mais parmi ces multiples, ceux qui contiennent le facteur 2, ont déjà été retranchés. Je ne dois donc faire attention qu'à ceux dans lesquels le multiplicateur de 3 est premier avec 2. Ces multiplicateurs forment la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \dots \frac{360}{3}, \quad (C)$$

donc, d'après ce qui vient d'être dit, le nombre de ceux qui sont premiers avec 2, est  $\frac{360}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right)$ . Ce nombre indique celui des termes à effacer dans la suite (B); en sorte que le nombre des termes non effacés sera

$$360 \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{360}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 360 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

La suite (B) devient alors

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, .. ... 360. (D)

Effaçons enfin les multiples de 5 : il y en a en tout  $\frac{360}{5}$ , parmi lesquels on ne doit compter que ceux qui sont premiers avec 2 et 3. Or, d'après ce que nous venons de voir dans la suite

$$1, 2, 3, 4, .. ... \frac{360}{5},$$

le nombre des termes premiers avec 2 et 3 est  $\frac{360}{5} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right)$ . C'est là aussi le nombre des termes qui restent à effacer dans la suite (D). Les termes restant définitivement seront donc en nombre

$$\begin{aligned} & 360 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{360}{5} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \\ & = 360 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

Cette dernière quantité indique donc le nombre des entiers inférieurs et premiers à 360. La démonstration est évidemment générale, et si N est un nombre entier, dont les facteurs premiers *inégaux* soient  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  on a

$$k = N \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{\beta-1}{\beta} \frac{\gamma-1}{\gamma} \dots$$

XII. Soit la fraction  $\frac{13}{49}$ , qui conduit à cette période de restes:

13, 32, 26, 15, 3, 30, 6, 11, 2, 22, 24, 44, 48, 39, 47, 29, 45, 9, 41, 18, 33, 36, 17, 23, 34, 46, 19, 43, 38, 37, 27, 25, 5, 1, 10, 2, 20, 4, 40, 8, 31, 16.

Prenons dans cette suite un certain nombre de termes, dont la somme soit un multiple de 49; par exemple 13, 11, 25. Je dis que les trois termes qui suivent respectivement ceux-ci, ont pour somme un multiple de 49.

En effet , les trois restes 13, 11, 25 donnent les dividendes 130, 110, 250, lesquels étant divisés par 49 conduisent à des quotients  $q$ ,  $q'$ ,  $q''$  et à des restes  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ . Par suite .

$$\begin{aligned} 130 &= 49.q + r, \\ 110 &= 49.q' + r', \\ 250 &= 49.q'' + r''. \end{aligned}$$

Donc en ajoutant  $\cdot 49 \times 10 = 49(q + q' + q'') + r + r' + r''$ .  
ou  $10 = q + q' + q'' + \frac{r + r' + r''}{49}$  : ce qui démontre la proposition énoncée.

XIII. *Ne considérons dans la période précédente, que deux restes dont la somme soit 49: par exemple 13 et 36. D'après, ce qui vient d'être démontré, la somme des deux restes suivants doit être un multiple de 49, et comme ils sont chacun moindre que ce diviseur, leur somme sera précisément 49. On observe en effet, dans les deux lignes ci-dessus, que tous les termes qui se correspondent verticalement ont 49 pour somme.*

En général, s'il existe deux termes dont la somme soit égale au diviseur, la période entière aura un nombre pair de termes: chaque terme de la première demi-période, ajouté au terme du même rang dans l'autre demi-période, donnera une somme égale au diviseur.

Cette circonstance se présentera toutes les fois que la période, provenant d'un dénominateur  $D$ , aura  $k$  termes (IX) car alors, comme on doit trouver pour restes tous les nombres premiers avec  $D$ , il y en aura au moins deux, qui ajoutés, donneront  $D$ .

XIV. *Réduisons en décimales la fraction  $\frac{1}{13}$ , dont le dénominateur est premier: la période des restes est 1, 10, 9, 12, 3, 4.*

Ecrivons cette période assez de fois pour obtenir 13 — 1 termes, nous aurons

$$1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10, 9, 12, 3, 4.$$

Actuellement, décomposons  $13 - 1$  ou  $12$ , en deux facteurs, par exemple en  $3 \cdot 4$  : je dis que si l'on prend dans la suite ci-dessus, 4 termes de 3 en 3, ou 3 termes de 4 en 4, on obtiendra pour somme, un multiple de 13.

Pour démontrer cette propriété, prenons les termes 10, 4, 12; et nommons R le reste de la division de  $10^4$  par 13, nous aurons évidemment

$$\begin{aligned} 10.R &= M.13 + 4, \\ 4.R &= M.13 + 12, \\ 12.R &= M.13 + 10, \end{aligned}$$

en désignant par  $M.13$  un multiple de 13, et en observant qu'après le reste 12, on doit nécessairement retomber sur le premier terme 10.

On déduit de ces équations

$$(10 + 4 + 12)R = M.13 + (10 + 4 + 12),$$

ou  $(10 + 4 + 12)(R - 1) = M.13.$

Mais  $R - 1$  est moindre que 13 qui est premier; donc

$$\frac{10 + 4 + 12}{13} = \text{entier.}$$

En général, si la fraction est  $\frac{N}{D}$ , si D est premier, et si  $D - 1 = mn$ ; la somme de  $n$  termes pris de  $m$  en  $m$ , est multiple de D.

*Observation. I.*— 10 est une racine primitive à l'égard de 7, c'est-à-dire que les 6 premières puissances de 10 divisées successivement par 7, donnent pour restes les 6 nombres qui précèdent 7. Le théorème de Fermat donne  $10^6 = \overset{.}{7} + 1$ . Nous désignons par un point placé sur le nombre, un multiple quelconque de ce nombre. On a donc aussi  $10^{6 \cdot 7} = \overset{.}{7} + 1$  : or  $6 \cdot 7$  est le double d'un nombre triangulaire. Ainsi  $6 \cdot 7 = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$ , donc

$$(10 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^5 \cdot 10^6)^2 = 7 \cdot \overset{.}{7} + 1$$

Otant les multiples de 7 qui se trouvent dans le premier membre, on obtient évidemment

$$(1.2.3.4.5.6)^2 = \dot{7} + 1,$$

d'où

$$(1.2.3.4.5.6)^2 - 1 = \dot{7},$$

$$(1.2.3.4.5.6 + 1)(1.2.3.4.5.6 - 1) = \dot{7}.$$

Or au nombre 7, on peut substituer un nombre premier quelconque, et au nombre 10, une racine primitive de ce nombre. On a donc en général, P désignant un nombre premier absolu

$$(1.2.3... (P-1))^2 = \dot{P} + 1.$$

Le théorème de Wilson (voir p. 178), consiste en ce que

$$1.2.3... (P-1) = P-1.$$

Si on pouvait donc directement démontrer que le produit  $1.2.3... (P-1)$ , n'est jamais de la forme  $\dot{P} + 1$ , alors le théorème de Wilson serait une conséquence immédiate de celui de Fermat (\*).

II.— Le mémoire de M. Midy cité dans le travail de M. Catalan porte pour titre *De quelques propriétés des nombres et des fractions périodiques*; par M. E. Midy, Paris 1835, in-4° de 21 pages, chez Bachelier. Tm.