

E. CATALAN

**Note sur le rapport de la circonférence  
au diamètre**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 1  
(1842), p. 190-196.

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1842\\_1\\_1\\_\\_190\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__190_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

NOTE

sur

LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE ;

PAR E. CATALAN.

---

On sait qu'en désignant par  $A$  l'aire d'un polygone régulier inscrit, par  $B$  l'aire du polygone circonscrit semblable, par  $A'$  et  $B'$  les quantités analogues pour deux polygones d'un nombre double de côtés, l'on a :

$$A' = \sqrt{AB}, \quad B' = 2 \frac{AB}{A + A'} \quad (*).$$

Représentons par  $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}, A_m$ , les aires des polygones successifs inscrits, par  $B_0, B_1, \dots, B_{m-1}, B_m$ , les aires des polygones circonscrits, nous aurons les deux relations générales,

$$(A_m)^2 = A_{m-1} \cdot B_{m-1}, \quad (1)$$

$$B_m = 2 \frac{A_{m-1} \cdot B_{m-1}}{A_{m-1} + A_m}; \quad (2)$$

d'où, par la division,

$$\frac{B_m}{(A_m)^2} = \frac{2}{A_{m-1} + A_m}. \quad (3)$$

---

(\*) Cette expression est de Saurin, membre de l'Académie des sciences, 1723.  
p. 10. Tm.



Pour obtenir l'aire du polygone inscrit de seize côtés, j'emploie la formule ci-dessus; elle donne

$$(A_2)^2 = 2 \frac{(2\sqrt{2})^3}{2+2\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 16(2-\sqrt{2}).$$

Donc

$$A_2 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Prenant  $m$  égal à 3, j'obtiens de même,

$$\begin{aligned} (A_3)^2 &= 2 \frac{4^3 (\sqrt{2-\sqrt{2}})^3}{2\sqrt{2}+4\sqrt{2-\sqrt{2}}} = 64 \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ &= 64 \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}]}{4(2-\sqrt{2})-2} \\ &= 32 \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}]}{3-2\sqrt{2}} \\ &= 32(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}] \\ &= 32(2+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}] \\ &= 32(2+\sqrt{2})[2(2-\sqrt{2})-\sqrt{2}(2-\sqrt{2})] \\ &= 32[2(4-2)-\sqrt{2}(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^2] \\ &= 32[4-\sqrt{4(2+\sqrt{2})}] = 64[2-\sqrt{2+\sqrt{2}}], \end{aligned}$$

et enfin

$$A_3 = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

On voit que la complication du calcul augmente rapidement. Nous engageons les commençants à former, en partant des valeurs de  $A_1$  et de  $A_2$ , l'expression de  $A_4$ , laquelle, toutes réductions faites, devient

$$A_4 = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

ainsi que nous le démontrerons plus loin.

Je reprends l'équation (7), et, afin d'arriver à une relation plus simple entre les aires successives, je renverse la fraction

dans le second membre de cette équation, ce qui donne d'abord

$$\left(\frac{A_{m-1}}{A_m}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{A_{m-2}}{A_{m-1}} + 1 \right],$$

ou

$$\frac{1}{\left(\frac{A_m}{A_{m-1}}\right)^2} = \frac{1}{2 \left(\frac{A_{m-1}}{A_{m-2}}\right)} + \frac{1}{2}.$$

Posant alors

$$A_m = \frac{2^m}{a_m}, \quad (8)$$

j'obtiens

$$\left(\frac{a_m}{a_{m-1}}\right)^2 = \left(\frac{a_{m-1}}{a_{m-2}}\right) + 2. \quad (9)$$

Si, comme ci-dessus, nous partons du carré inscrit, nous aurons d'abord

$$A_0 = 2, \quad A_1 = 2\sqrt{2},$$

d'où

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{a_1}{a_0} = \sqrt{2},$$

après quoi la formule (9) donnera successivement :

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \sqrt{2 + \sqrt{2}}, & \frac{a_3}{a_2} &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \\ \frac{a_4}{a_3} &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \text{ etc. ,} \end{aligned}$$

valeur dont la loi est complètement évidente. Ces valeurs donnent ensuite,

$$a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \text{ etc.}$$

Substituant dans l'équation (9), nous aurons donc

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \frac{2}{\sqrt{2}}, & A_2 &= 2 \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \\ A_3 &= 2 \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

La limite des aires  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , est l'aire du cercle du rayon 1, laquelle est représentée par  $\pi$ ; donc :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \dots \quad (10)$$

Le second membre de cette équation est composé d'un nombre infini de facteurs, tous plus grands que l'unité, qui est leur limite. Cet exemple prouve donc combien il est nécessaire d'insister sur cette proposition : *La puissance n° d'une quantité plus grande que l'unité, peut dépasser toute limite, lorsque n est suffisamment grand.*

L'équation (10) peut être écrite autrement. En effet,

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}},$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}}{2}}}, \text{ etc.}$$

Or,

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\pi}{4};$$

donc,

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}} = \cos \frac{\pi}{8}, \quad \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}}{2}} = \cos \frac{\pi}{16}, \text{ etc.}$$

Donc,

$$\frac{\pi}{2} = \sec. \frac{\pi}{4} \cdot \sec. \frac{\pi}{8} \cdot \sec. \frac{\pi}{16} \cdot \sec. \frac{\pi}{32} \dots \quad (11)$$

Cette formule élégante n'est pas nouvelle; elle a été donnée par Euler (nov. comm. Petrop., année 1760-61). La construction géométrique est évidente, et elle a ceci de remar-

quable, que chaque opération conduit à deux valeurs de plus en plus approchées de  $\frac{\pi}{2}$ , l'une par défaut, l'autre par excès.

Si l'on avait pris pour point de départ un polygone régulier inscrit différent du carré, on aurait trouvé des résultats aussi curieux que les précédents, mais moins simples.

Reprenons l'équation (7), et posons

$$A_m = 2^m b_m, \quad (12)$$

de telle sorte que

$$b_m = \frac{1}{a_m}.$$

A l'aide de cette substitution, nous obtiendrons

$$(b_m)^2 = \frac{(b_{m-1})^2}{2b_{m-1} + b_{m-2}}. \quad (13)$$

On a,

$$b_0 = 2, b_1 = \sqrt{2}, \text{ d'où } b_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, b_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

De ces deux valeurs, on conclut :

$$(b_3)^2 = 2 - \sqrt{4 - (b_2)^2}.$$

Pour reconnaître si cette relation a lieu généralement, admettons-la pour un instant, et posons :

$$(b_m)^2 = 2 - \sqrt{4 - (b_{m-1})^2}. \quad (14)$$

Par le changement de  $m$  en  $(m-1)$ , nous obtiendrons facilement

$$b_{m-2} = b_{m-1} \sqrt{4 - (b_{m-1})^2}.$$

Or, en substituant ces valeurs dans l'équation (13), on la transforme en une identité ; la loi se trouve vérifiée, et l'on a généralement :

$$b_m = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \quad (15)$$

le nombre des radicaux étant  $m$ .

Par suite, la valeur de  $A_m$  devient, à cause de (12),

$$A_m = 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}; \quad (16)$$

ainsi que nous l'avions annoncé.

La limite du premier membre de cette dernière équation est l'aire du cercle; donc

$$\pi = \text{limite de } 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}; \quad (17)$$

ce qui est assez curieux.

Si l'on compare les deux valeurs différentes trouvées pour  $A_m$ , on trouve la relation

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \dots \\ \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}; \quad (18)$$

dans laquelle le nombre des facteurs avant le signe  $\times$  est égal au nombre des radicaux qui suivent ce signe. Ainsi, par exemple :

$$2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}, \quad 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \\ 2 = \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \text{ etc.}$$

Du reste, ces égalités se vérifient immédiatement.