



Faculté des
Sciences Appliquées



Génération de maillages éléments finis d'ordre élevé

JOHNEN Amaury

Travail de fin d'études présenté en vue de l'obtention du grade
d'Ingénieur Civil Physicien.

Promoteur : Prof. Christophe Geuzaine

Année académique 2009-2010

Je tiens à remercier mon promoteur Monsieur Christophe GEUZAIN pour m'avoir proposé ce travail et m'avoir suivi tout au long de celui-ci. Je remercie également Monsieur Koen HILLEWAERT pour avoir montré de l'intérêt et avoir su m'orienter dans celui-ci. J'exprime aussi ma gratitude envers les membres de mon jury, Jean-Philippe Ponthot, Ludovic Noels et Éric Béchet pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail. Enfin, j'adresse un immense merci aux personnes de ma famille et de mon entourage pour leur soutien moral.

GÉNÉRATION DE MAILLAGES ÉLÉMENTS FINIS D'ORDRE ÉLEVÉ

Résumé

Lors de la génération de maillages d'ordre élevé, les éléments situés sur des frontières courbes du domaine sont obtenus en courbant l'arrête ou la face en contact avec ceux-ci. Les éléments générés de cette façon présentent parfois un jacobien négatif altérant la solution calculée par la méthode des éléments finis. Afin de pallier à ce problème, il est possible d'optimiser les éléments en courbant les arrêtes ou les faces. Cette technique est relativement coûteuse et ne peut être raisonnablement appliquée sur l'ensemble du maillage. Il est donc nécessaire de détecter au préalable les mauvais éléments afin d'appliquer l'optimisation de manière local.

Jusqu'à présent aucune méthode ne permettait de repérer de manière certaine les mauvais éléments. Ce travail consiste à élaborer une méthode robuste d'analyse du jacobien permettant donc de détecter avec certitude tous les éléments incorrects. Le moyen employé est de calculer les points de contrôle du jacobien grâce à un produit matriciel effectué sur les valeurs lagrangiennes de celui-ci. La méthode est efficace et donne de très bons résultats, le calcul des points de Bézier étant nettement plus rapide que le sampling du jacobien.

Ingénieur civil section physique : année académique 2009-2010

Table des matières

1	Introduction	1
2	Considérations de base	3
2.1	Introduction	3
2.2	Interpolation de Lagrange	3
2.2.1	Courbes de Lagrange	4
2.2.2	Surfaces de Lagrange	5
2.2.3	Dimension 3	8
2.3	Interpolation de Bézier	10
2.3.1	Courbes de Bézier	10
2.3.2	Surfaces de Bézier	12
2.3.3	Dimension 3	14
2.4	Passage d'une interpolation à une autre	15
2.5	Rappels sur la théorie des éléments finis	15
2.5.1	Approximation de la solution	16
2.5.2	Approximation géométrique	16
2.5.3	Espace de référence	18
2.5.4	Système matriciel	21
2.6	Éléments	22
2.6.1	Mapping d'un élément	23
2.7	Caractérisation du jacobien	24
2.7.1	Expression lagrangienne	25
2.7.2	Expression bázienne	26
2.8	Espace fonctionnel du jacobien	28
2.8.1	Quadrangles	28
2.8.2	Triangles	29
2.8.3	Dimension 3	31
2.9	Décomposition d'une interpolation de Bézier	32
2.9.1	Augmentation de l'ordre	34
2.9.2	Sous-interpolation	34
2.9.3	Stabilité	35

2.9.4	Convergence	37
2.9.5	Comparaison	38
3	Méthodes numériques	40
3.1	Introduction	40
3.2	Méthodes disponibles	40
3.2.1	Monômes	40
3.2.2	Matrice des coefficients	43
3.2.3	Implémentation du calcul du jacobien	44
3.2.4	Algorithme type	45
3.3	Espace fonctionnel du jacobien	46
3.3.1	Quadrangles Serendipity	47
3.3.2	Triangles Serendipity	48
3.3.3	Éléments 3D Serendipity	48
3.4	Méthodes d'analyse du jacobien	49
3.4.1	Matrice de formulation bázienne	49
3.4.2	Décomposition des points de contrôle	51
3.4.3	Points des sous-domaines	53
4	Résultats	56
4.1	Le cercle	56
4.2	La sphère	63
4.3	Optimisation	65
4.4	Maillage 2D autour d'une coupe d'aile d'avion	66
4.5	Comparaison des méthodes	67
5	Conclusion et perspectives	70
A	Démonstrations	72
A.1	Expression du jacobien par Lagrange d'un mapping 1D	72
A.2	Obtention des fonctions de Bézier	75
A.3	Augmentation de l'ordre d'interpolation d'une courbe de Bézier	77
A.4	Matrice de décomposition d'une courbe bázienne	79
A.5	Fonctions f_{ijkl}	85

Chapitre 1

Introduction

La génération automatique des maillages est un problème difficile. De grands enjeux sont encore de mise et beaucoup de recherche y est consacrée. Alors que la génération automatique de maillage simpliciaux est très bien maîtrisée, la génération automatique de maillage hexaédrique en est encore à ses balbutiements. Or ces derniers présentent des avantages non négligeables comme une précision accrue à coût de calcul égal et un meilleur comportement des solveurs éléments finis vis-à-vis de ces éléments.

Il est dès lors d'usage de générer ce type de maillage à la main ce qui constitue une perte de temps conséquente. Dans un article de 2004 [1], le Pr. Thomas J.R. Hughes déclarait qu'environ un million d'analyses par éléments finis étaient effectuées par jour dans le monde. Son étude montrait que de l'ordre de 80% du temps humain employé à ces études sont consacrées à la génération du maillage.

La génération automatique de maillage d'ordre élevé pose également des problèmes. Celle-ci emploie les techniques de placement des noeuds du maillage d'ordre 1. Ensuite, les éléments sont montés en ordre en leur rajoutant des noeuds. Pour les éléments se situant à l'intérieur du domaine, ces noeuds sont bien sûr placés de manière réguliers de tel façon que leur mapping reste inchangé. Les éléments situés sur les frontières courbes du domaine, au contraire, ont au moins une arrête ou une face qui est courbée. Les noeuds intra-élément sont alors placés de façon la plus optimale possible. Malgré cela, certains de ces éléments ne sont pas corrects en ce sens qu'ils ont un jacobien partiellement négatif. Autrement dit, leur mapping n'est pas bijectif.

Un maillage présentant de tels mauvais éléments engendre une altération de la solution calculée par les éléments finis et peut même parfois rendre le

schéma instable. Afin de pallier à ce problème il est possible d'effectuer une optimisation des éléments après la génération du maillage. Cette opération est toutefois très couteuse en temps de calcul. Il serait dès lors inconcevable de l'appliquer sur l'ensemble du maillage. Heureusement, elle peut s'employer sur une partie réduite d'éléments. Ainsi, en l'appliquant sur un nombre restreint d'éléments avoisinants les mauvais, on peut améliorer le maillage jusqu'à le rendre correct.

Il est donc nécessaire de détecter avec certitude les mauvais éléments. Jusqu'alors, il n'existe pas de méthodes le permettant. La solution couramment employée était de sampler le jacobien en un très grand nombre de points. Si cette technique permet de repérer la plupart des mauvais éléments elle ne permet pas de les trouver tous avec certitude.

La méthode exposée dans ce travail met à profit une propriété intéressante de l'interpolation de Bézier. Cette propriété est que l'interpolé se trouve toujours dans l'enveloppe convexe des points de contrôle. Ainsi en calculant l'interpolation exacte du jacobien, on peut être certain que l'élément est bon en vérifiant que tous les points de contrôle du jacobien sont positifs. En contrepartie, lorsque des points de contrôle sont négatifs, il existe une incertitude sur la négativité du jacobien.

Cette méthode a été implémenté avec succès sous forme d'un plugin au logiciel Gmsh, l'outil open source de maillage le plus utilisé au monde [2] (<http://www.geuz.org/gmsh>).

Chapitre 2

Considérations de base

2.1 Introduction

La méthode des éléments finis met à profit l’interpolation de Lagrange afin de construire les éléments qui permettent la discrétisation du domaine du problème et sont le support des champs inconnus. La CAO en contre-partie utilise largement une autre interpolation, celle de Bézier. Celle-ci est équivalente à celle de Lagrange puisqu’elle permet de représenter les mêmes choses. Nous verrons qu’elle possède des avantages non négligeables dans notre recherche de caractérisation du jacobien.

Nous commençons par décrire et donner les fonctions des deux interpolations. Nous effectuons ensuite un bref rappel sur la méthode des éléments finis. À la section 2.7, nous mettons en évidence les difficultés de l’analyse du jacobien ainsi que les avantages de l’interpolation de Bézier. Après cela, nous établissons à la section 2.8 l’espace fonctionnel du jacobien afin d’identifier quel ordre de l’interpolation de Bézier il est nécessaire d’utiliser. Enfin, nous montrons comment pallier à la principale difficulté de l’interpolation de Bézier (section 2.9.2).

2.2 Interpolation de Lagrange

La théorie des éléments finis fut initialement conçue sur base de l’interpolation de Lagrange. Les codes commerciaux se basent dès lors dessus. L’interpolation permet d’exprimer une section de courbe, un élément de surface, un élément de volume,... à l’aide d’un paramétrage adapté. Le paramétrage est polynomial et est décrit à l’aide des points par lesquels l’objet géométrique passe.

2.2.1 Courbes de Lagrange

On peut représenter une courbe polynomiale se mouvant dans un espace de dimension quelconque grâce à son paramétrage :

$$(x(\xi), y(\xi), z(\xi), \dots) \equiv \mathbf{x}(\xi) \quad (\xi \in \Omega_\xi)$$

L'espace des ξ est appelé espace paramétrique et Ω_ξ est le domaine de définition de la courbe dans cet espace. L'interpolation de Lagrange peut fournir le paramétrage voulu grâce aux points par lesquels passe cette courbe. Le nombre de points est donné par le degré N de la courbe et vaut $N_{\text{ddl}} = N + 1$, la numérotation allant de 0 à N . Avant de définir l'interpolation en elle-même, il faut définir les fonctions de Lagrange.

On définit donc la k^{e} fonction de Lagrange \mathcal{L}_k^N , comme suit :

$$\mathcal{L}_k^N(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0) \dots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \dots (\xi - \xi_N)}{(\xi_k - \xi_0) \dots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \dots (\xi_k - \xi_N)} \quad (\xi \in \Omega_\xi) \quad (2.1)$$

Le domaine de définition ($\Omega_\xi = [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$) est à priori quelconque mais, par facilité¹, l'on prend généralement $[0, 1]$ ou le correspondant symétrique $[-1, 1]$. Les valeurs ξ_k ont pour restriction de se trouver à l'intérieur du domaine de définition. Elles doivent par ailleurs être différentes l'une de l'autre. On choisit ordinairement de les prendre à intervalle $\Delta\xi$ régulier. On a ainsi

$$\begin{cases} \xi_0 = \xi_{\min} \\ \xi_N = \xi_{\max} \\ \xi_k = \xi_0 + k \Delta\xi \quad (k = 0, 1, \dots, N) \end{cases} \quad (2.2)$$

Les fonctions de Lagrange ont pour propriété :

$$\mathcal{L}_k^N(\xi_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \quad (2.3)$$

La figure 2.1 reprend l'ensemble des fonctions de Lagrange d'ordre 5. Celles-ci sont fortement ondulantes et peuvent prendre des valeurs non négligeables dans l'ensemble du domaine.

1. On peut montrer que le nombre réel de degrés de liberté qui influence l'interpolation est $N_{\text{ddl}} - 2$. On peut donc fixer arbitrairement deux valeurs de l'ensemble $\{\xi_k\}$.

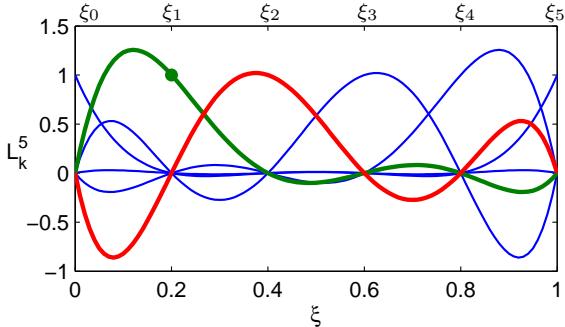


FIGURE 2.1 – Graphique reprenant les 6 fonctions de Lagrange d’ordre 5 (définies sur le domaine $[0, 1]$). Les fonctions verte et rouge mises en valeurs correspondent aux fonctions $\mathcal{L}_1^5(\xi)$ et $\mathcal{L}_2^5(\xi)$. La fonction $\mathcal{L}_1^5(\xi)$ passe bien par 1 en $\xi = 0.2$ et par 0 en tous les autres ξ_i comme la propriété (2.3) l’indique.

Nous pouvons maintenant définir l’interpolation. Soit $\{\mathbf{x}_i\}$ l’ensemble des N_{ddl} points par lesquels passent la courbe. L’interpolation s’écrit :

$$\mathbf{x}^{\mathcal{L}}(\xi) = \sum_{i=0}^N \mathbf{x}_i \mathcal{L}_i^N(\xi) \quad (2.4)$$

Étant donnée la propriété des fonctions de Lagrange, le paramétrage décrit bien une courbe qui passe par les points \mathbf{x}_k ,

$$\sum_{i=0}^N \mathbf{x}_i \mathcal{L}_i^N(\xi_k) = \mathbf{x}_k$$

La figure 2.2 présente deux courbes de Lagrange. On peut y remarquer défaut de cette interpolation. En effet, bien que les points semblent relativement bien placés, la courbe présente des changements brusques de direction aux extrémités. Un autre défaut de cette interpolation est d’être très sensible à une modification de la position d’un point. L’influence du point 2 se fait ressentir sur toute la courbe. Cela vient du caractère non local des fonctions de Lagrange (figure 2.1).

2.2.2 Surfaces de Lagrange

On peut représenter une surface en utilisant le même principe. Deux types de surfaces peuvent être interpolées, chacune correspondant à un domaine

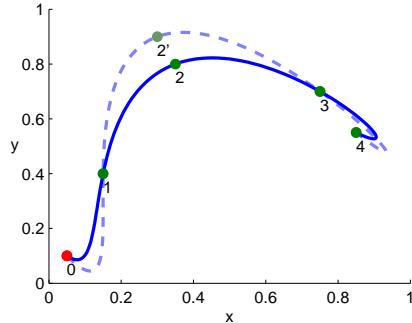


FIGURE 2.2 – Courbes de Lagrange de degré 4. Le numéro i de chaque point est indiqué, sa coordonnée valant \mathbf{x}_i .

particulier de l'espace paramétrique. Ces deux domaines de définition sont de forme quadrangulaire et triangulaire.

Surfaces quadrangulaires

Par similitude aux courbes, le domaine de définition dans l'espace paramétrique $\xi \times \eta$ est généralement soit $[0, 1] \times [0, 1]$, soit $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Les fonctions de Lagrange sont facilement obtenues puisqu'elles sont simplement égales au produit des fonctions 1D.

$$\mathcal{L}\mathcal{Q}_{i,j}^N(\xi, \eta) = \mathcal{L}_i^N(\xi) \mathcal{L}_j^N(\eta) \quad (i, j \in \{0, 1, \dots, N\}) \quad (2.5)$$

Les graphiques de la figure 2.3 montrent trois de ces fonctions à l'ordre 2.

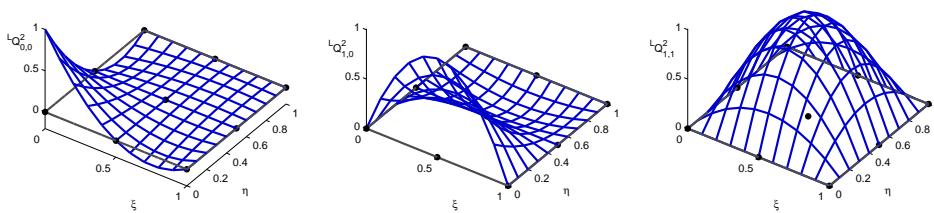


FIGURE 2.3 – Fonctions de Lagrange de degré 2 d'une surface quadrangulaire. Les fonctions $\mathcal{L}\mathcal{Q}_{0,0}^2(\xi, \eta)$, $\mathcal{L}\mathcal{Q}_{1,0}^2(\xi, \eta)$ et $\mathcal{L}\mathcal{Q}_{1,1}^2(\xi, \eta)$ sont représentées.

Il est nécessaire de connaître $N_{\text{ddl}} = (N + 1)^2$ points de la surface pour pouvoir l'interpoler. Soit $\{\mathbf{x}_{i,j}\}$ l'ensemble de ces points, l'interpolation s'écrit

$$\mathbf{x}^L(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \mathbf{x}_{i,j} {}^L \mathcal{Q}_{i,j}^N(\xi, \eta)$$

Un exemple est donné à la figure 2.4.

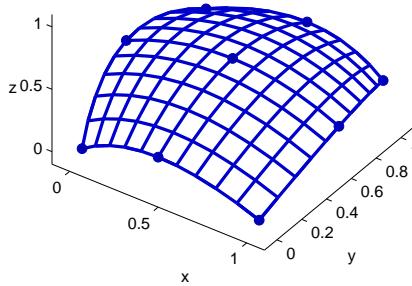


FIGURE 2.4 – Surface quadrangulaire de Lagrange d'ordre 2.

Surfaces triangulaires

Dans ce cas-ci, le domaine de définition est le plus couramment $[0, 1] \times [0, 1 - \xi]$. Les fonctions de Lagrange sont plus difficiles à exprimer mais le principe pour les obtenir reste simple. Remarquons qu'en 1D, les fonctions de Lagrange (eqn. 2.1) sont le produit de N fonctions linéaires :

$$l_j(\xi) = \frac{\xi - \xi_j}{\xi_k - \xi_j}, \quad (j \in \{0, \dots, N\} \setminus k)$$

Chacune de ces sous-fonctions vérifient $l_j(\xi = \xi_j) = 0$ et $l_j(\xi = \xi_k) = 1$, ce qui permet d'obtenir les propriétés voulues (eqn. 2.3).

Pour les fonctions triangulaires, la règle est la même : les sous-fonctions linéaires valent toutes 1 en un point (ξ_i, η_j) et 0 en d'autres. La figure 2.5 montre la trace de deux de ces fonctions dans le plan (ξ, η) .

Sachant cela, les fonctions triangulaires ${}^L \mathcal{T}_{i,j}^N$ sont faciles à définir :

$${}^L \mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta) = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\eta - \eta_k}{\eta_j - \eta_k} \prod_{k=i+j+1}^N \frac{\frac{\xi}{\xi_k} + \frac{\eta}{\eta_k} - 1}{\frac{\xi_i}{\xi_k} + \frac{\eta_j}{\eta_k} - 1}, \quad (i, j \in \mathbb{N} \text{ avec } i+j \leq N)$$

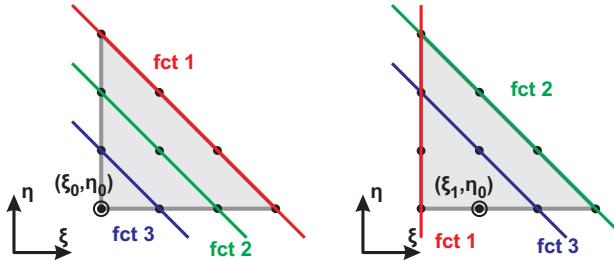


FIGURE 2.5 – Localisation de la trace des fonctions linéaires utilisées pour construire les fonctions de Lagrange triangulaires d’ordre 3. Ces sous-fonctions linéaires ont toute 1 pour valeur au point entouré. Les fonctions de Lagrange correspondantes sont respectivement $\mathcal{L}\mathcal{T}_{0,0}^3$ et $\mathcal{L}\mathcal{T}_{1,0}^3$.

La figure 2.6 montre trois de ces fonctions.

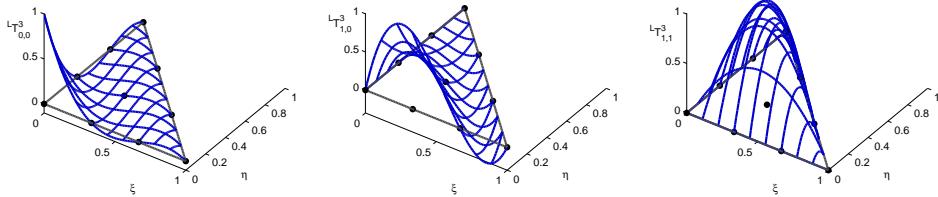


FIGURE 2.6 – Fonctions de Lagrange de degré 3 pour une surface triangulaire. Les fonctions $\mathcal{L}\mathcal{T}_{0,0}^N(\xi, \eta)$, $\mathcal{L}\mathcal{T}_{1,0}^N(\xi, \eta)$ et $\mathcal{L}\mathcal{T}_{1,1}^N(\xi, \eta)$ sont représentées.

L’interpolation d’une surface triangulaire nécessite la connaissance de moins de points que pour une surface quadrangulaire. Ces points, $\mathbf{x}_{i,j}$ sont au nombre de $N_{\text{ddl}} = (N + 1)(N + 2)/2$. L’interpolation vaut

$$\mathbf{x}^{\mathcal{L}}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \mathbf{x}_{i,j} \mathcal{L}\mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta)$$

Un exemple est donné à la figure 2.7.

2.2.3 Dimension 3

La généralisation aux dimensions supérieures ne pose pas de problèmes particuliers. Les techniques pour les obtenir sont les mêmes que pour la dimension 2. Notons qu’il y a trois types d’interpolations de dimension 3 :

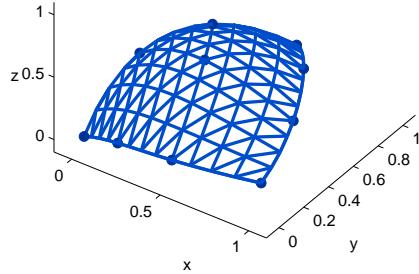


FIGURE 2.7 – Surface triangulaire de Lagrange d’ordre 3.

tétraédrique, pentaédrique et hexaédrique.

Les fonctions hexaédriques sont le résultat d’une multiplication de trois fonctions 1D :

$${^L}\mathcal{H}_{i,j,k}^N(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{L}_i^N(\xi) \mathcal{L}_j^N(\eta) \mathcal{L}_k^N(\zeta) \quad (i, j, k \in \{0, \dots, N\})$$

Les fonctions pentaédriques sont :

$${^L}\mathcal{P}_{i,j,k}^N(\xi, \eta, \zeta) = {^L}\mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta) \mathcal{L}_k^N(\zeta) \quad (i, j \in \mathbb{N}, i + j < N, k \in \{0, \dots, N\})$$

Les fonctions tétraédriques nécessitent de réappliquer le principe décrit pour les triangles. Ceux-ci s’écrivent :

$$\begin{aligned} {^L}\mathcal{T}_{i,j,k}^N(\xi, \eta, \zeta) = & \prod_{l=0}^{i-1} \frac{\xi - \xi_l}{\xi_i - \xi_l} \prod_{l=0}^{j-1} \frac{\eta - \eta_l}{\eta_j - \eta_l} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{\zeta - \zeta_l}{\zeta_k - \zeta_l} \\ & \prod_{l=i+j+k+1}^N \frac{\frac{\xi}{\xi_l} + \frac{\eta}{\eta_l} + \frac{\zeta}{\zeta_l} - 1}{\frac{\xi_i}{\xi_l} + \frac{\eta_j}{\eta_l} + \frac{\zeta_k}{\zeta_l} - 1}, \quad (i, j, k \in \mathbb{N} \text{ avec } i + j + k \leq N) \end{aligned}$$

2.3 Interpolation de Bézier

L’interpolation de Bézier permet d’exprimer les mêmes courbes, surfaces, volumes,... que l’interpolation de Lagrange. L’information à fournir est également la même, c’est-à-dire N_{ddl} coordonnées de points. Toutefois, ces points ne sont pas tous situés sur l’objet interpolé.

2.3.1 Courbes de Bézier

Les fonctions de Bézier 1D d’ordre N sont couramment définies par

$$\mathcal{B}_k^N(\xi) = C_N^k (1 - \xi)^{N-k} \xi^k \quad (\xi \in [0, 1] ; k = 0, \dots, N) \quad (2.6)$$

mais l’on peut également les définir sur un domaine centré :

$$\mathcal{B}_k^N(\xi) = \frac{1}{2^N} C_N^k (1 - \xi)^{N-k} (1 + \xi)^k \quad (\xi \in [-1, 1] ; k = 0, \dots, N)$$

La figure 2.8 reprend l’ensemble des fonctions de Bézier d’ordre 5. On remarque que ces fonctions sont beaucoup plus douces que les fonctions de Lagrange (fig. 2.1). De plus, elles prennent toutes leur valeur dans l’intervalle $[0, 1]$ ce qui a pour conséquence importante que la courbe produite par l’interpolation sera toujours comprise dans l’enveloppe convexe des points de contrôle. Cette dernière propriété sera très utile pour la caractérisation du jacobien comme nous le verrons plus loin.

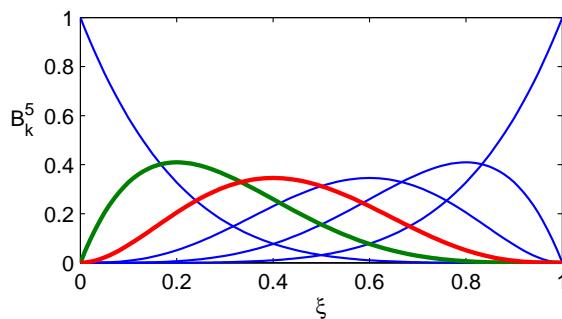


FIGURE 2.8 – Graphique des 6 fonctions de Bézier d’ordre 5. Les fonctions verte et rouge mises en valeurs correspondent aux fonctions $\mathcal{B}_1^5(\xi)$ et $\mathcal{B}_2^5(\xi)$.

Soit $\{\mathbf{b}_i\}$ l'ensemble des points de l'interpolation. Ces points sont appelés points de contrôle. L'interpolation s'écrit alors :

$$\mathbf{x}^B(\xi) = \sum_{i=0}^N \mathbf{b}_i \mathcal{B}_i^N(\xi)$$

On a comme propriétés

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_N \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(0) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{x}'(1) = \mathbf{b}_N - \mathbf{b}_{N-1} \end{cases}$$

Autrement dit, la première propriété signifie que la courbe commence et finit au premier et au dernier point de contrôle. En ces points, la courbe est tangente à la droite liant le point extrémité au point voisin, ce qui constitue la seconde propriété.

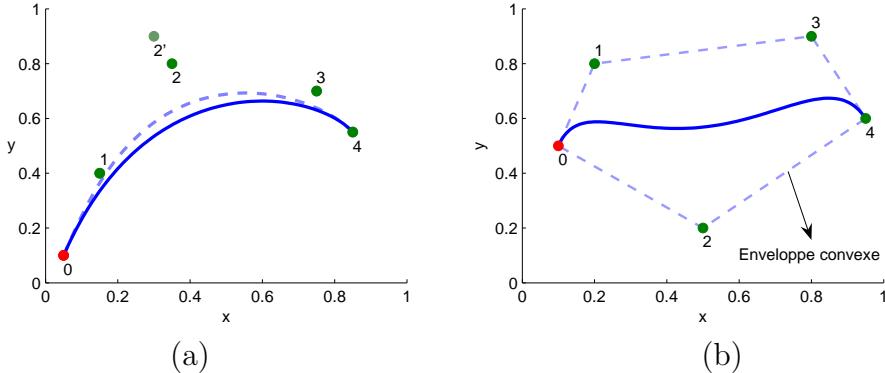


FIGURE 2.9 – Courbes de Bézier de degré 4. Le numéro i de chaque point est indiqué, sa coordonnée valant \mathbf{b}_i . Sur le graphique (b), l'enveloppe convexe est dessinée. La courbe se trouve toujours à l'intérieur de celle-ci.

La figure 2.9(a) présente l'interpolation de Bézier pour une courbe en reprenant pour points de contrôle les points de la figure 2.2. On peut facilement mesurer les différences qu'il y a entre les deux types d'interpolation. L'un des intérêts de l'interpolation de Bézier est l'influence relativement locale d'un point de contrôle sur la courbe. En contrepartie, un inconvénient est que les

points de contrôle peuvent être très disparates même si la courbe est relativement confinée dans l'espace, comme le montre la figure 2.9(b). Nous verrons dans ce chapitre quelle solution l'on peut apporter.

2.3.2 Surfaces de Bézier

Surface quadrangulaire

Comme pour l'interpolation de Lagrange, les fonctions sont obtenues en multipliant simplement deux fonctions 1D. Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{B}\mathcal{Q}_{i,j}^N(\xi, \eta) = \mathcal{B}_i^N(\xi) \mathcal{B}_j^N(\eta) \quad (i, j \in \{0, \dots, N\})$$

sur le domaine $\Omega_\xi \times \Omega_\eta$. Les graphiques de la figure 2.10 montrent trois de ces fonctions à l'ordre 2.

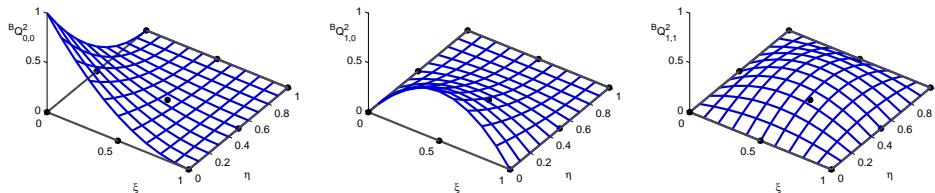


FIGURE 2.10 – Fonctions de Bézier de degré 2 d'une surface quadrangulaire. Les fonctions $\mathcal{B}\mathcal{Q}_{0,0}^2(\xi, \eta)$, $\mathcal{B}\mathcal{Q}_{1,0}^2(\xi, \eta)$ et $\mathcal{B}\mathcal{Q}_{1,1}^2(\xi, \eta)$ sont représentées.

Tout comme en 1D, les fonctions ne sont jamais négatives, ce qui implique que tout point de la surface se trouve toujours à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle.

Tenant compte de l'ensemble $\{\mathbf{b}_{i,j}\}$ des points de contrôle (au nombre de $N_{\text{ddl}} = (N + 1)^2$), l'interpolation vaut

$$\mathbf{x}^{\mathcal{B}}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \mathbf{b}_{i,j} \mathcal{B}\mathcal{Q}_{i,j}^N(\xi, \eta)$$

La figure 2.11 montre le résultatat de l'interpolation utilisant les mêmes points que la figure 2.4.

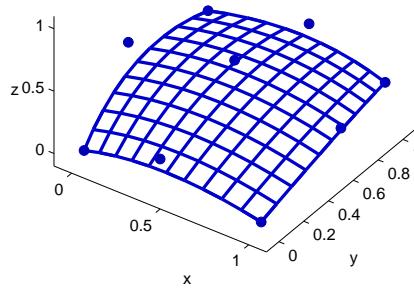


FIGURE 2.11 – Surface quadrangulaire de Bézier d’ordre 2. Les points de contrôle sont identiques aux points de la surface de Lagrange de la figure 2.4.

Surface triangulaire

Obtenir les fonctions de Bézier d’une surface triangulaire n’est, encore une fois, pas compliqué lorsque l’on sait comment faire. La démarche est expliquée à l’annexe A.2. Les fonctions sont

$${}^B\mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta) = C_N^i C_{N-i}^j \xi^i \eta^j (1-\xi-\eta)^{N-i-j}, \quad (i, j \in \mathbb{N} \text{ avec } i+j \leq N) \quad (2.7)$$

La figure 2.12 montre trois de ces fonctions.

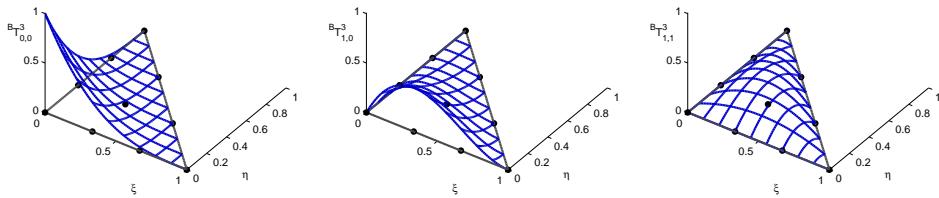


FIGURE 2.12 – Fonctions de Bézier de degré 3 pour une surface triangulaire. Les fonctions ${}^B\mathcal{Q}_{0,0}^3(\xi, \eta)$, ${}^B\mathcal{Q}_{1,0}^3(\xi, \eta)$ et ${}^B\mathcal{Q}_{1,1}^3(\xi, \eta)$ sont représentées.

Si l’on tient compte des points de contrôle, notés $\mathbf{b}_{i,j}$ l’interpolation vaut

$$\mathbf{x}^B(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \mathbf{b}_{i,j} {}^B\mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta)$$

La figure 2.13 montre le résultat de l'interpolation utilisant les mêmes points que la figure 2.7.

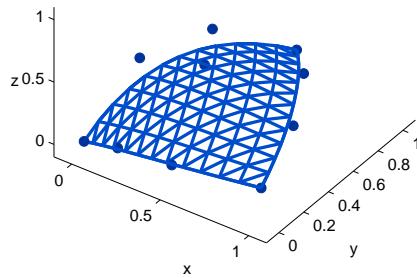


FIGURE 2.13 – Surface triangulaire de Bézier d'ordre 3. Les points de contrôle sont identiques aux points de la surface de Lagrange de la figure 2.7.

2.3.3 Dimension 3

Encore une fois, la généralisation ne pose pas de problème. En trois 3D, nous avons pour fonction

- hexaédrique

$${}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_{i,j,k}^N(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{B}_i^N(\xi) \mathcal{B}_j^N(\eta) \mathcal{B}_k^N(\zeta) \quad (i, j, k \in \{0, \dots, N\})$$

- pentaédrique

$${}^{\mathcal{B}}\mathcal{P}_{i,j,k}^N(\xi, \eta, \zeta) = {}^{\mathcal{B}}\mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta) \mathcal{B}_k^N(\zeta) \quad (i, j \in \mathbb{N}, i+j < N, k \in \{0, \dots, N\})$$

- tétraédrique

$${}^{\mathcal{B}}\mathcal{T}_{i,j,k}^N(\xi, \eta, \zeta) = C_N^i C_{N-i}^j C_{N-i-j}^k \xi^i \eta^j \zeta^k (1-\xi-\eta-\zeta)^{N-i-j-k} \quad (i+j+k \leq N)$$

2.4 Passage d'une interpolation à une autre

Pour la suite du travail, il est intéressant de pouvoir calculer les points de contrôle (interpolation de Bézier) à partir des points lagrangiens d'une courbe et inversement.

Les expressions analytiques du changement de base pour une courbe sont du type :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= f(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots) \quad (k = 0, 1, \dots) \\ \Leftrightarrow \mathbf{b}_k &= g(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots) \quad (k = 0, 1, \dots)\end{aligned}$$

Cependant, il est peu utile et déjà fastidieux d'obtenir cette expression à la première dimension.

Le calcul numérique, par contre, ne pose aucun problème. Les points \mathbf{x}_k d'une courbe de Bézier sont aisés à calculer. Dans le cas particulier où le domaine de définition des deux interpolations sont identiques², nous avons simplement

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}^B(\xi = \xi_k)$$

À partir de ce constat, il est également facile d'obtenir les points de contrôle à partir des points lagrangiens. Nous verrons comment implémenter ces calculs dans le chapitre 3.

2.5 Rappels sur la théorie des éléments finis

Considérons un problème pour lequel l'équation $f(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = 0$ est à résoudre en chaque point d'un domaine Ω . Cette équation est, dans sa forme la plus simple, une équation différentielle linéaire. \mathcal{A} est un champ quelconque (de température, de contraintes,...) et \mathbf{x} est le vecteur des coordonnées. Des conditions aux limites doivent être considérées pour que le problème soit bien posé mais nous ne nous en préoccupons pas. Le domaine peut prendre n'importe quelle forme et le champ-solution n'a en général pas d'expression analytique. Ce genre de problème ne peut donc être résolu, la plupart du temps, que grâce à des méthodes numériques, par le biais de diverses approximations.

2. Si les deux domaines sont différents, il suffit de faire une transformation linéaire sur les ξ_k pour se ramener au domaine de l'interpolation de Bézier. Soit $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ le domaine de Bézier et $[\xi_0, \xi_N]$ celui de Lagrange. Alors, les points de Lagrange sont $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}^B((\xi_k - \xi_0)(\xi_{\max} - \xi_{\min}) / (\xi_N - \xi_0))$

2.5.1 Approximation de la solution

Il est en général impossible de calculer la solution exacte du problème en un temps fini. La première étape des éléments finis consiste à utiliser l'approximation de Rayleigh-Ritz. Celle-ci revient à décomposer le champ inconnu en un certain nombre de fonctions tests ϕ_i (linéairement indépendantes). La solution calculée sera alors donnée par une combinaison linéaire de ces fonctions et ne constituera qu'une solution approximée de la solution exacte. Plus leur nombre, $n_{\text{inc.}}$, est important, meilleure sera l'approximation. On écrit donc

$$\mathcal{A}^{\text{app}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n_{\text{inc.}}} \alpha_i \phi_i(\boldsymbol{x})$$

où les coefficients α_i sont les inconnues à déterminer.

Dans un cas général, aucune combinaison linéaire des fonctions tests ne permet de vérifier l'équation $f(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})) = 0$ en tout point du domaine. On dit que l'on ne peut pas vérifier l'équation de manière forte. Il faut donc se restreindre à ne vérifier l'équation que de manière faible. Un moyen de mettre cela en pratique est d'utiliser la méthode de Galerkin. C'est celle qui est mise à profit dans les éléments finis. Elle consiste à annuler la moyenne de la fonction f pondérée grâce à des fonctions poids. Ces fonctions poids doivent être linéairement indépendantes et sont souvent identiques aux fonctions tests. On obtient alors un système de $n_{\text{inc.}}$ équations à $n_{\text{inc.}}$ inconnues :

$$\int_{\Omega} f \left(\sum_{i=0}^{n_{\text{inc.}}} \alpha_i \phi_i(\boldsymbol{x}) \right) \phi_j(\boldsymbol{x}) \, d\Omega = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n_{\text{inc.}} \quad (2.8)$$

dont la solution est unique.

La figure 2.14 montre un exemple de fonctions tests et le résultat de la formulation 2.8. La fonction à approximer est $y = x^2 + 1$ que l'on réécrit $y - x^2 - 1 = 0$.

2.5.2 Approximation géométrique

À ce stade, nous n'avons pas encore spécifié ce qu'étaient les fonctions tests, nous devons d'abord parler de leur support. Le domaine du problème est en général très compliqué et il serait impossible de définir des fonctions indéfiniment continument dérивables sur l'ensemble de celui-ci. Pour pallier à ce problème, la méthode des éléments finis emploie des fonctions définies

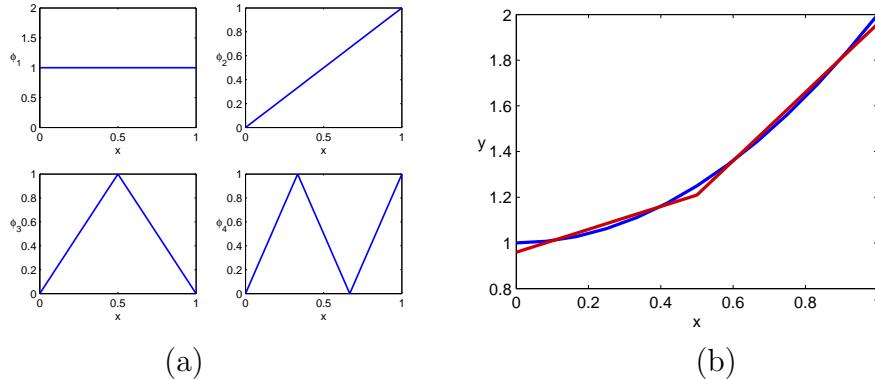
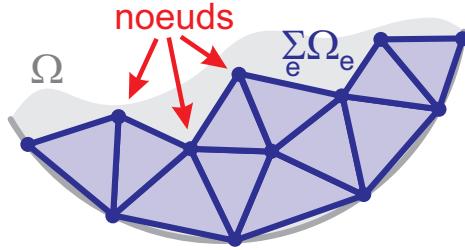


FIGURE 2.14 – (a) fonctions tests.

(b) En bleu, fonction à approximer : $y = x^2 + 1$. En rouge, solution de l'approximation y^{app} . Celle-ci vaut $y^{\text{app}} = 0.95 \phi_1 + 1 \phi_2 - 1/4 \phi_3 + 0 \phi_4$.

FIGURE 2.15 – Représentation d'une partie du domaine Ω et début d'un maillage triangulaire d'ordre 1.

par morceaux.

Pour mettre cela en pratique, le domaine est découpé en éléments. En 2D, ces éléments sont souvent des triangles, comme le montre la figure 2.15, ou des quadrangles. Chaque élément e possède son propre domaine Ω_e . Les éléments ne se recouvrent pas et l'ensemble forme le maillage dont le domaine n'est bien souvent qu'une approximation du domaine réel :

$$\Omega \sim \sum_{e=0}^{N_{\text{el}}} \Omega_e$$

où nous avons noté N_{el} le nombre d'éléments du maillage. Il s'ensuit que l'intégration contenue dans l'équation (2.8) peut être approximée par une intégration élément par élément :

$$\int_{\Omega} (\dots) d\Omega = 0 \quad \sim \quad \sum_e \left[\int_{\Omega_e} (\dots) d\Omega_e \right] = 0 \quad (2.9)$$

2.5.3 Espace de référence

Un élément est caractérisé par la position de ses noeuds dans l'espace réel et prend forme grâce à l'interpolation de Lagrange (sect. 2.2) :

$$\begin{cases} x = x^e(\xi, \eta) \\ y = y^e(\xi, \eta) \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^e(\boldsymbol{\xi})$$

Cette relation constitue le mapping de l'élément e (fig. 2.16). L'espace des (ξ, η) est appelé espace de référence. Tous les éléments d'un type donné proviennent du même élément de référence, la seule différence caractérisant l'élément réel est son mapping.

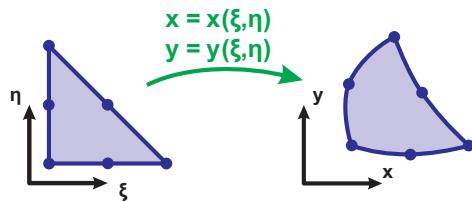


FIGURE 2.16 – Mapping d'un élément. Le mapping est réalisé grâce à une interpolation de Lagrange.

Les fonctions tests doivent appartenir à l'espace de Hilbert \mathbb{H}^n où n dépend de l'ordre de l'équation différentielle. Cela signifie, pour résumer, que les fonctions tests peuvent présenter des discontinuités de leurs dérivées sur un ensemble négligeable de l'espace. Sur le reste de l'espace, celles-ci doivent être au moins n fois continûment dérивables. Ces fonctions peuvent donc aisément être définies par éléments.

Les fonctions tests seront la réunion de fonctions élémentaires, appelées fonctions de forme. Ces fonctions de forme sont notées N_i et sont définies dans l'espace de référence ($N_i = N_i(\xi, \eta)$). Elles sont identiques pour tous les éléments d'un même type, ce qui facilitera grandement les opérations. Sur le domaine de l'élément, on a donc

$$\mathcal{A}^{\text{app}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{N_{\text{ddl}}} \alpha_i^e N_i(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})) \quad (2.10)$$

où les α_i^e sont les coefficients associés à l'élément et N_{ddl} le nombre de fonctions de forme de l'élément.

La méthode des éléments finis utilise des fonctions tests compactes. Les fonctions sont donc nulles sur la majorité du domaine et sont non nulles uniquement sur un petit nombre d'éléments adjacents. Pour réaliser cela, on associe chaque fonction test à un noeud du maillage en lequel la fonction est unitaire. La fonction est non nulle uniquement sur les éléments qui partagent ce noeud et elle est nulle en tout autre noeud³. La figure 2.17 illustre une de ces fonctions. En procédant de la sorte, les coefficients α_i qui apparaissent dans les équations (2.8) deviennent la valeur du champ \mathcal{A}^{app} aux différents noeuds du maillage. Notons que pour réaliser cela, il faut que les fonctions de forme soient les fonctions de Lagrange définies auparavant.

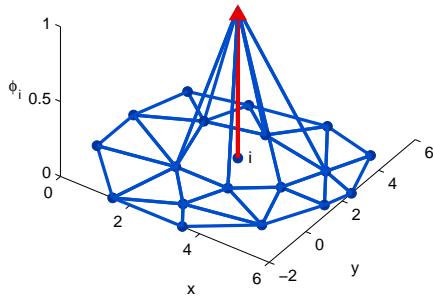


FIGURE 2.17 – Représentation d'une fonction test (d'ordre 1) de la méthode des éléments finis pour un problème 2D. ϕ_i vaut 1 au noeud i , zéro à tous les autres et la fonction est non nulle uniquement au voisinage du noeud i .

Tenant compte de (2.9) et (2.10), la formulation (2.8) devient

$$\sum_{e=0}^{N_{\text{el}}} \left[\int_{\Omega_e} f \left(\sum_{i=0}^{N_{\text{ddl}}} \alpha_i^e N_i(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \right) \phi_j(\mathbf{x}) \, d\Omega_e \right] = 0, \quad \forall j \quad (2.11)$$

Introduisons la matrice de localisation des noeuds de chaque élément, noté \mathbf{L}^e . Celle-ci, composée uniquement de 1 et principalement de 0, permet de définir quels noeuds du maillage font partie de l'élément e . Autrement dit, si l'on désigne par n_j les noeuds du maillage et par n_i^e les noeuds de

3. Y compris les noeuds à l'intérieur de l'élément.

l'élément, on a

$$n_i^e = \sum_{j=0}^{n_{\text{inc.}}} L_{ij}^e n_j$$

Comme les coefficients inconnus et les fonctions sont associés aux noeuds, il vient

$$\boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{L}^e \boldsymbol{\alpha}$$

et

$$\mathbf{N}_{(\xi(\mathbf{x}))} = \mathbf{L}^e \boldsymbol{\phi}_{(\mathbf{x})} \quad \text{sur } \Omega_e \quad (2.12)$$

où l'on a rangé dans des vecteurs, les inconnues et les valeurs des fonctions :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_{(\xi(\mathbf{x}))} = \begin{pmatrix} N_0(\xi(\mathbf{x})) \\ N_1(\xi(\mathbf{x})) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\phi}_{(\mathbf{x})} = \begin{pmatrix} \phi_0(\mathbf{x}) \\ \phi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Il faut également pouvoir exprimer N_j en fonction des fonctions de forme. Malheureusement, la matrice de localisation n'est pas carrée et n'est donc pas inversible. Toutefois, multipliant la relation (2.12) par la transposée de la matrice, on obtient

$$(\mathbf{L}^e)^T \mathbf{N}_{(\xi(\mathbf{x}))} = (\mathbf{L}^e)^T \mathbf{L}^e \boldsymbol{\phi}_{(\mathbf{x})} \quad \text{sur } \Omega_e$$

Or, étant donné que la matrice de localisation contient au plus une valeur 1 par ligne et par colonne (le reste étant 0), le produit $\mathbf{L}^{eT} \mathbf{L}^e$ est une matrice diagonale composée de 0 et de 1. Or, les éléments nuls de la diagonale multiplient les fonctions tests qui sont nulles sur l'élément e . Cela implique que sur l'élément e , le membre de droite vaut $\boldsymbol{\phi}_{(\mathbf{x})}$,

$$(\mathbf{L}^e)^T \mathbf{N}_{(\xi(\mathbf{x}))} = \boldsymbol{\phi}_{(\mathbf{x})} \quad \text{sur } \Omega_e$$

La formulation (éq. (2.11)) se réécrit

$$\sum_{e=0}^{N_{\text{el}}} \left[\int_{\Omega_e} f(\mathbf{N}_{(\xi(\mathbf{x}))}^T \mathbf{L}^e \boldsymbol{\alpha}) \left(\sum_{k=0}^{N_{\text{ddl}}} L_{kj}^e N_k(\xi(\mathbf{x})) \right) d\Omega_e \right] = 0, \quad \forall j$$

Au lieu d'intégrer sur le domaine réel, on peut intégrer sur le domaine de référence de l'élément Ω_e^{ref} . On a,

$$\sum_{e=0}^{N_{\text{el}}} \left[\int_{\Omega_e^{\text{ref}}} f(\mathbf{N}_{(\boldsymbol{\xi})}^T \mathbf{L}^e \boldsymbol{\alpha}) \left(\sum_{k=0}^{N_{\text{ddl}}} L_{kj}^e N_k(\boldsymbol{\xi}) \right) \det \mathcal{J} \, d\Omega_e^{\text{ref}} \right] = 0, \quad \forall j \quad (2.13)$$

2.5.4 Système matriciel

Pour pouvoir résoudre la formulation rapidement, il faut se ramener à un système linéaire par rapport aux inconnues. Dans les cas les plus simples, l'équation à résoudre ($f(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = 0$) est linéaire en la plus grande dérivée. On peut alors transformer la formulation pour avoir quelque chose d'exploitable. Mais ici, pour faciliter le raisonnement, supposons que l'équation du problème est non différentielle. Dans ce cas, nous avons $f(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$, où $\boldsymbol{\gamma}$ est une fonction constante ne dépendant pas du champ. La formulation devient :

$$\sum_{e=0}^{N_{\text{el}}} \left[\int_{\Omega_e^{\text{ref}}} \mathbf{N}_{(\boldsymbol{\xi})}^T \mathbf{L}^e \boldsymbol{\alpha} \left(\sum_{k=0}^{N_{\text{ddl}}} L_{kj}^e N_k(\boldsymbol{\xi}) \right) \det \mathcal{J} \, d\Omega_e^{\text{ref}} \right] = g_j, \quad \forall j$$

où le membre de droite provient de l'intégration de $\boldsymbol{\gamma}$. La formulation est maintenant linéaire et peut se mettre sous la forme :

$$\sum_i \alpha_i K_{ji} = g_j \quad (\forall j)$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{g}$$

avec \mathbf{q} le vecteur des inconnues.

Le plus gros travail de programmation est donc de remplir cette matrice ainsi que de calculer le membre de droite. Dans l'espace de référence, la composante (i, j) de la matrice \mathbf{K} vaut :

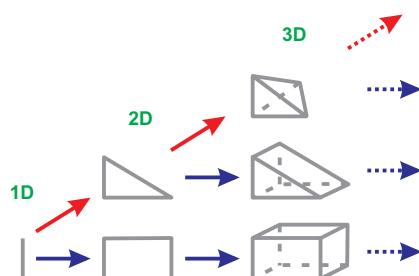
$$K_{ij} = \sum_{e=0}^{N_{\text{el}}} \left[\int_{\Omega_e^{\text{ref}}} \left(\sum_{k=0}^{N_{\text{ddl}}} L_{ki}^e N_k(\boldsymbol{\xi}) \right) \left(\sum_{k=0}^{N_{\text{ddl}}} L_{kj}^e N_k(\boldsymbol{\xi}) \right) \det \mathcal{J} \, d\Omega_e^{\text{ref}} \right] \quad (2.14)$$

On voit donc dans cette formulation des éléments finis que la seule partie de l'intégrant variant d'un élément à l'autre est le jacobien. Le reste ne dépend que de la forme et de l'ordre de cet élément. On peut dire que le jacobien permet de transposer les propriétés d'un élément de sa forme de référence vers sa forme réel. Il est nécessaire que celui-ci soit positif, c'est-à-dire que le mapping soit bijectif. Lorsque ce n'est pas le cas, la représentation du problème considéré est faussé.

En présence de mauvais éléments, la solution donnée par les éléments finis se comporte de différentes manières suivant le type d'équation gouvernant le problème. Concernant les problèmes de diffusion, par exemple, la solution est localement incohérente. Mais cette incohérence n'influence pas l'ensemble du domaine. Pour les problèmes advectifs, par contre, les mauvais éléments peuvent influencer négativement une grande partie du domaine voir rendre le schéma instable.

2.6 Éléments

Jusqu'à la dimension 3, nous pouvons distinguer 6 formes d'éléments de base. Ceux-ci sont l'élément linéique, le triangle, le quadrangle, le tétraèdre, le prisme (pentaèdre) et l'hexaèdre (fig. 2.18). Avec leur généralisation aux autres dimensions, ce sont les seuls éléments naturels qui existent. Ils sont naturels en ce sens qu'ils sont naturellement exprimables par les interpolations de Lagrange et de Bézier et qu'ils produisent un maillage normal.



ressortir leur provenance. En effet, il existe une famille de simplexes⁴ qui est la base de tout élément. En extrudant cette base dans les autres dimensions, on obtient alors tous les autres éléments naturels.

Nous pouvons également faire la distinction entre deux sous-type d'élément. Le premier sous-type sont les éléments classiques qui contiennent des noeuds à l'intérieur de ceux-ci. Leurs fonctions de forme sont identiques aux fonctions de Lagrange. Le second sous-type correspond à la famille des éléments Serendipity n'ayant des noeuds qu'aux arrêtes. Leurs fonctions de forme n'ont pas d'expression analytique simple et ces éléments seront introduits dans le chapitre 3.

2.6.1 Mapping d'un élément

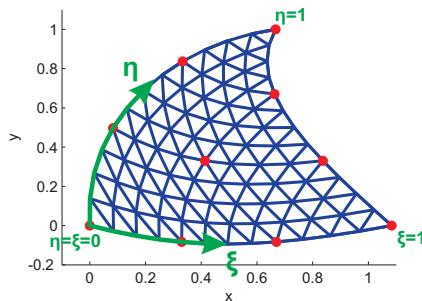


FIGURE 2.19 – Représentation d'un élément triangulaire d'ordre 3. Sont dessinés, en bleu, les iso- ξ , les iso- η et les iso- $(\xi+\eta)$. Les points rouge sont les noeuds. Ce qui se rapporte à l'espace de référence a été dessiné en vert.

Le mapping a pour but de décrire l'élément. A chaque point du domaine de référence est associé un point de l'espace réel et vice-versa. On a donc, de manière équivalente (en principe), pour l'élément e

$$\begin{cases} x = x^e(\xi, \eta) \\ y = y^e(\xi, \eta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \xi = \xi^e(x, y) \\ \eta = \eta^e(x, y) \end{cases}$$

4. Un simplexe est la généralisation du triangle à toutes les dimensions, le segment étant un 1-simplexe, le triangle un 2-simplex et le tétraèdre un 3-simplex.

2.7 Caractérisation du jacobien

Nous avons vu dans les rappels des éléments finis (sect. 2.5.3) qu'il est important que le mapping de chaque élément soit bijectif, ce qui revient à dire que le jacobien doit être positif partout. Bien qu'il soit aisément de calculer ce jacobien en un point, il n'est pas facile de vérifier que celui-ci est positif sur tout l'élément. Dans la suite, nous regarderons quelle forme prend le jacobien à la première dimension et nous montrerons quelles sont les difficultés associées.

En toute généralité, le jacobien J est donné par le déterminant de la matrice jacobienne \mathcal{J} d'une transformation. Si cette transformation est $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$, alors la composante (i, j) de la matrice s'écrit :

$$(\mathcal{J})_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{x})_i}{\partial(\boldsymbol{\xi})_j}$$

ce qui donne respectivement pour une transformation 2D-2D et 3D-3D :

$$\mathcal{J}^{2D}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}^{3D}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Le jacobien, à la deuxième dimension, vaut donc

$$J^{2D}(\xi, \eta) = \det \mathcal{J}^{2D} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.16)$$

Quelle que soit la dimension, le jacobien est une fonction polynomiale définie dans l'espace de référence. Il est donc exprimable à l'aide de n'importe quelle interpolation polynomiale.

À une dimension, le mapping prend la forme $x = x(\xi)$. Le jacobien est alors simplement la dérivée de x par rapport à la variable de référence :

$$J^{1D}(\xi) = \frac{dx(\xi)}{d\xi}$$

En 1D, l'ordre du jacobien est $N - 1$. Voyons ce que l'on obtient analytiquement avec les deux formulations.

2.7.1 Expression lagrangienne

En formulation lagrangienne, on a

$$x = \sum_{i=0}^N x_i \mathcal{L}_i^N \Leftrightarrow J = \sum_{i=0}^N x_i \frac{d\mathcal{L}_i^N}{d\xi}$$

Puisque le jacobien est d'ordre $N - 1$, on peut lui trouver une expression analytique. Par définition de l'interpolation de Lagrange, nous pouvons formuler :

$$\begin{cases} J = \sum_{i=0}^{N-1} J_i \mathcal{L}'_i^{N-1}(\xi) \\ J_i = \sum_{j=0}^N x_j \frac{d\mathcal{L}_j^N}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_i} \end{cases}$$

où les paramètres ξ_i sont ceux du mapping⁵ et \mathcal{L}'_i^{N-1} les fonctions de Lagrange obtenues grâce à ces paramètres. Puisqu'il faut un paramètre de moins pour les fonctions d'ordre $N - 1$, nous retirons ξ_N par convention.

Le détail des calculs est repris en annexe (A.1) et la solution vaut :

$$J_i = \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{j=0, j \neq i}^N \frac{x_i + \beta_{ij} x_j}{(i-j)}, \quad \beta_{ij} = (-1)^{j-i} \frac{i!(N-i)!}{j!(N-j)!}$$

où $\Delta\xi$ désigne l'écart entre les valeurs ξ_k ($\xi_k = \xi_0 + k\Delta\xi$).

La figure 2.20 présente le mapping d'un élément et son jacobien. On y remarque que le jacobien est négatif en deux endroits qui ne représentent qu'une faible partie de l'élément. Dès lors, détecter la négativité de ce jacobien n'est pas aisés. Une solution serait de calculer un grand nombre de points⁶. Toutefois, en prenant pour critère que le jacobien doit être positif aux points calculés, on ne peut être certain de détecter la négativité. Choisir une autre limite (qui serait fonction du nombre de points calculés) serait envisageable en 1D. On pourrait dire que toute valeur calculée doit être plus grande que μJ_{moyen} où μ serait relativement proche de zéro mais dépendrait

5. Notons que l'on prend les mêmes paramètres pour conserver une expression analytique simple. Il n'est pas du tout nécessaire de procéder ainsi.

6. Notons qu'une fois les points de Lagrange du jacobien obtenus on peut calculer d'autres points plus facilement. En effet, numériquement, il est plus rapide de calculer le jacobien grâce à son interpolation que d'utiliser l'algorithme qui a servi à obtenir les premières valeurs.

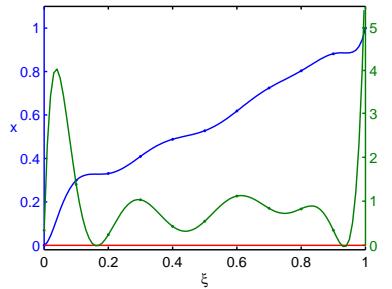


FIGURE 2.20 – Mapping d'un élément linéique ($x(\xi)$) en bleu et son jacobien en vert. Les points bleus sont les noeuds de l'élément et les points verts la valeur du jacobien aux noeuds. Le jacobien est faiblement négatif ($J_{\min} = -0.026$).

du nombre de point de sampling. Un tel critère serait difficile à établir, particulièrement pour les autres dimensions.

2.7.2 Expression b茅zienne

Les fonctions de B茅zier 1D ont 茅t茅 d茅finies comme ceci

$$\mathcal{B}_k^N(\xi) = C_N^k \xi^k (1 - \xi)^{N-k}$$

Sachant que l'on a

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!} \Rightarrow \begin{cases} k C_N^k = N C_{N-1}^{k-1} \\ (N-k) C_N^k = N C_{N-1}^k \end{cases} \quad (2.17)$$

les d茅riv茅es des fonctions de B茅zier sont facilement exprimables en terme des fonctions de B茅zier d'ordre inf茅rieur :

$$\begin{cases} d_\xi \mathcal{B}_0^N = -N \mathcal{B}_0^{N-1} \\ d_\xi \mathcal{B}_m^N = N \mathcal{B}_{m-1}^{N-1} - N \mathcal{B}_m^{N-1}, \quad 0 < m < N \\ d_\xi \mathcal{B}_N^N = N \mathcal{B}_{N-1}^{N-1} \end{cases} \quad (2.18)$$

On obtient alors immédiatement le jacobien :

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=0}^N b_i \frac{d\mathcal{B}_i^N}{d\xi} \\ &= \sum_{i=1}^N b_i N \mathcal{B}_{i-1}^{N-1} - \sum_{i=0}^{N-1} b_i N \mathcal{B}_i^{N-1} \\ &= N \sum_{i=0}^{N-1} (b_{i+1} - b_i) \mathcal{B}_i^{N-1} \end{aligned}$$

On se rend compte que la notion de dérivée est beaucoup plus naturelle avec l'interpolation de Bézier qu'avec celle de Lagrange.

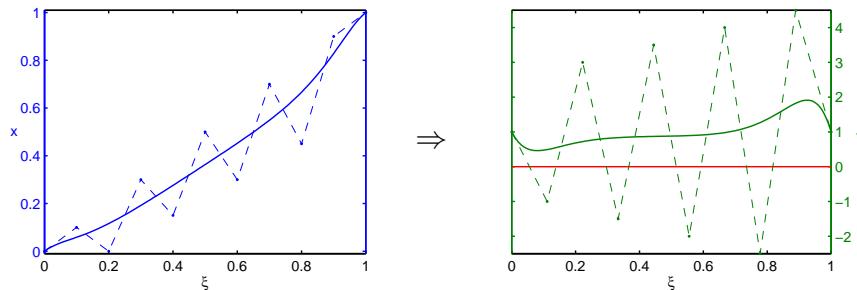


FIGURE 2.21 – Mapping d'un élément linéique ($x(\xi)$) en bleu et son jacobien en vert. Les points sont les points de contrôle respectivement de l'élément et du jacobien. Bien que l'élément soit relativement bon, certains points de contrôles du jacobien sont fortement négatifs.

Comme on l'a montré à la section 2.3, la courbe se situe toujours à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle. Cela signifie que l'on peut être certain que le jacobien est positif partout si tous les points de Bézier le sont. Il suffirait dès lors, pour vérifier le jacobien, de calculer ces points de contrôle et de vérifier qu'ils sont positifs. Seulement, comme le montre les graphiques de la figure 2.21, les points de contrôle peuvent se situer très loin de la courbe et ne pas refléter suffisamment bien celle-ci. Cela n'est pas un gros problème car, comme nous le verrons dans la section 2.9, nous pouvons aller plus loin en calculant plus de points de contrôle qui seront plus fidèles à la courbe.

2.8 Espace fonctionnel du jacobien

Pour pouvoir interpoler le jacobien, il faut connaître son ordre afin de savoir le nombre de valeurs à calculer (par sampling) et l'interpolation à appliquer. L'ordre du jacobien dépend de l'ordre de l'élément ainsi que de son type. On a déjà montré qu'à la première dimension, le jacobien est d'ordre $N - 1$ et le nombre de points à connaître pour retrouver l'interpolation est donc N . Aux dimensions supérieures, l'ordre n'est pas aussi évident à déterminer. Toutefois, on s'en sort relativement facilement grâce à la formulation de Bézier. En effet, comme l'ont montré les calculs de la section 2.7 cette formulation est plus naturelle pour exprimer le jacobien analytiquement.

2.8.1 Quadrangles

Pour rappels, les fonctions des quadrangles sont

$${}^B\mathcal{Q}_{i,j}^N(\xi, \eta) = {}^B\mathcal{B}_i^N(\xi) {}^B\mathcal{B}_j^N(\eta),$$

l'interpolation d'une composante du mapping s'écrit

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N x_{i,j} {}^B\mathcal{Q}_{i,j}^N(\xi, \eta)$$

et le jacobien en 2D prend la forme

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

Retenant les résultats obtenus en 1D (eq. (2.18)), il vient pour chaque dérivée partielle

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=0}^N \left[{}^B\mathcal{B}_j^N(\eta) \sum_{i=0}^N x_{i,j} \frac{d{}^B\mathcal{B}_i^N(\xi)}{d\xi} \right] \\ &= \sum_{j=0}^N \left[{}^B\mathcal{B}_j^N(\eta) \left(\sum_{i=1}^N x_{i,j} N {}^B\mathcal{B}_{i-1}^{N-1}(\xi) - \sum_{i=0}^{N-1} x_{i,j} N {}^B\mathcal{B}_i^{N-1}(\xi) \right) \right] \\ &= N \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^N (x_{i+1,j} - x_{i,j}) {}^B\mathcal{B}_i^{N-1}(\xi) {}^B\mathcal{B}_j^N(\eta) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Le jacobien s'exprime donc comme ceci :

$$J = N^2 \sum_{i,l=0}^{N-1} \sum_{j,k=0}^N \mathcal{B}_i^{N-1}(\xi) \mathcal{B}_j^N(\eta) \mathcal{B}_k^N(\xi) \mathcal{B}_l^{N-1}(\eta) f_{ijkl}$$

avec f_{ijkl} des fonctions des coordonnées des points de contrôle :

$$f_{ijkl} = (x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{k,l+1} - y_{k,l}) - (y_{i+1,j} - y_{i,j})(x_{k,l+1} - x_{k,l})$$

Géométriquement, ces fonctions donnent 2 fois l'aire contenue sous le quadrilatère délimité par les points $\mathbf{x}_{i+1,j}$, $\mathbf{x}_{k,l+1}$, $\mathbf{x}_{i,j}$ et $\mathbf{x}_{k,l}$. Suivant la disposition des points, cet aire peut être négative. La démonstration est faite en annexe (A.5).

Le jacobien d'un quadrangle se situe donc dans un espace fonctionnel donné par les fonctions

$$\mathcal{B}_i^{N-1}(\xi) \mathcal{B}_j^N(\eta) \mathcal{B}_k^N(\xi) \mathcal{B}_l^{N-1}(\eta)$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i^{N-1}(\xi) \mathcal{B}_k^N(\xi) &= C_{N-1}^i C_N^k \xi^{i+k} (1-\xi)^{(2N-1)-(i+k)} \\ &= \gamma_{ik}^N \mathcal{B}_{i+k}^{2N-1}(\xi) \end{aligned} \quad (2.20)$$

où les γ_{ik}^N sont des facteurs qui dépendent des nombres binomiaux. Les fonctions d'interpolation sont donc

$$\mathcal{B}\mathcal{Q}_{i+k,j+l}^{2N-1}(\xi, \eta)$$

et l'ordre du jacobien est $N_{\text{jac}} = 2N - 1$. Sachant que le nombre de points de l'interpolation d'ordre N est $N_{\text{ddl}} = (N + 1)^2$, le nombre de points de sampling est $N_s^{\text{jac}} = 4N^2$

2.8.2 Triangles

Pour rappels, les fonctions des triangles sont

$$\mathcal{B}\mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta) = C_N^i C_{N-i}^j \xi^i \eta^j (1-\xi-\eta)^{N-i-j}$$

et l'interpolation de la composante x s'écrit

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} x_{i,j} \mathcal{B}\mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta)$$

Les opérations étant similaires aux opérations effectuées en 1D (eq. 2.17 et 2.18), on a

$$\begin{cases} d_\xi^B \mathcal{T}_{0,j}^N = -N^B \mathcal{T}_{0,j}^{N-1}, & j < N \\ d_\xi^B \mathcal{T}_{0,N}^N = 0 \\ d_\xi^B \mathcal{T}_{i,j}^N = N^B \mathcal{T}_{i-1,j}^{N-1} - N^B \mathcal{T}_{i,j}^{N-1}, & i > 0, i+j < N \\ d_\xi^B \mathcal{T}_{i,j}^N = N^B \mathcal{T}_{i-1,j}^{N-1}, & i > 0, i+j = N \end{cases}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} x_{i,j} \frac{\partial^B \mathcal{T}_{i,j}^N}{\partial \xi} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{N-i} x_{i,j} N^B \mathcal{T}_{i-1,j}^{N-1} - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-i-1} x_{i,j} N^B \mathcal{T}_{i,j}^{N-1} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1-i} x_{i+1,j} N^B \mathcal{T}_{i,j}^{N-1} - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-i-1} x_{i,j} N^B \mathcal{T}_{i,j}^{N-1} \\ &= N \sum_{(i,j)}^{N-1} (x_{i+1,j} - x_{i,j})^B \mathcal{T}_{i,j}^{N-1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

si l'on désigne par $\sum_{(i,j)}^{N-1}$ la double somme sur i et j tel que $i, j > 0$ et $i + j < N - 1$. Remarquons que la dérivée conserve une expression très simple en 2D lorsqu'il s'agit de la formulation de Bézier (et il en sera de même aux dimensions supérieures) .

Le jacobien s'exprime donc comme ceci :

$$J = N^2 \sum_{(i,j)}^{N-1} \sum_{(k,l)}^{N-1} {}^B \mathcal{T}_{i,j}^{N-1} {}^B \mathcal{T}_{k,l}^{N-1} f_{ijkl}$$

où les f_{ijkl} sont les mêmes fonctions que pour les quadrangles.

La multiplication de deux fonctions triangles donne

$$\begin{aligned} ({}^B \mathcal{T}_{i,j}^{N-1} {}^B \mathcal{T}_{k,l}^{N-1})(\xi, \eta) &= C_{N-1}^i C_{N-1-i}^j C_{N-1}^k C_{N-1-k}^l \xi^{i+k} \eta^{j+l} (1 - \xi - \eta)^{(2N-2)-(i+k)-(j+l)} \\ &= \gamma_{ijkl}^N {}^B \mathcal{T}_{i+k,j+l}^{2N-2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

où les γ_{ijkl}^N sont des facteurs qui dépendent des nombres binomiaux. Il en résulte que l'ordre du jacobien d'un triangle est $N_{\text{jac}} = 2N - 2$. Sachant que le nombre de points de l'interpolation d'ordre N est $N_{\text{dil}} = (N + 1)(N + 2)/2$, le nombre de points du sampling est $N_s^{\text{jac}} = N(2N - 1)$.

2.8.3 Dimension 3

Il n'est pas nécessaire de faire tous les calculs afin de trouver de quel espace de fonctions le jacobien des éléments 3D dépend. En effet, au vu des résultats (2.19) et (2.21), il est évident que l'espace fonctionnel de la dérivée d'une interpolation ne dépend pas de la fonction interpolée. Seule la variable par laquelle l'interpolation est dérivée influence cet espace.

Cela implique que l'espace fonctionnel du jacobien à la dimension 3 est donné par l'espace fonctionnel du produit des dérivées :

$$E_f(J^{3D}) = E_f\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \xi}, \frac{\partial \bullet}{\partial \eta}, \frac{\partial \bullet}{\partial \zeta}\right)$$

où $E_f(\bullet)$ signifie l'espace fonctionnel de l'argument \bullet .

Hexaèdres

L'hexaèdre a pour fonction de Bézier

$$\mathcal{B}\mathcal{H}_{i,j,k}^N(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{B}_i^N(\xi) \mathcal{B}_j^N(\eta) \mathcal{B}_k^N(\zeta)$$

et sachant que l'on a entre-autre

$$\frac{\partial}{\partial \xi} E_f(\mathcal{B}\mathcal{H}^N(\xi, \eta, \zeta)) = E_f(\mathcal{B}^{N-1}(\xi) \mathcal{B}^N(\eta) \mathcal{B}^N(\zeta))$$

il vient, grâce à la règle (2.20),

$$E_f(J^{\mathcal{H}}) = E_f(\mathcal{B}^{3N-1}(\xi) \mathcal{B}^{3N-1}(\eta) \mathcal{B}^{3N-1}(\zeta)) = E_f(\mathcal{B}\mathcal{H}^{3N-1}(\xi, \eta, \zeta))$$

L'espace fonctionnel du jacobien d'un hexaèdre est donc celui d'un élément d'ordre $3N - 1$.

Tétraèdres

Le tétraèdre a pour fonction de Bézier

$${}^B\mathcal{T}_{i,j,k}^N(\xi, \eta, \zeta) = C_N^i C_{N-i}^j C_{N-i-j}^k \xi^i \eta^j \zeta^k (1 - \xi - \eta - \zeta)^{N-i-j-k}$$

Similairement au résultat (2.21), on a

$$\frac{\partial}{\partial \xi} E_f({}^B\mathcal{T}^N(\xi, \eta, \zeta)) = E_f({}^B\mathcal{T}^{N-1}(\xi, \eta, \zeta))$$

Grâce à la règle (2.22) qui est aussi d'application pour les tétraèdres, on a

$$E_f(J^T) = E_f({}^B\mathcal{T}^{3N-3}(\xi, \eta, \zeta))$$

L'espace fonctionnel du jacobien d'un tétraèdre est celui d'un élément tétraédrique d'ordre $3N - 3$.

Pentaèdres

Le pentaèdre a pour fonction de Bézier

$${}^B\mathcal{P}_{i,j,k}^N(\xi, \eta, \zeta) = {}^B\mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta) \mathcal{B}_k^N(\zeta)$$

N'ayant rien de nouveau, on trouve

$$E_f(J^P) = E_f({}^B\mathcal{T}_{i,j}^{3N-2}(\xi, \eta) \mathcal{B}^{3N-1}(\zeta))$$

L'espace fonctionnel du jacobien d'un pentaèdre n'est donc pas exactement l'espace d'un élément pentaédrique. Toutefois, on peut toujours le trouver dans l'espace du pentaèdre d'ordre $3N - 1$. Cela revient à échantillonner plus de points et donc à effectuer du travail supplémentaire mais cela simplifie la programmation.

2.9 Décomposition d'une interpolation de Bézier

Le simple calcul des points de contrôle du jacobien n'est pas toujours satisfaisant. En effet, ils peuvent être fortement négatifs sans que l'élément soit mauvais. La figure 2.22 présente une telle situation pour un élément 2D.

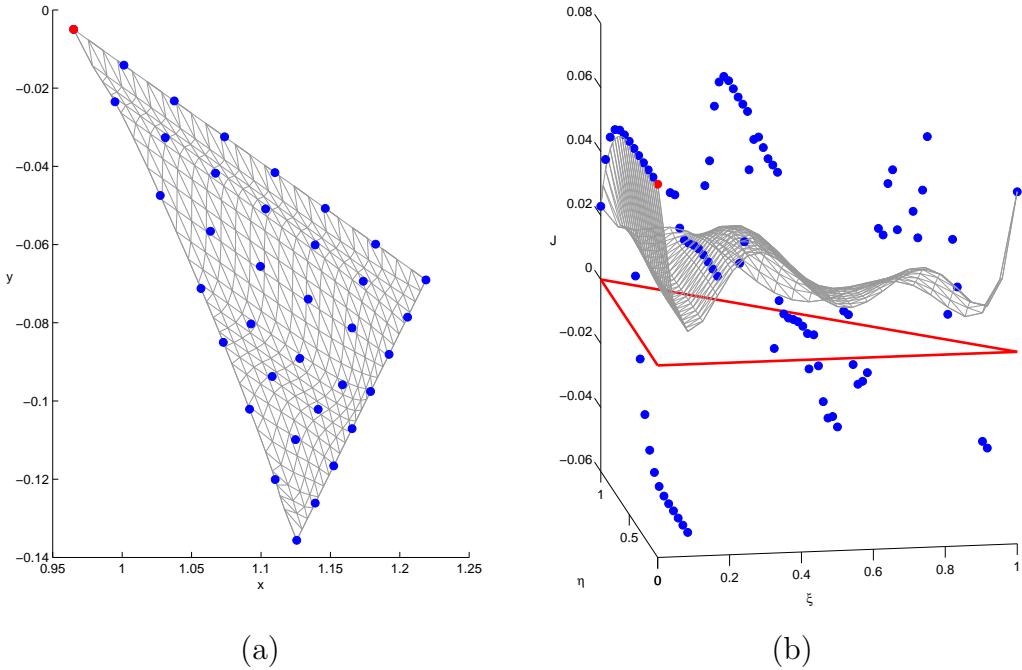


FIGURE 2.22 – Élément triangulaire d’ordre 7. En (a) : Représentation de l’élément dans l’espace réel, c’est-à-dire, dans le plan (x, y) . Les points bleus sont les noeuds de l’élément. Le point rouge indique le point origine de l’espace de référence, c’est-à-dire $(x(0,0),y(0,0))$. Le bord $\xi = 0$ correspond au bord du haut de l’élément. En (b) : Graphique du jacobien $J(\xi,\eta)$ en gris. Les points bleus sont les points de contrôle calculés numériquement.

On y voit que le bord $\xi = 0$ de l’élément a un jacobien relativement élevé et celui-ci diminue rapidement lorsque l’on s’en écarte. Il en résulte que les points de contrôle proches (situés en $\xi = 0.08333$) sont très négatifs.

Rejeter un tel élément n’est, en principe, pas dramatique. La raison est qu’après avoir analysé le maillage, il est nécessaire de le rendre correct en améliorant les éléments qui ont été rejettés. Rejeter un bon élément a donc pour seule conséquence d’augmenter le travail d’optimisation post-analyse. Toutefois, nous allons montrer qu’il est possible d’obtenir des points de contrôle plus proches de la valeur du jacobien. Ceux-ci seront forcément en plus grand nombre et nécessiteront des calculs supplémentaires mais nous obtiendrons une meilleure borne inférieure du jacobien.

Deux techniques peuvent être mises à profit pour obtenir ces nouveaux

points de contrôle. La première est d'augmenter l'ordre de l'interpolation et la seconde consiste à utiliser des interpolations sur de plus petits domaines de l'élément. Nous mettrons en évidence ces techniques dans cette section pour le cas 1D et nous montrerons comment généraliser numériquement à la section 3.4.2.

2.9.1 Augmentation de l'ordre

Toute interpolation d'ordre N peut être exprimée exactement par une interpolation d'ordre supérieur P . Ce constat est facile à comprendre. Les fonctions de Bézier d'ordre P forment une base complète de l'espace des fonctions polynomiales d'ordre P . Celles-ci peuvent donc représenter n'importe quelle fonction polynomiale d'ordre inférieur, en particulier, les fonctions de Bézier d'ordre N .

Soit donc les deux paramétrages de la même courbe

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=0}^N \mathbf{b}_i \mathcal{B}_i^N(\xi) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}'(\xi) = \sum_{i=0}^N \mathbf{b}'_i \mathcal{B}_i^P(\xi)$$

Si l'on note $(\mathbf{b}_i)_j$ la coordonnée j du point, on a la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{b}'_0)_j \\ (\mathbf{b}'_1)_j \\ \vdots \\ (\mathbf{b}'_P)_j \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_0)_j \\ (\mathbf{b}_1)_j \\ \vdots \\ (\mathbf{b}_N)_j \end{pmatrix}$$

où la composante u_{ij} de \mathbf{U} est déterminée en annexe (A.3, p. 77) et vaut

$$u_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{C_{P-N}^{i-j} C_N^j}{C_P^i} & \text{si } i - P + N \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } j + P - N < i \end{cases} \quad (2.23)$$

2.9.2 Sous-interpolation

L'interpolation de Bézier 1D d'ordre N définit une courbe polynomiale de cet ordre. Il en résulte que n'importe quelle section de la courbe peut

être exprimée exactement par la même interpolation. En particulier, nous pouvons obtenir une interpolation sur la première moitié de la courbe et une autre sur la seconde. Ces deux interpolations ensemble fournissent les points de contrôle recherchés.

Si l'on note \mathbf{b}'_i les nouveaux points de contrôle et $(\mathbf{b}_i)_j$ la j^{e} coordonnée du point, on a la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{b}'_0)_j \\ (\mathbf{b}'_1)_j \\ \vdots \\ (\mathbf{b}'_{2N})_j \end{pmatrix} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_0)_j \\ (\mathbf{b}_1)_j \\ \vdots \\ (\mathbf{b}_N)_j \end{pmatrix}$$

Il y a $2N+1$ nouveaux points de contrôle car chaque interpolation en a $N+1$ mais elles en ont un en commun. La valeur des composantes v_{ij} de la matrice \mathbf{V} est calculée en annexe (A.4, p. 79) et vaut :

$$v_{ij} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{C_i^j}{2^i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } i < j \end{array} \right\} & \text{si } i \leq N \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } j < i - N \\ \frac{C_{2N-i}^{N-j}}{2^{2N-i}} & \text{si } i - N \leq j \end{array} \right\} & \text{si } N < i \end{cases} \quad (2.24)$$

2.9.3 Stabilité

Dans les deux cas, on peut montrer la stabilité, c'est-à-dire montrer que les nouveaux points obtenus ne s'éloignent pas de la courbe réelle. Dit autrement, cela revient à démontrer que l'enveloppe convexe des points ne s'agrandit pas.

Soit \mathbf{b}_i les points initiaux et \mathbf{b}_i^* les points obtenus par l'une des deux méthodes ci-dessus. Notons $\text{conv}(\mathbf{b}_i)$ l'enveloppe convexe des points \mathbf{b}_i et $\mu(\text{conv}(\mathbf{b}_i))$ ⁷ sa mesure. La stabilité s'explique par le fait que l'on ait $\mathbf{b}_i^* \in \text{conv}(\mathbf{b}_i)$, ce qui implique que

$$\mu(\text{conv}(\mathbf{b}_i^*)) \leq \mu(\text{conv}(\mathbf{b}_i))$$

7. $\mu(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, d\Omega$.

Il faut donc prouver que les nouveaux points se placent toujours à l'intérieur de l'enveloppe convexe initiale. Pour que cela soit vrai, il faut que chaque nouveau point soit une combinaison convexe des points de contrôle d'origine. Autrement dit, ayant la relation suivante :

$$\mathbf{b}_i^* = \sum_{j=0}^N \lambda_j \mathbf{b}_j$$

il faut que la somme des coefficients λ_j soit égale à 1 pour que la relation soit une combinaison affine et que ceux-ci soient tous positifs pour qu'elle soit convexe.

Augmentation de l'ordre

Dans le cas de l'augmentation de l'ordre, $\lambda_j \equiv u_{ij}$ avec \mathbf{U} une matrice $(P+1) \times (N+1)$. Reprenant la valeur des éléments u_{ij} (éq. 2.23), la somme s'écrit

$$\sum_{j=0}^N u_{ij} = \sum_{j=\max(0, i-P+N)}^{\min(N, i)} \frac{C_{P-N}^{i-j} C_N^j}{C_P^i}$$

C_P^i peut s'exprimer en fonction des nombres binomiaux inférieurs :

$$\begin{aligned} C_P^i &= C_{P-1}^{i-1} + C_{P-1}^i \\ &= C_{P-2}^{i-2} + 2C_{P-2}^{i-1} + C_{P-2}^i \\ &= \dots \end{aligned}$$

tout en tenant compte du fait que $C_m^0 = C_{m-1}^0$ et $C_m^m = C_{m-1}^{m-1}$.

On a alors, pour un n donné,

$$C_P^i = \sum_{j=\max(0, i-P+n)}^{\min(i, n)} C_n^j C_{P-n}^{i-j}$$

et on retrouve le numérateur si l'on pose $n = N$. La somme des coefficients est donc bien égale à 1. Par ailleurs, chaque terme est positif étant donné que les nombres binomiaux le sont tous.

Sous-interpolation

Dans le cas des sous-interpolations, $\lambda_j \equiv v_{ij}$ dont la valeur est donnée à l'équation 2.24. Pour $i \leq N$, la somme vaut

$$\sum_{j=0}^N v_{ij} = \sum_{j=0}^i \frac{C_i^j}{2^i}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^i C_i^j &= \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}^j + \sum_{j=1}^i C_{i-1}^{j-1} \\ &= 2 \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}^j \\ &= \dots = 2^i \end{aligned}$$

La somme est donc bien unitaire.

Pour $i > N$, la somme vaut

$$\sum_{j=0}^N v_{ij} = \sum_{j=i-N}^N \frac{C_{2N-i}^{N-j}}{2^{2N-i}}$$

En changeant les bornes de sommation et sachant que $C_n^{n-a} = C_n^a$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N v_{ij} &= \sum_{j=0}^{2N-i} \frac{C_{2N-i}^{2N-i-j}}{2^{2N-i}} \\ &= \sum_{j=0}^{2N-i} \frac{C_{2N-i}^j}{2^{2N-i}} \end{aligned}$$

et l'on retrouve donc la même expression que pour $i \leq N$ ce qui implique que la somme est bien unitaire. Par ailleurs, tous les termes sont positifs puisqu'uniquement composés de nombres binomiaux.

2.9.4 Convergence

Il est important de définir ce que l'on entend par convergence. Étant donné que le jacobien est une fonction scalaire, son espace de valeur est de dimension 1 et son enveloppe convexe est un segment. Prenons un élément

de dimension 1, les points de contrôle sont alors notés J_i . Maintenant, imaginons que $\min(J_0, J_1, \dots, J_N) = J_0$ et $\max(J_0, J_1, \dots, J_N) = J_N$. Sachant que les nouvelles valeurs calculées par l'une des deux méthodes comprendront⁸ ces deux valeurs J_0 et J_N , l'enveloppe convexe restera inchangée.

Étant donné que J_0 et J_N sont également les minimum et maximum de la courbe, on peut identifier le critère pertinent à la convergence : la méthode converge si la taille de l'enveloppe convexe se rapproche de la taille de l'intervalle de valeur $[J_{\min}, J_{\max}]$ où J_{\min} et J_{\max} sont les valeurs minimum et maximum du jacobien.

On peut montrer que la seule possibilité pour que l'une des bornes de l'enveloppe convexe reste inchangée est que le point de contrôle se trouvant sur cette borne soit un point extrémité de l'interpolation. Ce point de contrôle est alors une des bornes de $[J_{\min}, J_{\max}]$. Grâce à cela et à la stabilité démontré avant, la convergence est assurée.

2.9.5 Comparaison

Les deux méthodes ont été appliquées sur la courbe de la figure 2.23. On y voit clairement que la seconde méthode est meilleure. Cela est facile à comprendre étant donné que le point milieu de la seconde méthode se trouve toujours sur la courbe.

^{8.} En effet, on a $u_{0,0} = u_{P,N} = v_{0,0} = v_{2N,N} = 1$ ce qui implique que les points extrémités de l'interpolation sont conservés.

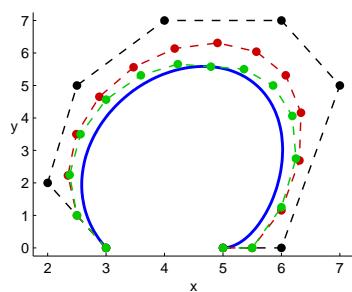


FIGURE 2.23 – Courbe de Bézier en bleu et les points de contrôle associés en noir. En rouge, les points de contrôle obtenus par un doublement de l’ordre de l’interpolation. En vert, les points de contrôle obtenus par la décomposition de la courbe en deux interpolations. Bien que le nombre de nouveaux points soit identique, on remarque bien que la seconde méthode permet de se rapprocher plus rapidement de la courbe.

Chapitre 3

Méthodes numériques

3.1 Introduction

Il n'est pas toujours évident de mettre en pratique les théories établies. Numériquement, les moyens employés sont parfois des moyens contournés afin de rendre les calculs plus aisés. C'est ce que nous allons montrer en introduisant les monômes.

Dans ce chapitre, nous décrivons d'abord les méthodes déjà utilisées dans les logiciels d'éléments finis. Les éléments Serendipity y sont introduits. Ensuite, l'identification des espaces fonctionnels du jacobien de ces éléments est donné à la section 3.3. Enfin, les méthodes d'analyse du jacobien sont décrites à la section 3.4.

3.2 Méthodes disponibles

Lorsque l'on présente les choses, il faut bien les décrire de manière parlante. Mais parfois, les expressions analytiques montrées sont loin d'être utilisées telles quelles. Nous allons montrer que l'interpolation de Lagrange n'est pas implémentée à partir de son expression analytique.

3.2.1 Monômes

Pour remplir la matrice \mathbf{K} des éléments finis (éq. (2.14), p. 21), l'intégration numérique se fait en échantillonnant l'intégrant en plusieurs points. Dans le cas simple que nous avons considéré, les fonctions de formes étant les mêmes pour tous les éléments, seul le jacobien change d'un élément à l'autre. Il est

nécessaire de rendre l'opération du calcul du jacobien très rapide. Pour ce faire, il est inconcevable de calculer analytiquement les dérivées des fonctions de Lagrange. On se sert en fait des monômes (c'est-à-dire des fonctions monomiales : $\xi^\alpha \eta^\beta \zeta^\gamma \dots$). Ceux-ci peuvent décrire tout interpolé polynomial à condition de sélectionner ceux dont dépend l'interpolation. Les monômes sont forcément au même nombre que le nombre de fonctions que contient l'interpolation, étant donnée qu'ils doivent engendrer le même espace fonctionnel.

Éléments 2D classique

Il est facile d'identifier les monômes dans ce que l'on pourrait appeler le triangle de Pascal des monômes¹. Celui-ci est repris dans le tableau 3.1.

			1				
		ξ		η			
	ξ^2		$\xi\eta$		η^2		
	ξ^3	$\xi^2\eta$		$\xi\eta^2$		η^3	
	ξ^4	$\xi^3\eta$	$\xi^2\eta^2$		$\xi\eta^3$		η^4
..

TABLE 3.1 – Triangle de Pascal appliqué aux monômes.

Dans le cas de l'interpolation d'un quadrangle les fonctions de Lagrange (eq. 2.5, 6) sont le produit de fonctions 1D sur les deux dimensions. Chaque espace fonctionnel des fonctions 1D est donné par les monômes (ξ^α et η^β respect.) d'ordre inférieur ou égal à N . Il en résulte que les monômes des fonctions 2D quadrangulaire sont sélectionné dans un losange du triangle de Pascal. Le tableau 3.2 le montre pour l'ordre N .

L'identification des monômes de l'interpolation triangulaire est différente. Au lieu de considérer les fonctions de Lagrange, il est plus simple de prendre en compte les fonctions de Bézier (eq. 2.7, p. 13). On peut y voir que la fonction ${}^B\mathcal{T}_{0,0}^N$ dépend de tous les monômes à travers la fonction $(1 - \xi - \eta)^N$. En développant, on peut s'apercevoir que les monômes de plus haut ordre sont les monômes $\xi^\alpha \eta^\beta$ dont la somme $\alpha + \beta$ est plus petite ou égale à N . Le tableau 3.3 montre ce résultat.

1. Le triangle de Pascal donne en fait le facteur du monôme si l'on veut que la somme de la ligne i (en commençant à 0) du tableau 3.1 soit $(\xi + \eta)^i$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & \xi & & \eta & & \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
 \xi^N & \vdots & & \ddots & & \eta^N & \\
 \xi^N \eta & \vdots & & \ddots & & \xi \eta^N & \\
 & \ddots & & \ddots & & & \\
 & & \xi^N \eta^N & & & &
 \end{array}$$

TABLE 3.2 – Monômes engendrant l'espace fonctionnel de l'interpolation quadrangulaire d'ordre N .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & \xi & & \eta & & \\
 \xi^2 & & \xi \eta & & \eta^2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
 \xi^N & \xi^{N-1} \eta & \dots & \xi \eta^{N-1} & \eta^N & &
 \end{array}$$

TABLE 3.3 – Monômes engendrant l'espace fonctionnel de l'interpolation triangulaire d'ordre N .

Éléments 2D de type Serendipity

Les éléments Serendipity sont une famille d'élément qui ne possèdent pas de noeuds intérieurs². Il en résulte une diminution des ddls et donc des fonctions d'interpolation. Les nouvelles fonctions sont forcément différentes puisqu'elles doivent conserver la propriété obligeant leur somme à être égale à 1. Les fonctions ne sont pas définies de manière analytique, on s'arrange pour réduire l'espace fonctionnel en sélectionnant les monômes qui doivent être retirés. Le tableau 3.4 présente les monômes restant en comparaison avec les tableaux 3.2 et 3.3.

Éléments 3D

Les monômes des éléments 3D sont obtenus selon le même principe. Les monômes d'un hexaèdre sont tous les monômes $\xi^\alpha \eta^\beta \zeta^\gamma$ pour lesquels

2. Pour être plus précis, ces éléments ne possède que des noeuds sur leurs arêtes, la distinction étant importante en 3D.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & & & 1 & & \\
 & \xi & \eta & & & & \xi & \eta & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \xi^N & \cdot & \cdot & \cdot & \eta^N & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \xi^N \eta & \cdot & \cdot & \cdot & \xi \eta^N & \cdot & \xi^{n-1} \eta & \dots & \xi \eta^{n-1} \cdot \eta^n
 \end{array}$$

TABLE 3.4 – Monômes engendrant l'espace fonctionnel de l'interpolation quadrangulaire et triangulaire de type Serendipity d'ordre N .

$\alpha, \beta, \gamma \leq N$. Les monômes des pentaèdres vérifient, $\alpha + \beta \leq N$ et $\gamma \leq N$ (la base triangulaire se situant dans les deux premières dimensions). Tandis que le tétraèdre a pour monômes ceux dont la somme des exposants est plus petite ou égale à N : $\alpha + \beta + \gamma \leq N$.

Les éléments de type Serendipity sont également obtenus de manière similaire. Ainsi, par exemple, les hexaèdres Serendipity ont pour monômes ceux dont les exposants vérifient

$$\begin{aligned}
 & \alpha \leq N \quad \text{et} \quad \beta, \gamma \leq 1 \\
 \text{ou} \quad & \beta \leq N \quad \text{et} \quad \alpha, \gamma \leq 1 \\
 \text{ou} \quad & \gamma \leq N \quad \text{et} \quad \alpha, \beta \leq 1
 \end{aligned}$$

3.2.2 Matrice des coefficients

Puisque l'on préfère définir les fonctions de forme³ au moyen des monômes, il faut déterminer une loi qui permet de passer d'une formulation à l'autre. En clair, imaginons que l'on veut connaître la valeur des fonctions de forme N_i en un point ξ donné. Ne voulant pas passer par l'expression analytique de ces fonctions, on ne peut calculer directement $N_i(\xi)$. Mais on peut calculer facilement les valeurs $m_j(\xi)$ des monômes. Il suffit donc de déterminer à l'avance la dépendance des fonctions d'interpolation par rapport aux monômes.

Mathématiquement, on a

$$N_i(\xi) = \sum_{j=0}^{N_{\text{ddl}}} c_{ij} m_j(\xi) \quad (3.1)$$

3. Rappelons que lorsque l'on parle de fonctions de forme, on parle des fonctions de Lagrange.

où N_{ddl} est le nombre de monômes et donc la dimension de l'espace fonctionnel. Les coefficients c_{ij} définissent une matrice carrée \mathcal{C} , la matrice des coefficients. Sa connaissance avec celle des monômes permet de calculer la valeur des fonctions de forme en un point.

Une méthode très simple et tout à fait générale permet de calculer la matrice des coefficients. Il suffit de considérer les contraintes soumises aux fonctions de forme. En effet, d'une part, on connaît les N_{ddl} monômes dont doivent dépendre les fonctions. D'autre part, on définit N_{ddl} points $\boldsymbol{\xi}_k$ numérotés de l'espace de référence. En ces points, toutes les fonctions de forme sont nulles sauf une, celle qui correspond au point. Cela s'exprime par

$$N_i(\boldsymbol{\xi}_k) = \delta_{ik} \quad (3.2)$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Notons $\mathbf{m}_{(\boldsymbol{\xi})}$ le vecteur contenant les monômes évalués en un point quelconque $\boldsymbol{\xi}$ et $\mathbf{N}_{(\boldsymbol{\xi})}$ le vecteur contenant la valeur des fonctions de forme en ce point. La relation (3.1) peut s'écrire :

$$\mathbf{N}_{(\boldsymbol{\xi})} = \mathcal{C} \mathbf{m}_{(\boldsymbol{\xi})} \quad (3.3)$$

et en évaluant cette expression aux points de référence, on a

$$\mathcal{C} \begin{pmatrix} m_0(\boldsymbol{\xi}_0) & \dots & m_0(\boldsymbol{\xi}_{N_{\text{ddl}}}) \\ m_1(\boldsymbol{\xi}_0) & \dots & m_1(\boldsymbol{\xi}_{N_{\text{ddl}}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N_{\text{ddl}}}(\boldsymbol{\xi}_0) & \dots & m_{N_{\text{ddl}}}(\boldsymbol{\xi}_{N_{\text{ddl}}}) \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (3.4)$$

où I est la matrice identité et provient de la contrainte 3.2. La matrice des monômes est très facile à calculer et en l'inversant, on obtient la matrice des coefficients. Notons que la matrice des coefficient constitue une matrice de changement de base.

3.2.3 Implémentation du calcul du jacobien

Le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne d'une transformation. La transformation en question étant le mapping, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$, la matrice, pour un élément 2D, s'écrit :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

Le jacobien vaut alors :

$$J(\xi, \eta) = (\det \mathcal{J})|_{(\xi, \eta)} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)|_{(\xi, \eta)}$$

Numériquement, il faut donc évaluer chaque dérivée partielle au point considéré pour obtenir le jacobien. Notant (x_i, y_i) la coordonnée du noeud i lié à la fonction de forme $N_i(\xi, \eta)$, on a

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}|_{(\xi, \eta)} = \sum_{i=0}^{N_{\text{ddl}}} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}|_{(\xi, \eta)}$$

On peut exprimer la dérivée des fonctions de forme grâce aux monômes et à la matrice des coefficients introduite à la section précédente. Il aurait été difficile de déterminer directement la dérivée des fonctions de formes analytiquement. Avec les monômes, l'opération devient très simple. En effet, la relation (3.1) permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi N_0|_{(\xi, \eta)} \\ \partial_\xi N_1|_{(\xi, \eta)} \\ \vdots \\ \partial_\xi N_{N_{\text{ddl}}}|_{(\xi, \eta)} \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \partial_\xi m_0|_{(\xi, \eta)} \\ \partial_\xi m_1|_{(\xi, \eta)} \\ \vdots \\ \partial_\xi m_{N_{\text{ddl}}}|_{(\xi, \eta)} \end{pmatrix} = \mathcal{C} (\partial_\xi \mathbf{m})_{(\xi, \eta)}$$

En résumé, on peut calculer le gradient en évaluant la dérivée de chaque monômes au point considéré et en effectuant le calcul matriciel suivant :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}|_{(\xi, \eta)} = \mathbf{n}_x^T \mathcal{C} (\partial_\xi \mathbf{m})_{(\xi, \eta)}$$

où \mathbf{n}_x est le vecteur contenant la première coordonnée de chaque noeud (c'est-à-dire les x_i).

3.2.4 Algorithme type

Regardons maintenant comment implémenter les deux calculs précités. En ce qui concerne la matrice des coefficients, deux informations sont à fournir. La première est une matrice reprenant les exposants (α, β, \dots) des monômes

$(\xi^\alpha \eta^\beta \dots)$. Ceux-ci sont sélectionnés comme expliqué à la section 3.2.1. La matrice, `expMon`, est de taille $N_{\text{ddl}} \times \text{dim}$ où `dim` est la dimension de l'élément.

La seconde information à fournir est la matrice reprenant les points de référence. Ces points peuvent être placés n'importe où mais sont généralement établis sur une grille régulière. La matrice, `pts`, est de même taille que celle des exposants des monômes.

Lorsque l'on a ces éléments, il reste à remplir la matrice explicitée à l'expression (3.4) et à l'inverser. En code, cela donne :

```
for (int i = 0; i < N_ddl; i++) {
    for (int j = 0; j < N_ddl; j++) {
        double dd = 1.;
        for (int k = 0; k < dim; k++) {
            dd = dd * pow(pts(j, k), expMon(i, k));
        }
        matrix(i, j) = dd;
    }
}
coefficients = invert(matrix);
```

3.3 Espace fonctionnel du jacobien

On a déjà détaillé les espaces fonctionnels du jacobien des éléments classiques. Les éléments Serendipity étant définis à partir des monômes, on a pas d'autre choix que de déterminer l'espace fonctionnel de leur jacobien grâce aux monômes. Cela n'est nullement contraignant, nous allons voir que cela est relativement facile. Notons qu'il aurait également été aisément de passer par les monômes pour les éléments classiques plutôt que par les fonctions de Bézier.

On l'a dit, l'espace fonctionnel du jacobien est donné par l'espace fonctionnel du produit des dérivées partielles :

$$\underbrace{\frac{\partial \cdot}{\partial \xi} \frac{\partial \cdot}{\partial \eta} \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} \cdots}_{n \text{ termes}}$$

où n est la dimension de l'élément. Il suffit donc de regarder quel est l'espace fonctionnel de chaque dérivée partielle, puis de considérer leur produit.

3.3.1 Quadrangles Serendipity

La figure 3.1 représente les monômes de l'élément ainsi que les monômes de la dérivée par rapport à ξ .

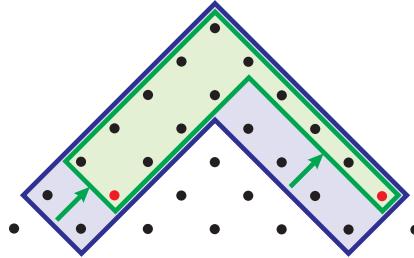


FIGURE 3.1 – Triangle de Pascal (tab. 3.1) représenté par les points noirs. Les monômes sélectionnés par le cadre bleu sont ceux du quadrangle Serendipity (d'ordre 5). Les monômes sélectionnés par le cadre vert sont ceux qui sont obtenus en dérivant par rapport à ξ les monômes de l'élément. Les points rouges correspondent aux monômes de plus haut ordre de la dérivée (ici respectivement $\xi^4\eta$ et η^5).

Pour un élément d'ordre N , les monômes de plus haut ordre sont

$$\begin{cases} \xi^N\eta \\ \xi\eta^N \end{cases}$$

comme indiqué sur le tableau 3.4 (p.43). Cela implique que les monômes de plus haut ordre des dérivées par rapport à ξ et η sont respectivement

$$\partial_\xi \rightarrow \begin{cases} \xi^{N-1}\eta \\ \eta^N \end{cases} \quad \text{et} \quad \partial_\eta \rightarrow \begin{cases} \xi^N \\ \xi\eta^{N-1} \end{cases} \quad (3.5)$$

Les monômes de plus haut ordre du jacobien sont alors donnés par la multiplication deux à deux des monômes de 3.5. On a

$$\begin{cases} \xi^{2N-1}\eta \\ \xi^N\eta^N \\ \xi\eta^{2N-1} \end{cases}$$

La figure 3.2 montre ce résultat dans le cas de $N = 5$.

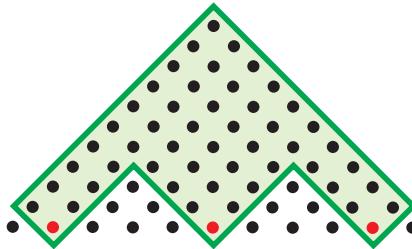


FIGURE 3.2 – Triangle de Pascal représenté par les points noirs. Les monômes sélectionnés par le cadre vert sont ceux du jacobien du quadrangle Serendipity (d'ordre 5). Les points rouges correspondent aux monômes de plus haut ordre du jacobien (ici respectivement $\xi^9\eta$, $\xi^5\eta^5$ et $\xi\eta^9$).

La dimension de l'espace fonctionnel du jacobien est $N^2 + 6N - 3$. Le nombre minimum de points de sampling est donc donné par ce nombre. Toutefois, il n'existe pas de fonction de Bézier⁴ de type «Serendipity». Compte tenu de cela deux choix sont possibles. Soit on utilise les fonctions de Bézier dont l'espace englobe l'espace fonctionnel du jacobien. Soit on cherche une méthode pour déterminer des fonctions d'interpolation positives sur tout le domaine afin de conserver la propriété intéressante des fonctions de Bézier (à savoir que l'objet interpolé se trouve toujours dans l'enveloppe convexe des points d'interpolation).

La première de ces solutions demande de calculer plus de points de contrôle mais reste tout à fait acceptable. En effet, cela n'empêche pas de sampler le jacobien en le nombre minimum de point. Or, nous le verrons, la partie de l'algorithme qui demande le plus d'effort est ce sampling.

3.3.2 Triangles Serendipity

Nous pouvons montrer que le jacobien du triangle Serendipity se trouve dans le même espace fonctionnel que celui du triangle classique. Il faudra donc sampler le jacobien en autant de points que pour l'élément classique.

3.3.3 Éléments 3D Serendipity

Par le même raisonnement, on peut montrer que l'hexaèdre Serendipity d'ordre N possède un jacobien se trouvant dans un espace fonctionnel de

4. Comprenez que l'interpolation de Bézier possède des propriétés que l'on ne peut conserver si on enlève certains monômes de l'espace fonctionnel.

dimension $N^3 + 13N^2 + 68N - 45$. Pour les éléments d'ordre élevé, cet espace est donc fortement réduit par rapport à l'élément classique.

Par ailleurs, le jacobien des tétraèdres Serendipity n'a pas un espace fonctionnel réduit par rapport à l'élément classique.

3.4 Méthodes d'analyse du jacobien

Nous avons à disposition les outils pour calculer le jacobien en n'importe quel point de l'élément. Nous pouvons le calculer en un nombre déterminé de points et rejeter l'élément si l'on obtient une valeur négative. Mais par ce seul calcul, nous ne pouvons être certain que l'élément a un jacobien positif partout. Pour s'en assurer, il faut calculer les points de contrôle à partir des points lagrangiens.

3.4.1 Matrice de formulation bázienne

Les interpolations de Lagrange et de Bézier étant équivalentes, les fonctions d'interpolation ne représentent que des bases différentes du même espace fonctionnel. Tout comme la matrice des coefficients, qui est une matrice de changement de base, on peut calculer une matrice qui permet de passer de la base de Lagrange à celle de Bézier. Toutefois, ce qui nous intéresse est l'inverse de cette matrice, c'est-à-dire celle qui nous permet de calculer les «composantes» de l'interpolation dans le nouvel espace.

Par définition de l'interpolation de Bézier, en ayant les points de contrôle ${}^B J_i$, nous pouvons calculer le jacobien en tout point par :

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{N_{\text{ddl}}} {}^B J_i B_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.6)$$

où les B_i sont les fonctions d'interpolation de Bézier.

Cela a pour conséquence qu'en samplant le jacobien en N_{ddl} points, nous pouvons obtenir le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} J(\boldsymbol{\xi}_0) \\ J(\boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ J(\boldsymbol{\xi}_{N_{\text{ddl}}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0(\boldsymbol{\xi}_0) & \dots & B_{N_{\text{ddl}}}(\boldsymbol{\xi}_0) \\ B_0(\boldsymbol{\xi}_1) & \dots & B_{N_{\text{ddl}}}(\boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0(\boldsymbol{\xi}_{N_{\text{ddl}}}) & \dots & B_{N_{\text{ddl}}}(\boldsymbol{\xi}_{N_{\text{ddl}}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^B J_0 \\ {}^B J_1 \\ \vdots \\ {}^B J_{N_{\text{ddl}}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{J}_s = \mathbf{M}^B \mathbf{J}$$

En inversant la matrice \mathbf{M} , on obtient donc la matrice de transformation \mathbf{T}^{LB} de taille $N_{\text{ddl}} \times N_{\text{ddl}}$ avec laquelle, on peut écrire :

$$^B \mathbf{J} = \mathbf{T}^{LB} \mathbf{J}_s \quad (3.8)$$

Nous pouvons remarquer que, mathématiquement, le choix des points de sampling n'a aucune importance. Toutefois, numériquement, il peut être judicieux d'optimiser ce choix afin de limiter les erreurs numériques.

Cas des éléments Serendipity

Lorsque l'élément Serendipity n'est pas un simplexe, on sait que le jacobien se trouve dans un espace fonctionnel de dimension inférieure à l'espace des fonctions de Bézier du même ordre. Il serait intéressant alors d'économiser du temps de calcul en ne samplant le jacobien qu'au nombre minimum de points requis. Dans ce cas, il faut calculer une matrice qui permet, à partir des valeurs samplées, de déterminer \mathbf{J}_s .

Soit ξ_i les N_{ddl} points de la matrice de transformation bázienne \mathbf{T}^{LB} et \mathbf{J}_s les valeurs du jacobien en ces points. Notons ξ'_j les n points de sampling et \mathbf{J}_n les valeurs du jacobien en ces points. On a,

$$\mathbf{J}_s = \begin{pmatrix} J(\xi_0) \\ J(\xi_1) \\ \vdots \\ J(\xi_{N_{\text{ddl}}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0(\xi_0) & \dots & N_n(\xi_0) \\ N_0(\xi_1) & \dots & N_n(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_0(\xi_{N_{\text{ddl}}}) & \dots & N_n(\xi_{N_{\text{ddl}}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(\xi'_0) \\ J(\xi'_1) \\ \vdots \\ J(\xi'_n) \end{pmatrix}$$

Or, grâce à la matrice des coefficients de l'élément et à partir de la relation (3.3), on a

$$(\mathbf{N}_{(\xi)})^T = (\mathbf{m}_{(\xi)})^T \mathcal{C}^T$$

ce qui implique

$$\begin{pmatrix} J(\xi_0) \\ J(\xi_1) \\ \vdots \\ J(\xi_{N_{\text{ddl}}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0(\xi_0) & \dots & m_n(\xi_0) \\ m_0(\xi_1) & \dots & m_n(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_0(\xi_{N_{\text{ddl}}}) & \dots & m_n(\xi_{N_{\text{ddl}}}) \end{pmatrix} \mathcal{C}^T \begin{pmatrix} J(\xi'_0) \\ J(\xi'_1) \\ \vdots \\ J(\xi'_n) \end{pmatrix}$$

Retenant la relation (3.8), on a alors

$${}^B\mathbf{J} = \mathbf{T}^{\mathcal{LB}} \begin{pmatrix} m_0(\boldsymbol{\xi}_0) & \dots & m_n(\boldsymbol{\xi}_0) \\ m_0(\boldsymbol{\xi}_1) & \dots & m_n(\boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_0(\boldsymbol{\xi}_{N_{\text{ddl}}}) & \dots & m_n(\boldsymbol{\xi}_{N_{\text{ddl}}}) \end{pmatrix} \mathcal{C}^T \mathbf{J}_n$$

Le produit des trois matrices ne varie pas d'un élément à l'autre et on peut la conserver dans une seule matrice. On a alors

$${}^B\mathbf{J} = \mathbf{T}_{\text{Ser.}}^{\mathcal{LB}} \mathbf{J}_n$$

avec $\mathbf{T}_{\text{Ser.}}^{\mathcal{LB}}$ une matrice de taille $N_{\text{ddl}} \times n$.

3.4.2 Décomposition des points de contrôle

Comme expliqué à la section 2.9 (p. 32), on peut calculer un certain nombre de points supplémentaires afin de rapprocher les points de contrôle de la valeur réelle du jacobien. L'augmentation de l'ordre étant peu efficace, on utilise la technique de sous-interpolation. Celle-ci conduit à définir une matrice \mathbf{D} qui, appliquée au vecteur ${}^B\mathbf{J}$, donne les nouveaux points de contrôle.

La première étape est de définir les sous-domaines d'interpolation. Aucune restriction sur leur nombre n'est d'application. En effet, on peut décomposer une courbe en plus de deux parties. Et cela reste vrai pour n'importe quel élément. Toutefois, on peut réappliquer la décomposition par récurrence ce qui permet de ne considérer que le facteur 2. La figure 3.3 montre, dans ce cas, les sous-domaines des éléments triangulaires et quadrangulaires.

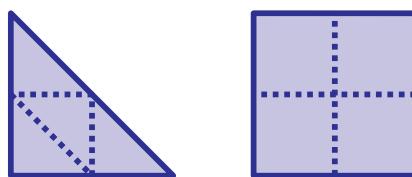


FIGURE 3.3 – Découpage en sous-domaines (dans l'espace de référence) des éléments triangulaires et quadrangulaires.

Chaque sous-domaine définit une nouvelle interpolation et il faut calculer les points de contrôle associés. Puisque l'on veut appliquer un algorithme de récurrence, la seule information pertinente est celle des points de contrôle de l'interpolation supérieure. Mais connaissant la matrice de passage des points lagrangiens aux points béziers, le plus facile est de tirer profit de cela.

La génération de la matrice se fera d'abord en calculant les points de Lagrange à partir des points de contrôle supérieurs puis en calculant les points de contrôle associés.

Soit ξ_i^1 les points du premier sous-domaine. Les points de Lagrange sont obtenus par le système matriciel tiré de la relation (3.6) :

$$\begin{pmatrix} J(\xi_0^1) \\ J(\xi_1^1) \\ \vdots \\ J(\xi_{N_{\text{ddl}}}^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0(\xi_0^1) & \dots & B_{N_{\text{ddl}}}(\xi_0^1) \\ B_0(\xi_1^1) & \dots & B_{N_{\text{ddl}}}(\xi_1^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0(\xi_{N_{\text{ddl}}}^1) & \dots & B_{N_{\text{ddl}}}(\xi_{N_{\text{ddl}}}^1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^B J_0 \\ {}^B J_1 \\ \vdots \\ {}^B J_{N_{\text{ddl}}} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{J}_1 = \mathbf{M}^1 {}^B \mathbf{J}$$

À condition que les points ξ_i^1 soient rangés dans le même ordre que les points initiaux, on peut y appliquer la matrice de transformation de la relation 3.8 :

$${}^B \mathbf{J}^1 = \mathbf{T}^{\mathcal{LB}} \mathbf{M}^1 {}^B \mathbf{J}$$

Définissant les matrices \mathbf{M}^2 , \mathbf{M}^3, \dots pour l'ensemble des sous-domaines, la matrice de décomposition se construit par bloc et s'écrit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \mathbf{T}^{\mathcal{LB}} \mathbf{M}^1 \\ \mathbf{T}^{\mathcal{LB}} \mathbf{M}^2 \\ \vdots \end{array} \right] \end{pmatrix}$$

de telle manière que l'on a

$${}^B\mathbf{J}_D = \begin{pmatrix} {}^B\mathbf{J}^1 \\ {}^B\mathbf{J}^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{D} \ {}^B\mathbf{J}$$

Récurrence

On peut reprendre chaque sous-vecteur de ${}^B\mathbf{J}_D$ (${}^B\mathbf{J}^1$) et réappliquer \mathbf{D} afin de continuer la décomposition de Bézier.

3.4.3 Points des sous-domaines

L'identification des points des sous-domaines est relativement simple en dehors du tétraèdre. La figure 3.3 montre quels sont les sous-domaines du triangle et du quadrangle. Comme décrit à la section 3.2.4, les points sont rangés dans une matrice ligne par ligne avec chaque composante dans une colonne différente. Notons ξ la matrice des points de l'interpolation d'origine et ξ^n la matrice des points du sous-domaine n .

Pour le triangle, les points des sous domaines peuvent être obtenus à partir de ξ par les relations :

$$\begin{cases} \xi^1 = \xi/2 \\ \xi^2 = (\xi + \mathbf{t}_1)/2 \\ \xi^3 = (\xi + \mathbf{t}_2)/2 \\ \xi^4 = (-\xi + \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)/2 \end{cases}$$

où la matrice \mathbf{t}_i est composée de 1 dans la colonne i et de 0 ailleurs. Celle-ci implique une translation unitaire sur les points selon la coordonnée i de l'espace.

Généraliser aux autres éléments ne pose pas de problème excepté pour le tétraèdre. Pour celui-ci, les 4 premiers sous-domaines sont représentés à la figure 3.4.

La génération des points de ces 4 sous-domaines se fait donc grâce aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \xi^1 = \xi/2 \\ \xi^2 = (\xi + \mathbf{t}_1)/2 \\ \xi^3 = (\xi + \mathbf{t}_2)/2 \\ \xi^4 = (\xi + \mathbf{t}_3)/2 \end{cases}$$

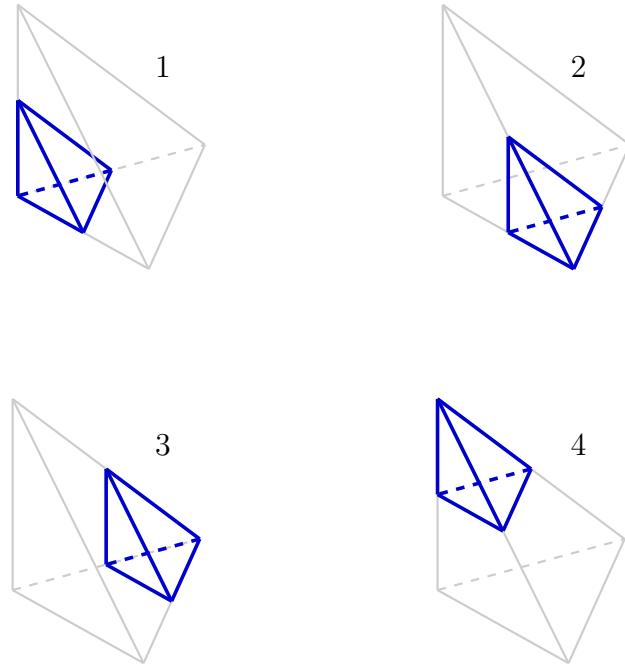


FIGURE 3.4 – Les 4 premiers sous-domaines du tétraèdre.

Les 4 derniers sous-domaines sont contenus dans l'espace représenté à la figure 3.5. Cette espace est de forme octaédrique et ne peut être divisé en 4 tétraèdres isométriques au tétraèdre initial.

Il y a différentes façons de découper l'octaèdre. La figure 3.6 présente l'une de ces manières, correspondant à la génération suivante de points :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \xi^5 = (1 - \xi - \zeta)/2 \\ \eta^5 = (1 - \eta - \zeta)/2 \\ \zeta^5 = \zeta/2 \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^6 = \xi/2 \\ \eta^6 = (1 - \eta)/2 \\ \zeta^6 = (\eta + \zeta)/2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \xi^7 = (1 - \xi)/2 \\ \eta^7 = \eta/2 \\ \zeta^7 = (\eta + \zeta)/2 \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^8 = (\xi + \zeta)/2 \\ \eta^8 = (\eta + \zeta)/2 \\ \zeta^8 = (1 - \zeta)/2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

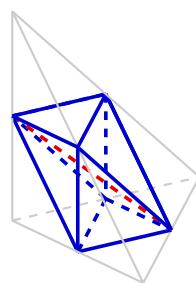


FIGURE 3.5 – Domaine restant lorsque les 4 premiers sous-domaines ont été retirés.

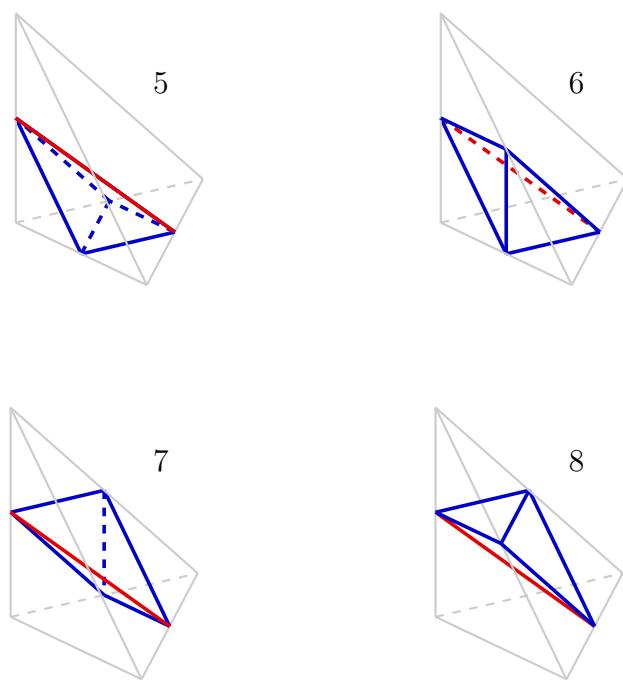


FIGURE 3.6 – Les 4 sous-domaines restants.

Chapitre 4

Résultats

4.1 Le cercle

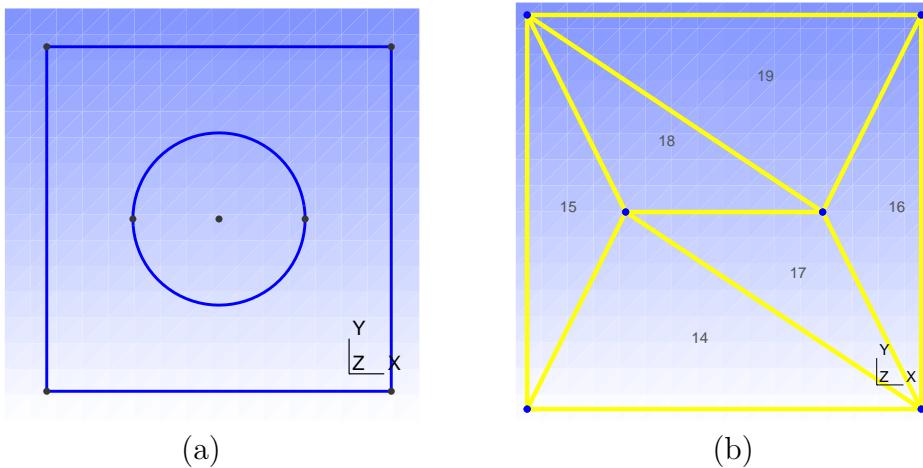


FIGURE 4.1 – (a) Géométrie du cercle 1. (b) Maillage d'ordre 1 du cercle 1.

La figure 4.1(a) montre la géométrie d'un cercle généré à partir de 2 points. Si les éléments construits tout autour sont de taille trop importante, seuls 2 d'entre eux entourent le cercle. Cela peut poser des problèmes au niveau de la représentation de la géométrie. À l'ordre 1 (fig. 4.1(b)), le trou disparait complètement dans le maillage. On est alors obligé de monter en ordre comme cela a été fait dans les figures 4.2. On voit dans ceux-ci qu'on ne peut obtenir un bon maillage avec cette configuration.

La solution généralement apportée est de raffiner le maillage. Cela permet, en effet, d'améliorer la représentation de la géométrie mais le nombre

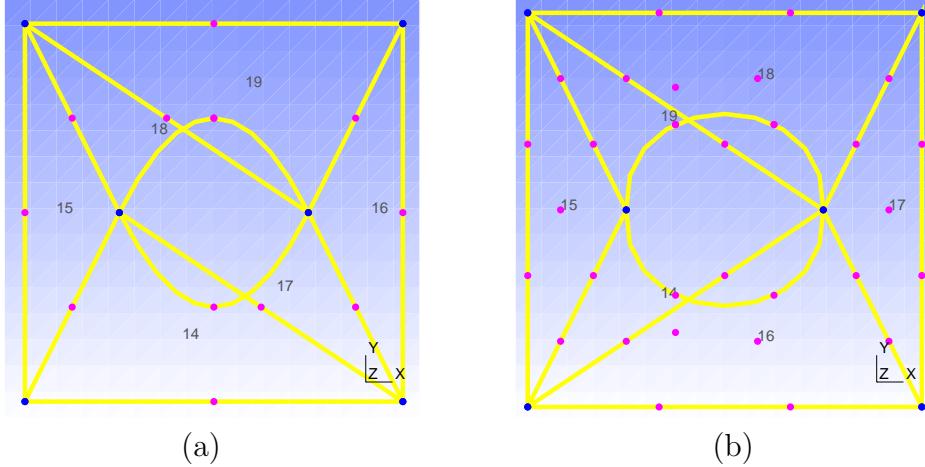


FIGURE 4.2 – (a) Maillage d’ordre 2 du cercle 1. (b) Maillage d’ordre 3 du cercle 1.

d’éléments peut considérablement augmenter. Une autre solution serait d’optimiser les éléments dont le jacobien est mauvais en courbant les arrêtes de ceux-ci. Il est peu probable d’arriver à un maillage satisfaisant dans ce cas-ci étant donné la taille importante des éléments et le faible espace contenu entre le cercle et la frontière du maillage. Mais il n’est pas inconcevable dans l’absolu de construire deux éléments corrects entourant pleinement un cercle.

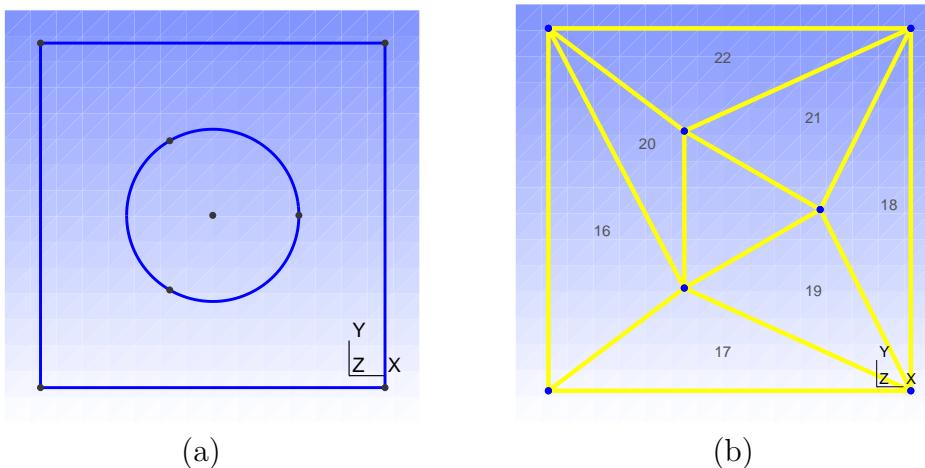


FIGURE 4.3 – (a) Géométrie du cercle 2. (b) Maillage d’ordre 1 du cercle 2.

La figure 4.3(a) présente la même géométrie pour laquelle on a placé 3 points sur le cercle. Le maillage linéaire (fig. 4.3(b)) n’est pas représentatif

de la géométrie étant donnée que les trois éléments entourant le cercle sont trop peu.

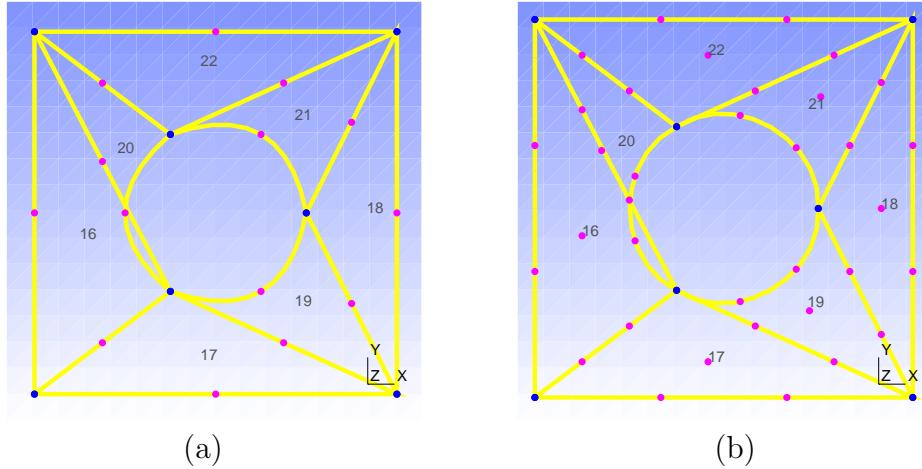


FIGURE 4.4 – (a) Maillage d’ordre 2 du cercle 2. (b) Maillage d’ordre 3 du cercle 2.

Les images de la figure 4.4 montrent le maillage d’ordre 2 et 3 du cercle 2. On peut remarquer que dans ce genre de situation, plus on monte en ordre, plus on s’expose à de mauvais éléments. En effet, l’élément 20 devient mauvais à l’ordre 2 tandis que les éléments 19 et 21 deviennent mauvais à partir de l’ordre 3. Les graphiques de la figure 4.5 montrent que le jacobien de l’élément 21 est positif à l’ordre 2 mais qu’il devient négatif sur un coin à l’ordre 3. Toutefois, cette négativité est faible et il serait relativement aisé de rendre l’élément acceptable.

La figure 4.6(a) présente le cercle sur lequel on a placé 4 points. Dans cette configuration, avec la taille d’élément considérée, les éléments restent bons quelque soit l’ordre. La figure 4.7(a) montre le maillage obtenus pour l’ordre 2.

Cela n’empêche pas, lorsque l’on diminue la taille des éléments (fig. 4.7(b)), de pouvoir se retrouver avec de mauvais éléments dont l’optimisation est possible. En effet, cela ne se voit pas forcément mais les 4 éléments entourant le cercle sont mauvais. La figure 4.8 reprend le jacobien de l’élément 43. On peut comprendre en regardant le mapping qu’on pourrait rendre ces éléments acceptables en optimisant le placement des noeuds intérieurs.

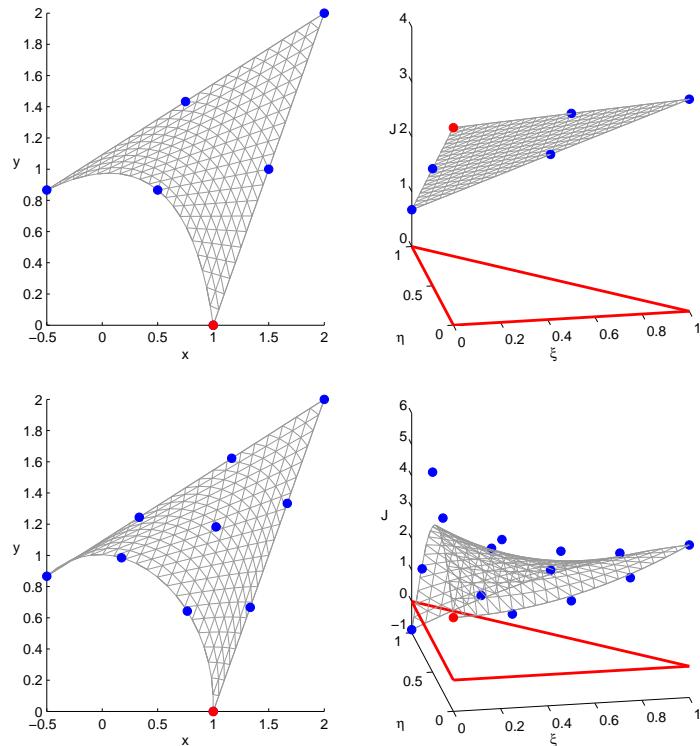


FIGURE 4.5 – Mapping et jacobien de l’élément 21 du maillage de la figure 4.4(a) et 4.4(b) respectivement.

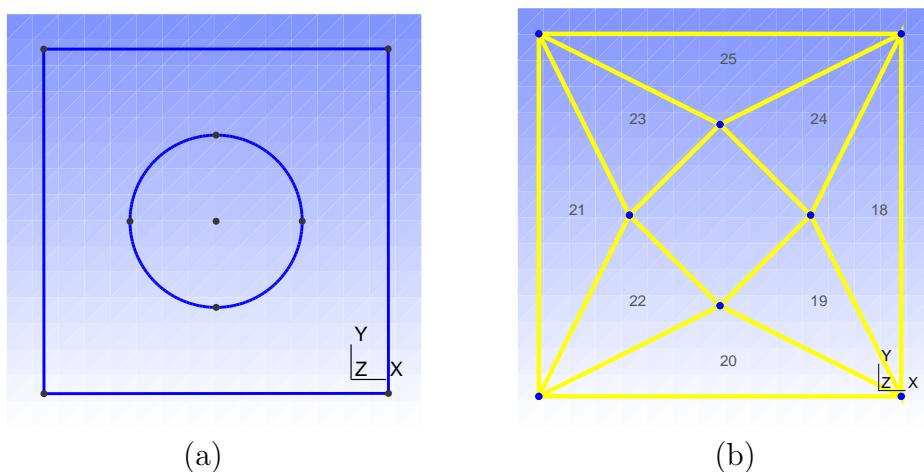


FIGURE 4.6 – (a) Géométrie du cercle 3. (b) Maillage d’ordre 1 du cercle 3.

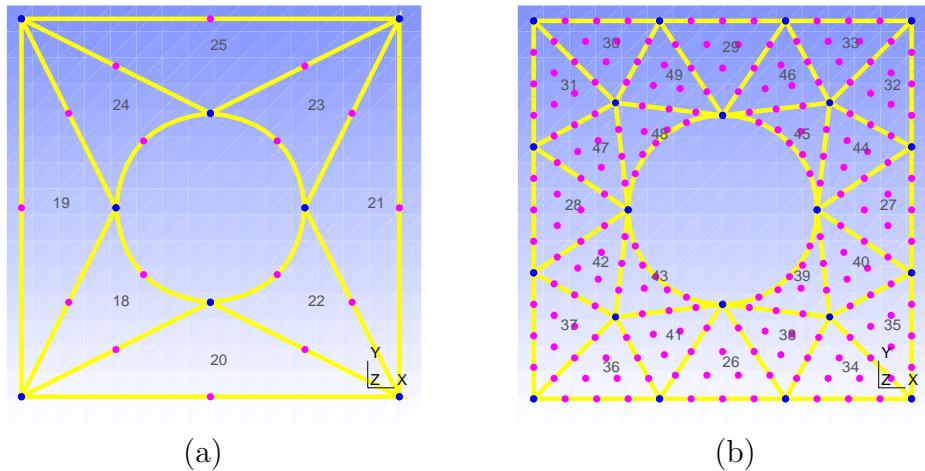


FIGURE 4.7 – (a) Maillage d'ordre 2 du cercle 3. (b) Maillage fin d'ordre 4 du cercle 3.

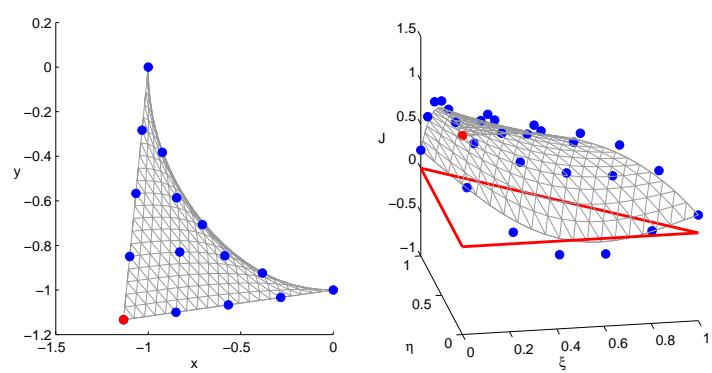


FIGURE 4.8 – Mapping et jacobien de l’élément 43 du maillage de la figure 4.7(b).

En plaçant les points en d'autres endroits sur le cercle (fig. 4.9(a)), on peut obtenir un maillage relativement différent. La figure 4.9(b) présente un maillage d'ordre 2 qui est assez mauvais alors que le maillage de la figure 4.7(a) était tout à fait correct.

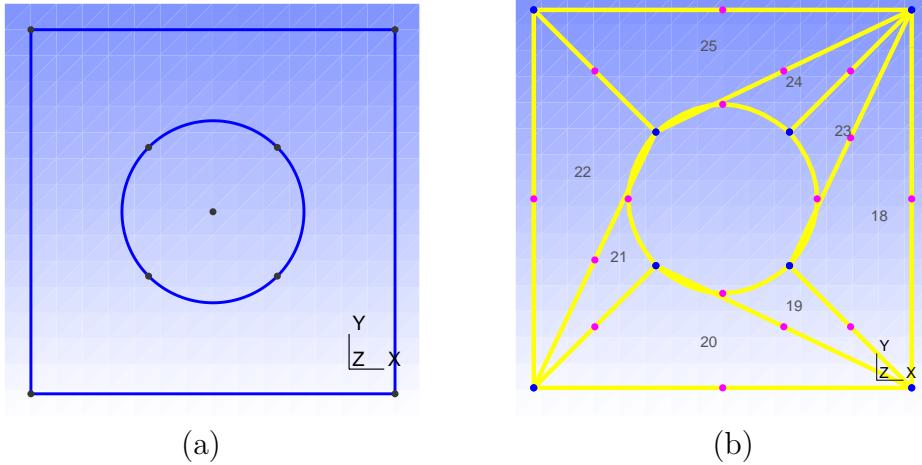


FIGURE 4.9 – (a) Géométrie du cercle 4. (b) Maillage d'ordre 2 du cercle 4.

Par contre, les maillages plus fins présents à la figure 4.10 deviennent relativement bons même si des éléments sont mauvais dès l'ordre 3 comme le montre le graphique du jacobien de la figure 4.11.

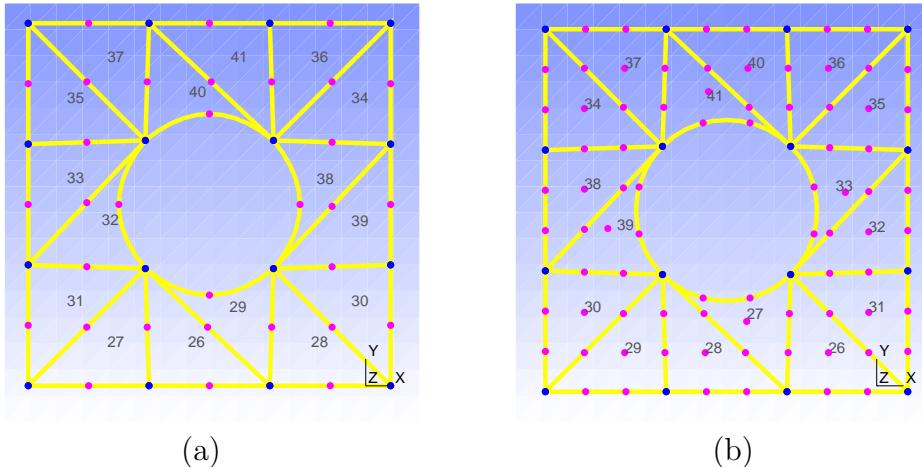


FIGURE 4.10 – (a) Maillage fin d'ordre 2 du cercle 4. (b) Maillage fin d'ordre 3 du cercle 4.

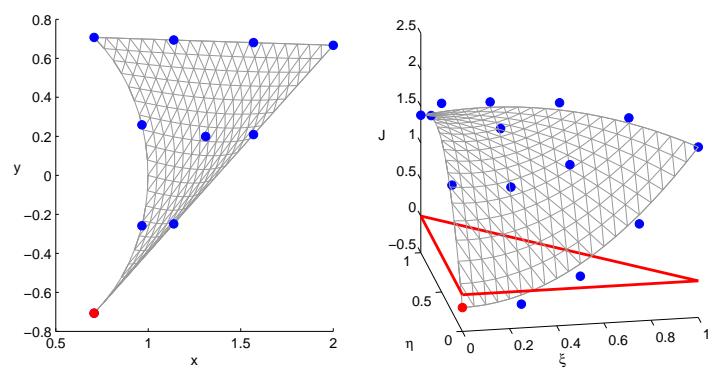


FIGURE 4.11 – Mapping et jacobien de l’élément 33 du maillage de la figure 4.10(b).

4.2 La sphère

Deux géométries ont été testées. Celles-ci sont représentées à la figure 4.12. Dans la première, les points de la sphère sont placés selon les axes du cube limitant le domaine. Dans la seconde, les points sont mis de façon quelconque.

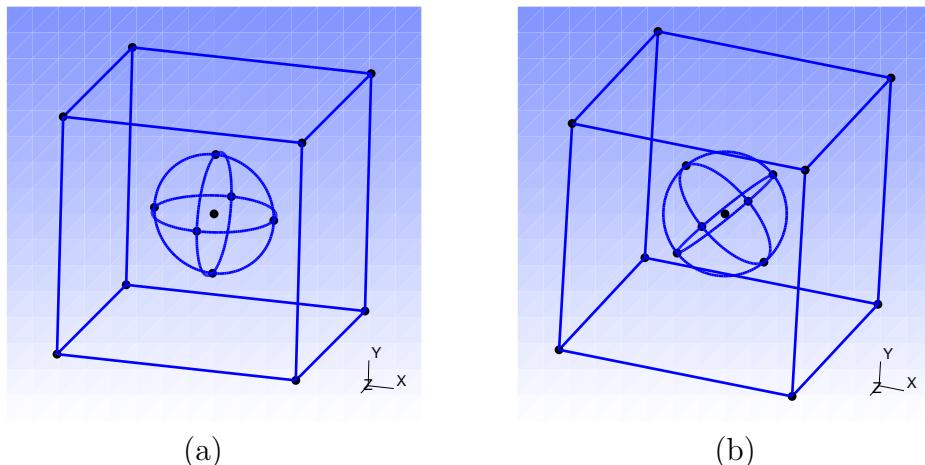


FIGURE 4.12 – Deux géométries d'une sphère.

La figure 4.13 présente des maillage grossiers de ces géométries. Les éléments de la première géométrie sont tous bons tandis que le second maillage présente 13 mauvais éléments parmi les 60. La figure 4.14 montre une partie de ces mauvais éléments.

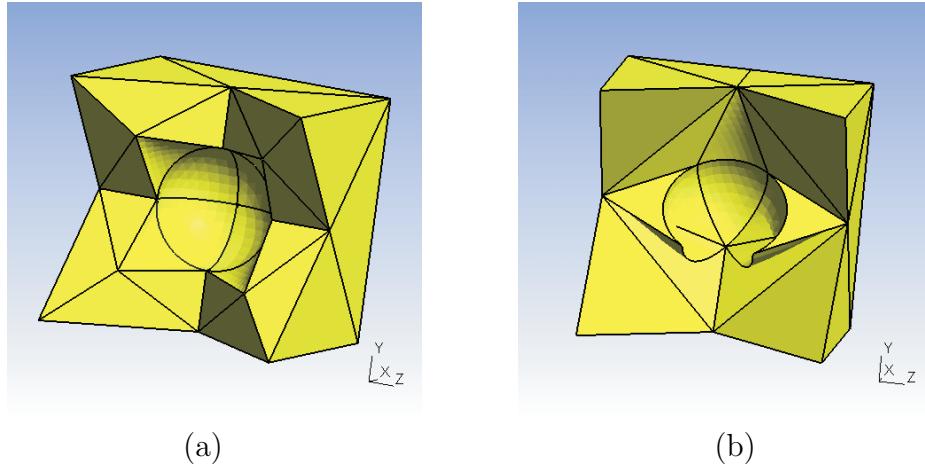


FIGURE 4.13 – Maillage d’ordre 4 correspondant aux géométrie de la figure 4.12. Le nombre de tétraèdre est respectivement de 92 et 60.

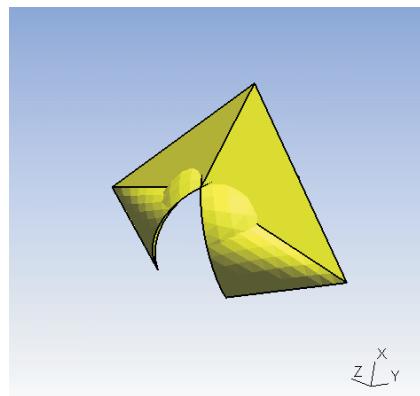


FIGURE 4.14 – Quelques mauvais éléments de la seconde géométrie, le maillage étant celui de la figure 4.13. On voit clairement par la partie bombée que l’une des faces de chaque tétraèdres du bas se place en dehors de l’élément.

4.3 Optimisation

Les figures 4.15 et 4.16 illustrent l'optimisation des éléments. Les maillages obtenus sont tous bons. Toutefois, il est à noter qu'en dessous de l'ordre 4, le maillage du cercle 2 (fig. 4.15(a)) est difficilement optimisable. En effet, en dessous de cet ordre, l'élément 20 ne trouve pas de configuration acceptable.

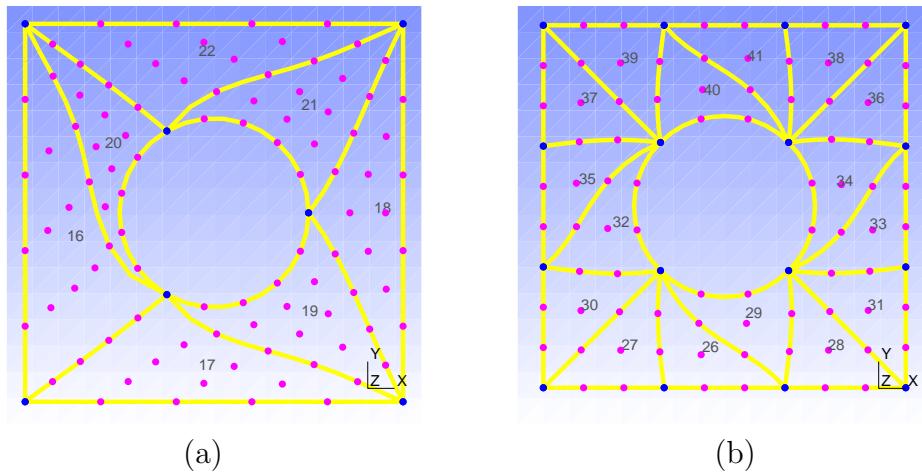


FIGURE 4.15 – Maillages optimisés. (a) Maillage d'ordre 5 du cercle 2 (fig. 4.3(a)). (b) Maillage d'ordre 3 du cercle 4 (correspondant au maillage de la fig. 4.10(b)).

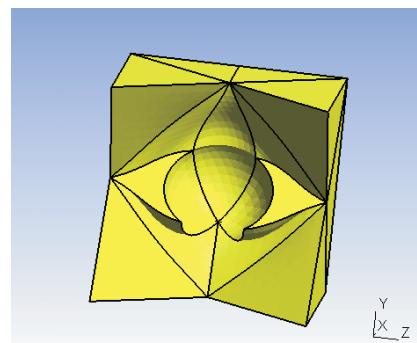


FIGURE 4.16 – Maillage optimisé de figure 4.13(b).

4.4 Maillage 2D autour d'une coupe d'aile d'avion

La figure 4.17 présente la géométrie réaliste d'une aile d'avion. La figure 4.18 montre un maillage relativement grossier d'ordre 7. Certains éléments sont mauvais. L'élément dessiné en mauve est typiquement un élément qui nécessite une décomposition de l'interpolation de Bézier afin de déterminer s'il est bon. Les figures 4.19(a) et 4.20 présentent des vues différentes du graphique du jacobien pour lesquels sont dessinés les points de contrôle jusqu'à la seconde décomposition.

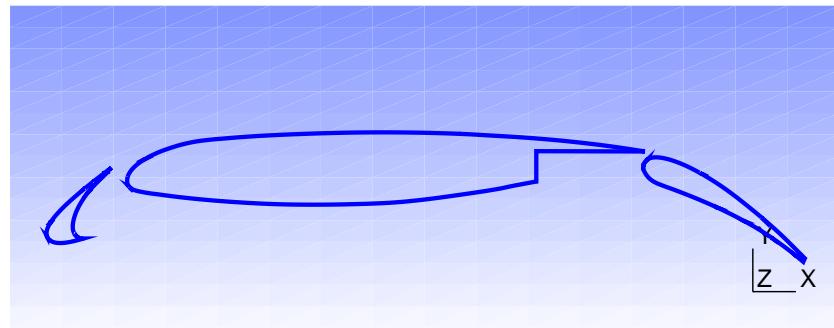


FIGURE 4.17 – Géométrie d'une section d'aile d'avion.

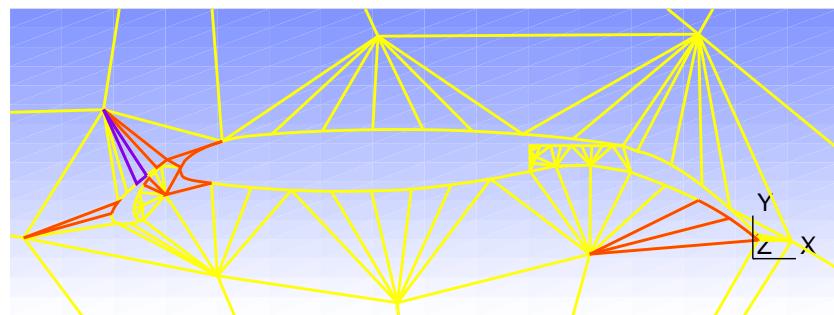


FIGURE 4.18 – Maillage d'ordre 7 de l'aile. Les éléments rouge sont de mauvais éléments. L'élément mauve est un bon élément dont le jacobien est très proche de zéro.

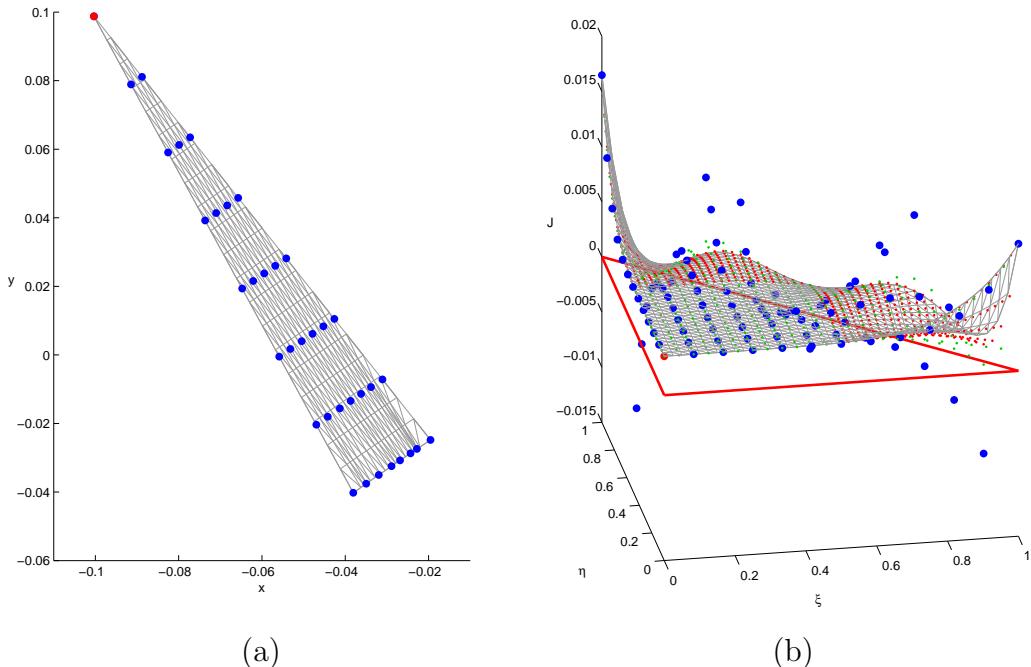


FIGURE 4.19 – Élément triangulaire d’ordre 7 dessiné en mauve sur la figure 4.18. (a) Mapping. (b) Jacobien de l’élément. Les points bleus sont les points de contrôle initiaux. Les points verts sont les points obtenus grâce à la première décomposition de Bézier. Les points rouges sont les points obtenus à la seconde décomposition de Bézier. La première décomposition fournissant les points de 4 sous-interpolations, seules les sous-interpolations possédant encore des points négatifs en de nouveau décomposés.

4.5 Comparaison des méthodes

Deux méthodes ont été testées afin de comparer les performances. La première consiste en une analyse élément par élément tandis que la seconde analyse tous les éléments d’un coup afin de pouvoir utiliser les méthodes BLAS de niveau 3.

Les tests ont été effectués avec un processeur Core 2 Duo T5500 (1660 MHz, 64Ko cache L1, 2048 Ko cache L2). La mémoire RAM était en quantité suffisante. Notons que Gmsh a tendance à limiter l’utilisation du processeur à 50% de ses capacités. La librairie BLAS utilisée était Intel MKL.

Le tableau 4.1 reprend les temps mis pour le sampling du jacobien et le

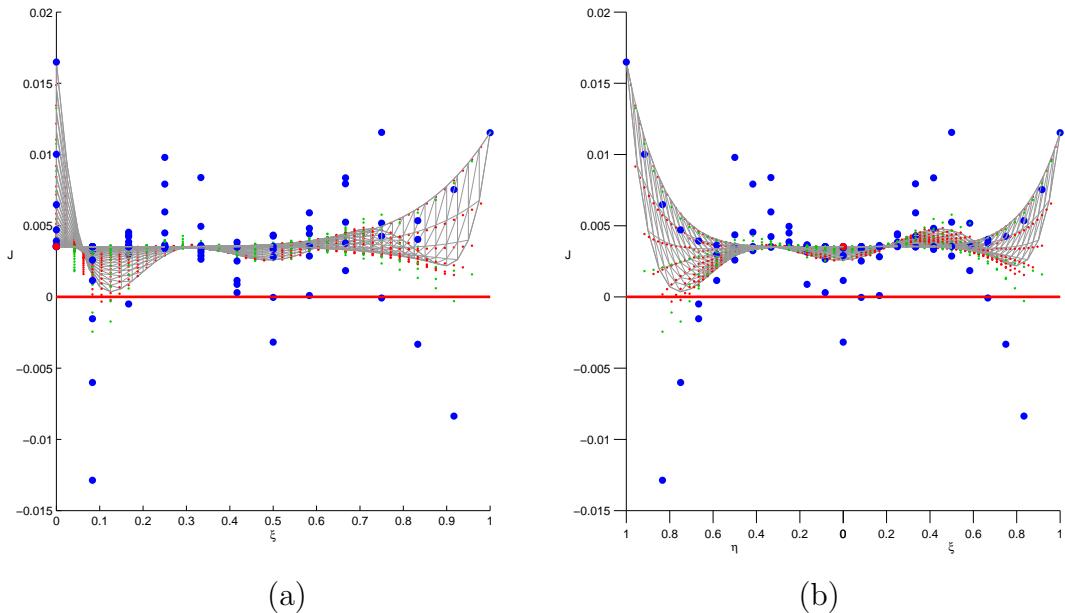


FIGURE 4.20 – Vues différentes du graphique du jacobien de la figure 4.19(b). (a) Vue dans la direction $\xi = C^{ste}$. (b) Vue dans la direction $\xi + \eta = C^{ste}$. On y voit clairement que le jacobien est positif partout. On remarque aussi que les points de Bézier se rapprochent de plus en plus du jacobien et qu'une troisième décomposition permettrait de déterminer que l'élément est acceptable.

calcul des points de Bézier par chaque méthode. On remarque que l'opération la plus couteuse est le sampling du jacobien. Par ailleurs, la méthode 2 est en général plus rapide même si le calcul du jacobien par celle-ci prend parfois inexplicablement beaucoup de temps (triangle d'ordre 5 et triangle d'ordre 2). Notons que les résultats sont moyennés sur 10 tests et sont reproductibles.

Type	N	N_{el}	N_s	Méthode 1			Méthode 2		
				$t_s[\text{s}]$	$t_b[\text{s}]$	$t_T[\text{s}]$	$t_s[\text{s}]$	$t_b[\text{s}]$	$t_T[\text{s}]$
triangle	1	2.323.397	1	5,139	0,882	6,021	0,937	0,098	1,035
triangle	2	621.551	6	1,615	0,303	1,918	0,926	0,134	1,060
triangle	5	250.145	45	1,840	0,601	2,442	2,425	0,393	2,818
triangle	10	18.866	190	1,045	0,590	1,634	0,835	0,215	1,050
tétraèdre	1	1.582.664	1	9,023	0,591	9,614	1,876	0,078	1,953
tétraèdre	2	193.776	20	3,384	0,281	3,665	5,382	0,196	5,578
tétraèdre	4	11.208	220	2,043	0,432	2,475	1,777	0,164	1,946

TABLE 4.1 – Temps d’analyse du jacobien. N est l’ordre du maillage, N_{el} est le nombre d’élément du maillage et N_s est le nombre de points de sampling du jacobien pour le type d’élément donné. t_s , t_b et t_T sont respectivement le temps du sampling du jacobien, le temps de calcul des points de Bézier et le temps total.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Le méthode définie dans ce travail pour analyser le jacobien est simple et efficace. À partir des valeurs lagrangiennes du jacobien elle ne demande qu'un produit matrice-vecteur pour obtenir les points de contrôle. Avec la valeur de ces points de contrôle on peut alors accepter la grande majorité des bons éléments. On peut appliquer un algorithme récursif sur les éléments restant (n'ayant aucun des points lagrangiens négatifs mais ayant des points de Bézier négatifs). On obtient alors des points de contrôle plus proches de la valeur réel du jacobien ce qui permet de déterminer au final si l'élément est bon ou mauvais.

L'un des avantages de la méthode est qu'elle est hautement parallélisable. En effet, elle peut s'appliquer élément par élément ce qui permet de séparer facilement l'analyse. Un autre avantage est qu'elle peut utiliser les méthodes BLAS de niveau 3. Pour cela, il suffit de placer toute les valeurs du jacobien dans une matrice et d'y appliquer les matrice de l'analyse. Un troisième avantage est lié au fait que l'espace fonctionnel des éléments quadrangulaires et hexaédriques Serendipity est réduit par rapport aux éléments classiques (sans que l'ordre maximale ne soit différente). Il s'ensuit que le nombre de valeurs lagrangiennes nécessaires au calcul des points de contrôle est diminué.

Dans ce travail, nous avons seulement considéré les éléments les plus simples. Il serait intéressant de chercher s'il est possible de trouver des fonctions d'interpolation présentant les propriétés pertinentes des fonctions de Bézier. Elles ont donc pour contraintes qu'elles doivent être positives sur l'ensemble du domaine de référence (tout en vérifiant l'unité de leur somme).

Par ailleurs, il pourrait être avantageux de vérifier préalablement les éléments de dimension inférieure situés sur les frontières courbées. En effet,

en optimisant ces éléments (opération moins couteuse que l'optimisation sur les éléments du domaine), on pourrait réduire significativement les mauvais éléments. Le mapping de ces éléments étant un mapping 1D-2D ou 2D-3D, il serait nécessaire, pour obtenir un jacobien, de comparer la normale de l'élément avec celle de la géométrie (par un produit scalaire). La principale difficulté est que l'espace fonctionnel du jacobien n'est plus aussi facilement défini et pourrait même être infini.

Annexe A

Démonstrations

A.1 Expression du jacobien par Lagrange d'un mapping 1D

Soit le mapping (d'ordre N) suivant

$$x(\xi) = \sum_{i=0}^N x_i \mathcal{L}_i^N(\xi)$$

défini à la section 2.6.1 (p. 23). Son jacobien étant défini comme la dérivée de x par rapport à la variable de référence, on a

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \sum_{i=0}^N x_i \frac{d\mathcal{L}_i^N}{d\xi}$$

Le mapping étant polynomial, le jacobien reste une fonction polynomiale. Celle-ci est d'ordre $N - 1$ et le jacobien est exprimable à l'aide de l'interpolation de Lagrange du même ordre. Il se pose le choix des paramètres ξ'_k des fonctions de Lagrange d'ordre $N - 1$ ¹. On aurait tendance à prendre les valeurs situées sur les deux bornes du domaine Ω_ξ et les valeurs comprises à l'intérieur de telle manière que l'ensemble soit à intervalle régulier (éq. (2.2), p. 4), comme on l'a fait partout ailleurs. Mais pour des raisons qui deviendront évidentes par la suite, il est préférable de garder les paramètres du mapping. Puisque l'ordre est diminué de 1, les fonctions nécessitent un

1. Rappelons que les fonctions de Lagrange dépendent des ξ_k (éq. (2.1), p. 4). Il n'y a pas de raison à priori que ces paramètres soient les mêmes pour les fonctions d'ordre différent.

paramètre de moins et nous écarterons arbitrairement ξ_N .

Notons \mathcal{L}'^{N-1}_i les fonctions d'interpolation définies avec les paramètres ξ_i , $i < N$. La solution que nous recherchons peut être reformulée comme suit :

$$\begin{cases} J = \sum_{i=0}^{N-1} J_i \mathcal{L}'^{N-1}_i(\xi) \\ J_i = \sum_{j=0}^N x_j \frac{d\mathcal{L}^N_j}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_i} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Les fonctions \mathcal{L}'^{N-1}_i étant obtenues facilement à partir de leur définition (éq. (2.1), p. 4), il reste à déterminer l'expression des J_i . Pour cela, introduisons les fonctions $L_j^{(a,b)}$, (a et $b \in \mathbb{N}$, $j \notin \{a, \dots, b\}$) :

$$L_j^{(a,b)}(\xi) = \begin{cases} \frac{(\xi - \xi_a)(\xi - \xi_{a+1}) \dots (\xi - \xi_b)}{(\xi_j - \xi_a)(\xi_j - \xi_{a+1}) \dots (\xi_j - \xi_b)} & \text{si } a \leq b \\ 1 & \text{si } b > a \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Les propriétés de ces fonctions sont :

$$L_j^{(a,b)}(\xi_j) = 1 \quad \text{et} \quad L_j^{(a,b)}(\xi_i) = 0 \quad \text{si } i \in \{a, \dots, b\}$$

La figure A.1 illustre l'une de ces fonctions.

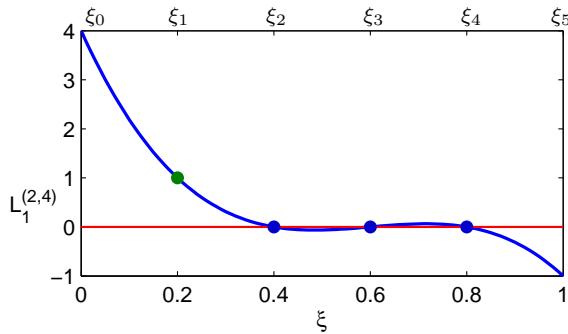


FIGURE A.1 – Graphique représentant la fonction $L_1^{(2,4)}$ avec pour paramètres ξ_i ceux de l'interpolation d'ordre 5.

Les fonctions de Lagrange peuvent se réécrire comme :

$$\mathcal{L}_j^N(\xi) = L_j^{(0,j-1)}(\xi) L_j^{(j+1,N)}(\xi)$$

Leur dérivée s'exprime alors par :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}_j^N}{d\xi} &= \frac{dL_j^{(0,j-1)}}{d\xi} L_j^{(j+1,N)} + L_j^{(0,j-1)} \frac{dL_j^{(j+1,N)}}{d\xi} \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \frac{L_j^{(0,k-1)} L_j^{(k+1,j-1)} L_j^{(j+1,N)}}{(\xi_j - \xi_k)} + \sum_{k=j+1}^N \frac{L_j^{(0,j-1)} L_j^{(j+1,k-1)} L_j^{(k+1,N)}}{(\xi_j - \xi_k)}\end{aligned}$$

Déterminons maintenant l'expression de $\left. \frac{d\mathcal{L}_j^N}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_i}$:

- Lorsque $j = i$, tous les numérateurs valent 1. On a donc

$$\left. \frac{d\mathcal{L}_i^N}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_i} = \sum_{k=0, k \neq i}^N \frac{1}{(\xi_i - \xi_k)}$$

- Lorsque $i \neq j$, tous les termes sont nuls sauf celui pour lequel $k = i$. Donc²,

$$\left. \frac{d\mathcal{L}_j^N}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_i} = \begin{cases} \frac{L_j^{(0,i-1)} L_j^{(i+1,j-1)} L_j^{(j+1,N)}}{(\xi_j - \xi_i)} & \text{si } i < j \\ \frac{L_j^{(0,j-1)} L_j^{(j+1,i-1)} L_j^{(i+1,N)}}{(\xi_j - \xi_i)} & \text{si } i > j \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Pour aller plus loin, il faut tenir compte du fait que les paramètres de référence sont espacés régulièrement :

$$\xi_k = \xi_0 + k\Delta\xi$$

Dans ce cas, on peut exprimer la valeur des fonctions $L_j^{(a,b)}$. On a notamment³

2. Notons que l'expression obtenue est relativement simple. Cela n'aurait pas été le cas si l'on n'avait pas pris les paramètres de l'interpolation de la courbe.

3. Notez que les expressions obtenues sont également valables lorsque i vaut 0, lorsque j vaut $i + 1$ ou lorsque j vaut N . En effet, dans ces cas respectifs, nous avons défini les fonctions $L_j^{(0,i-1)}$, $L_j^{(i+1,j-1)}$ et $L_j^{(j+1,N)}$ comme étant égales à 1 partout. Nous devons donc obtenir 1 dans ces expressions, ce qui est bien le cas.

(pour $i < j$) :

$$\begin{aligned} L_j^{(0,i-1)}(\xi_i) &= i! \Delta\xi^i \frac{(j-i)!}{j! \Delta\xi^i} = \frac{i! (j-i)!}{j!} \\ L_j^{(i+1,j-1)}(\xi_i) &= (-1)^{j-i-1} \frac{(j-1-i)! \Delta\xi^{(j-1-i)}}{(j-i-1)! \Delta\xi^{(j-i-1)}} = -(-1)^{j-i} \\ L_j^{(j+1,N)}(\xi_i) &= \frac{\Delta\xi^{N-j} (N-i)!}{(j-i)!} \frac{1}{\Delta\xi^{N-j} (N-j)!} = \frac{(N-i)!}{(j-i)! (N-j)!} \end{aligned}$$

Le reste ne présentant pas de difficulté supplémentaire, on obtient que

$$\left. \frac{d\mathcal{L}_j^N}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_i} = \frac{1}{\Delta\xi} \frac{-\beta_{ij}}{(j-i)} \quad (\forall j \in \{0, \dots, N\} \setminus i)$$

où

$$\beta_{ij} = (-1)^{j-i} \frac{i!(N-i)!}{j!(N-j)!}$$

On peut maintenant exprimer la valeur des J_i de l'expression (A.1) :

$$\begin{aligned} J_i &= \sum_{j=0}^N x_j \left. \frac{d\mathcal{L}_j^N}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_i} \\ &= \frac{x_i}{\Delta\xi} \sum_{k=0, k \neq i}^N \frac{1}{(i-k)} + \sum_{j=0, j \neq i}^N \frac{x_j}{\Delta\xi} \frac{\beta_{ij}}{(i-j)} \\ &= \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{j=0, j \neq i}^N \frac{x_i + \beta_{ij} x_j}{(i-j)} \end{aligned}$$

A.2 Obtention des fonctions de Bézier

Il existe une manière simple de montrer comment obtenir les fonctions de Bézier quelle que soit la forme de l'interpolation. Elle est un peu semblable au principe expliqué pour l'interpolation de Lagrange d'une surface triangulaire (section 2.2.2). En effet, toute fonction de Bézier d'ordre N peut être vue comme la multiplication de N fonctions linéaires. Ces fonctions linéaires

ne sont rien d'autre que les fonctions Bézier d'ordre 1. En prenant toutes les combinaisons de multiplication de N fonctions linéaires (avec répétition), on peut identifier toutes les fonctions d'ordre N .

Pour connaitre le coefficient se trouvant devant les fonctions, il suffit de considérer ce qui suit. Quel que soit l'ordre, la somme des fonctions d'une interpolation doit valoir 1 sur tout le domaine de définition. Si l'on note f_1, f_2, f_3, \dots les fonctions linéaires de Bézier, on a donc

$$(f_1 + f_2 + f_3 + \dots)(\xi) = 1$$

Si l'on met cette expression à l'exposant N , on obtient une combinaison linéaire des fonctions citées plus haut dont le résultat est 1. Cela implique que les fonctions obtenues prises avec leur facteur sont les fonctions de Bézier recherchées.

Appliqué au triangle, nous identifions les fonctions linéaires :

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &= \xi \\ f_2(\xi, \eta) &= \eta \\ f_3(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta) \end{aligned}$$

Sachant que l'on a la relation

$$\begin{aligned} (a + (b + c))^N &= \sum_{i=0}^N C_N^i a^i (b + c)^{N-i} \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} C_i^N a^i C_j^{N-i} b^j c^{N-i-j} \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} C_i^N C_j^{N-i} \xi^i \eta^j (1 - \xi - \eta)^{N-i-j} = 1$$

ce qui implique que les fonctions de Bézier sont

$$\mathcal{B}\mathcal{T}_{i,j}^N(\xi, \eta) = C_i^N C_j^{N-i} \xi^i \eta^j (1 - \xi - \eta)^{N-i-j}$$

A.3 Augmentation de l'ordre d'interpolation d'une courbe de Bézier

Il est possible d'exprimer une courbe polynomiale d'ordre N grâce à une interpolation d'ordre plus élevé. L'information obtenue est la valeur des nouveaux points b_i^{new} . Rangé dans un vecteur \mathbf{b}^{new} , ceux-ci sont calculés à partir des points initiaux (c'est-à-dire \mathbf{b})

$$\mathbf{b}^{\text{new}} = \mathbf{U} \mathbf{b}$$

Nous allons décrire comment remplir la matrice \mathbf{U} .

Soit l'interpolation initiale

$$x(\xi) = \sum_{i=0}^N b_i \mathcal{B}_i^N(\xi)$$

et l'interpolation dont l'ordre est augmenté de M :

$$x'(\xi) = \sum_{i=0}^N b_i^{\text{new}} \mathcal{B}_i^{N+M}(\xi)$$

Pour que ces interpolations expriment la même courbe, il faut que l'on ait l'égalité entre les deux expressions, c'est-à-dire que

$$\sum_{i=0}^N b_i \mathcal{B}_i^N(\xi) = \sum_{i=0}^N b_i^{\text{new}} \mathcal{B}_i^{N+M}(\xi)$$

Notant $\mathbf{B}_{(\xi)}^N$ le vecteur contenant la valeur des fonctions \mathcal{B}_i^N au point ξ , c'est-à-dire

$$\mathbf{B}_{(\xi)}^N = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0^N(\xi) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_N^N(\xi) \end{pmatrix}$$

on écrit en notation vectorielle

$$(\mathbf{B}_{(\xi)}^N)^T \mathbf{b} = (\mathbf{B}_{(\xi)}^{N+M})^T \mathbf{b}^{\text{new}} \quad (\text{A.4})$$

Montrons que les vecteurs des fonctions de Bézier sont liés par une relation matricielle :

$$\mathbf{B}_{(\xi)}^N = \mathbf{M} \mathbf{B}_{(\xi)}^{N+M}$$

Puisque la somme de l'ensemble des fonctions de Bézier d'un même ordre est égale à 1, on a

$$\mathcal{B}_i^N(\xi) = \left[\sum_{j=0}^M \mathcal{B}_j^M(\xi) \right] \mathcal{B}_i^N(\xi)$$

Or, vu que les fonctions de Bézier ont pour expression

$$\mathcal{B}_k^N(\xi) = C_N^k (1 - \xi)^{N-k} \xi^k$$

on a,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_j^M(\xi) \mathcal{B}_i^N(\xi) &= C_M^j C_N^i \xi^{i+j} (1 - \xi)^{N+M-i-j} \\ &= C_M^j C_N^i \frac{\mathcal{B}_{i+j}^{N+M}(\xi)}{C_{N+M}^{i+j}} \end{aligned}$$

Cela qui implique que

$$\mathcal{B}_i^N(\xi) = \sum_{j=0}^M \frac{C_M^j C_N^i}{C_{N+M}^{i+j}} \mathcal{B}_{i+j}^{N+M}(\xi)$$

La composante m_{kl} de la matrice \mathbf{M} vaut ($k \equiv i$ et $l \equiv i + j$)

$$m_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } l < k \\ \frac{C_M^{l-k} C_N^k}{C_{N+M}^l} & \text{si } k \leq l \leq k + M \\ 0 & \text{si } k + M < l \end{cases}$$

Remplaçant dans l'expression (A.4), on obtient

$$\mathbf{M}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^{\text{new}}$$

ce qui implique que \mathbf{U} vaut la transposée de la matrice \mathbf{M} . \mathbf{U} est donc une matrice $(N + M + 1) \times (N + 1)$, qui a la forme

$$\begin{pmatrix} * & & & 0 \\ \vdots & * & & \\ * & \vdots & \ddots & \\ & * & & * \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & * \end{pmatrix}$$

et dont la composante u_{ij} vaut

$$u_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{C_M^{i-j} C_N^j}{C_{N+M}^i} & \text{si } i - M \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } j + M < i \end{cases}$$

A.4 Matrice de décomposition d'une courbe bézierne

Soit les fonctions de Bézier d'une courbe d'ordre N :

$$\mathcal{B}_k^N(\xi) = C_N^k (1 - \xi)^{N-k} \xi^k, \quad \xi \in \Omega_\xi = [0, 1] \quad (\text{A.5})$$

et l'interpolation

$$x(\xi) = \sum_{i=0}^N b_i \mathcal{B}_i^N(\xi)$$

La courbe peut être exprimée en deux parties grâce à deux interpolations du même ordre. Pour cela, découpons en deux le domaine Ω_ξ de l'interpolation initiale. Soit Ω_ξ^1 et Ω_ξ^2 ces domaines⁴. L'interpolation de chaque partie ν s'écrit

$$x^\nu(\xi) = \sum_{i=0}^N b_i^\nu \mathcal{B}_i^N(\xi'), \quad \xi' \in \Omega_\xi$$

4. Il n'est pas obligatoire que Ω_ξ^1 et Ω_ξ^2 recouvrent tout le domaine Ω_ξ . Il n'est pas interdit non plus qu'ils aient une intersection non vide. Seulement, étant donné que l'on veut garder toute l'information de la courbe et éviter les redondances, on s'arrangera pour que $\Omega_\xi^1 \cup \Omega_\xi^2 = \Omega_\xi$ et que $\Omega_\xi^1 \cap \Omega_\xi^2 = \emptyset$.

Les informations que l'on retire sont donc les points b_i^1 et b_i^2 . Rangés dans le vecteur \mathbf{b}^{new} , on a

$$\mathbf{b}^{\text{new}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{V} \mathbf{b}$$

Nous allons donc décrire comment obtenir la matrice \mathbf{V} .

Première sous-courbe

Puisque x^1 décrit une partie de la courbe, on a

$$x^1(a\xi + b) = x(\xi), \quad \xi \in \Omega_\xi^1$$

où a et b sont des paramètres qui dépendent de Ω_ξ^1 .

Si $\Omega_\xi^1 = [0, 0.5]$, alors $a = 2$ et $b = 0$. Il vient alors

$$\sum_{i=0}^N b_i^1 \mathcal{B}_i^N(2\xi) = \sum_{i=0}^N b_i \mathcal{B}_i^N(\xi) \quad (\text{A.6})$$

Notons $\mathbf{B}_{(2\xi)}^N$ le vecteur contenant la valeur des fonctions \mathcal{B}_i^N au point ξ :

$$\mathbf{B}_{(2\xi)}^N = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0^N(\xi) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_N^N(\xi) \end{pmatrix}$$

La relation (A.6) peut alors s'écrire sous forme vectorielle :

$$(\mathbf{B}_{(2\xi)}^N)^T \mathbf{b}^1 = (\mathbf{B}_{(\xi)}^N)^T \mathbf{b} \quad (\text{A.7})$$

Montrons que les vecteurs des fonctions de Bézier sont liés par une relation matricielle :

$$\mathbf{B}_{(\xi)}^N = \mathbf{M}^1 \mathbf{B}_{(2\xi)}^N \quad (\text{A.8})$$

On a la relation

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k b^k a^{n-k}$$

ce qui implique que (pour $a = 1$ et $b = -\xi$)

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_i^N(\xi) &= C_N^i (1 - \xi)^{N-i} \xi^i \\ &= C_N^i \xi^i \sum_{k=0}^{N-i} C_{N-i}^k (-1)^k \xi^k \\ &= \sum_{k=i}^N C_N^{i,k-i} (-1)^{k-i} \xi^k\end{aligned}$$

où $C_N^{k,l}$ vaut $C_N^k C_{N-k}^l$ ⁵.

En notant m_{ij}^1 les composantes de la matrice \mathbf{M}^1 , la relation (A.8) donne :

$$\sum_{k=i}^N C_N^{i,k-i} (-1)^{k-i} \xi^k = \sum_{j=0}^N m_{ij}^1 \sum_{k=j}^N C_N^{j,k-j} (-1)^{k-j} 2^k \xi^k$$

Notant que la double somme peut s'écrire :

$$\sum_{j=0}^N \sum_{k=j}^N (\dots) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k (\dots)$$

on obtient

$$\sum_{k=i}^N C_N^{i,k-i} (-1)^{k-i} \xi^k = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k m_{ij}^1 C_N^{j,k-j} (-1)^{k-j} 2^k \xi^k$$

Il reste à déterminer les valeurs m_{ij}^1 par identification des coefficients des monômes ξ^k . Pour un i donné, les coefficients donnent

- lorsque $k < i$:

$$0 = \sum_{j=0}^k m_{ij}^1 C_N^{j,k-j} (-1)^{k-j} 2^k, \quad \forall k < i$$

ce qui implique que

$$m_{ij}^1 = 0, \quad j < i$$

5. Notons que $C_N^{k,l} = C_N^{l,k}$. Ce nombre a une signification mathématique. C'est le nombre de combinaison que l'on peut faire en prenant dans une urne de N boules d'abord k éléments que l'on place dans un premier sac puis l boules que l'on place dans un deuxième sac.

- lorsque $k \geq i$:

$$C_N^{i,k-i} (-1)^{k-i} = \sum_{j=i}^k m_{ij}^1 C_N^{j,k-j} (-1)^{k-j} 2^k, \quad \forall k \geq i$$

ou encore⁶

$$1 = \sum_{j=i}^k m_{ij}^1 C_k^j (C_k^i)^{-1} (-1)^{i-j} 2^k \quad (k \geq i)$$

Lorsque $k \geq i$, on a $N - i + 1$ équations à $N - i + 1$ inconnues, la solution est donc unique. Montrons qu'elle vaut

$$m_{ij}^1 = \frac{C_j^i}{2^j}, \quad j \leq i$$

En remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=i}^k C_{k-i}^{k-j} (-1)^{i-j} 2^{k-j} \quad (k \geq i) \\ \Leftrightarrow 1 &= \sum_{j=0}^{k-i} C_{k-i}^j (-1)^j 2^{k-i-j} \quad (k \geq i) \end{aligned}$$

ou encore

$$1 = \sum_{j=0}^n C_n^j (-1)^j 2^{n-j} \quad (n \geq 0) \tag{A.9}$$

Si l'on accepte que $C_n^{-1} = C_n^{n+1} = 0$, le nombre binomial peut se décomposer :

$$C_n^j = C_{n-1}^j + C_{n-1}^{j-1}$$

6. En notant que $C_N^{j,k-j} = C_N^{N-k,j}$.

La relation (A.9) devient alors :

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j 2^{n-j} C_{n-1}^j + \sum_{j=1}^n (-1)^j 2^{n-j} C_{n-1}^{j-1} \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j 2^{n-j} C_{n-1}^j + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} 2^{n-1-j} C_{n-1}^j \\
 &= (2-1) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j 2^{n-j} C_{n-1}^j \quad (n \geq 0)
 \end{aligned}$$

et on retrouve la relation (A.9) pour laquelle n est devenu $n - 1$. La relation est donc exacte par récursion si elle est exacte pour $n = 0$. C'est le cas puisque l'on a bien $C_0^0 = 1$.

Au final, la composante m_{kl}^1 de la matrice \mathbf{M}^1 vaut donc

$$m_{kl}^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } l < k \\ \frac{C_l^k}{2^l} & \text{si } k \leq l \end{cases}$$

On remarque que les valeurs de la matrice ne dépendent pas de l'ordre. Seule la taille de la matrice en dépend.

En remplaçant dans l'équation (A.8), on obtient

$$(\mathbf{M}^1)^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^1$$

Deuxième sous-courbe

Par les mêmes calculs, on peut déterminer \mathbf{M}^2 . Notons que celle-ci est similaire à \mathbf{M}^1 lorsque les sous-domaines Ω_ξ^1 et Ω_ξ^2 définissent entièrement Ω_ξ sans se superposer. On peut comprendre cela par le fait que l'interpolation de Bézier est symétrique. Si l'on inverse la numérotation des points de contrôle, on obtient la même courbe. Cela implique que \mathbf{b}^2 dépend de la même manière des points $b_i^{\text{inv.}}$ inversés que \mathbf{b}^1 dépend des b_i .

Les deux sous-courbes ensemble

Au final, on a

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{M}^1)^T \\ (\mathbf{M}^2)^T \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{pmatrix}$$

ce qui implique que

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} (\mathbf{M}^1)^T \\ (\mathbf{M}^2)^T \end{pmatrix}$$

\mathbf{V} est une matrice $(2N + 1) \times (2N + 1)$ dont la composante v_{ij} vaut

$$v_{ij} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{C_i^j}{2^i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } i < j \end{array} \right\} & \text{si } i \leq N \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } j < i - N \\ \frac{C_{2N-i}^{N-j}}{2^{2N-i}} & \text{si } i - N \leq j \end{array} \right\} & \text{si } N < i \end{cases}$$

La matrice prend alors la forme

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \ddots & & \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 1/4 & 1/2 & 1/4 & \\ & \ddots & 0 & 1/2 & 1/2 & \\ \dots & 0 & 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$

A.5 Fonctions f_{ijkl}

Il a été établi à la section 2.8 que le jacobien d'un quadrangle d'ordre N en formulation de Bézier prenait la forme

$$J = N^2 \sum_{i,l=0}^{N-1} \sum_{j,k=0}^N \mathcal{B}_i^{N-1}(\xi) \mathcal{B}_j^N(\eta) \mathcal{B}_k^N(\xi) \mathcal{B}_l^{N-1}(\eta) f_{ijkl}$$

où les fonctions f_{ijkl} sont :

$$f_{ijkl} = (x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{k,l+1} - y_{k,l}) - (y_{i+1,j} - y_{i,j})(x_{k,l+1} - x_{k,l})$$

Montrons que ces fonctions ont un sens géométrique.

Soit trois points A , B et C dont les coordonnées sont

$$A = (x_A, y_A), \quad B = (x_B, y_B) \quad \text{et} \quad C = (x_C, y_C)$$

On sait que l'aire contenue sous le triangle ABC vaut la moitié du produit vectoriel du vecteur liant A à B par le vecteur liant A à C . On a donc,

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

avec θ valant

$$\theta = (x_A y_B - x_B y_A) + (x_B y_C - x_C y_B) + (x_C y_A - x_A y_C)$$

Notant Q_B^A la soustraction $(x_A y_B - x_B y_A)$, on obtient donc que l'aire du triangle ABC vaut

$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}(Q_B^A + Q_C^B + Q_A^C)$$

Remarquons que $Q_B^A = -Q_A^B$.

Réarrangeons maintenant f_{ijkl} :

$$\begin{aligned} f_{ijkl} &= x_{i+1,j} y_{k,l+1} - y_{i+1,j} x_{k,l+1} \\ &\quad + x_{i,j} y_{k,l} - y_{i,j} x_{k,l} \\ &\quad + x_{k,l+1} y_{i,j} - y_{k,l+1} x_{i,j} \\ &\quad + x_{k,l} y_{i+1,j} - y_{k,l} x_{i+1,j} \end{aligned}$$

ce qui devient

$$\begin{aligned} f_{ijkl} &= Q_{P_{k,l+1}}^{P_{i+1,j}} + Q_{P_{k,l}}^{P_{i,j}} + Q_{P_{i,j}}^{P_{k,l+1}} + Q_{P_{i+1,j}}^{P_{k,l}} \\ &= (Q_{P_{i+1,j}}^{P_{i,j}} + Q_{P_{k,l+1}}^{P_{i+1,j}} + Q_{P_{i,j}}^{P_{k,l+1}}) - (Q_{P_{i+1,j}}^{P_{i,j}} + Q_{P_{k,l}}^{P_{i+1,j}} + Q_{P_{i,j}}^{P_{k,l}}) \end{aligned}$$

Au final, on trouve que

$$f_{ijkl} = 2 \left[\text{aire}(P_{i,j} P_{i+1,j} P_{k,l+1}) - \text{aire}(P_{i,j} P_{i+1,j} P_{k,l}) \right]$$

Bibliographie

- [1] T. J. R. Hughes. *Consider a Spherical Cow – Conservation of Geometry in Analysis : Implications for Computational Methods in Engineering.* University of Texas, June 14, 2004.
- [2] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. *Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 79, Issue 11, pages 1309-1331, 2009.
- [3] Joe F. Thompson, B. K. Soni, and N. P. Weatherill. *Handbook of grid generation.* CRC Press, 1999.
- [4] J. N. Reddy. *Introduction to the Finite Element Method.* McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1993.
- [5] Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. *Gmsh Reference Manual.* <http://geuz.org/gmsh/doc/texinfo/gmsh.pdf>, 2009.