UNE POLEMIQUE ENTRE GOLDBACH ET DANIEL BERNOULLI

PAR EUGÈNE CATALAN

Extrait d'une lettre adressée par M. EUGÈNE-CHARLES CATALAN à B. BONCOMPAGNI en date de « Liége, 29 novembre 1884 ».

« Dans le dessein d'avoir l'énoncé *exact* de ce théorème de Goldbach (ou de Waring) : *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers*, j'ai emprunté, à l'Académie de Belgique, la *Correspondance Mathématique et Physique*, etc., publiée par P.-H. Fuss. Je n'ai pas trouvé, dans cet intéressant ouvrage, le théorème de Goldbach ; mais, *par compensation*, j'y ai rencontré des choses curieuses. Il est résulté, de cette lecture, la petite Note cijointe. Je vous prie de vouloir bien l'agréer pour le *Bullettino*, si vous supposez qu'elle soit de nature à intéresser vos lecteurs. Dans le cas contraire, soyez assez bon pour me la renvoyer, à l'occasion. »

« La *Correspondance mathématique et physique*, publiée par P. H. *Fuss* (*), renferme des choses intéressantes, et parfois bien étranges. Par exemple, la discussion entre D. Bernoulli et Goldbach, à propos d'un théorème de ce fécond Géomètre. Voici les parties essentielles de cette vive polémique.

Lettre de Goldbach à Daniel Bernoulli, (31 janvier 1729). (**)

. . . .

« *P. S.* Si dans la suite A . . . $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., dont le
» terme général est $\frac{1}{x^2+2x+1}$, on efface tous les termes
» dont les dénominateurs ont, outre la racine quarrée,
» une ou plusieurs autres racines du 3me, 4me, etc.
» degrés et que l'on ôte une unité à chaque dénomi-
» nateur des termes qui restent, pour faire

$$» \; B \;\ldots\; \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+0+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+0+0+\frac{1}{99}+\text{etc.}$$

» la somme de tous les termes B sera $=$ à la somme
» de tous les termes A. »

Réponse de Bernoulli, (30 janvier 1728) (***):

(*) Saint-Pétersbourg, 1843 ; 2 volumes, in-8.°

(**) CORRESPONDANCE || MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE || DE QUELQUES CÉLÈBRES GÉOMÈTRES || DU XVIIIème SIÈCLE || PRÉCÉDÉE || D'UNE NOTICE SUR LES TRAVAUX DE LÉONARD EULER, || TANT IMPRIMÉS QU'INÉDITS || ET PUBLIÉE || SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES || DE SAINT-PÉTERSBOURG || PAR || P.-H. FUSS, || Conseiller d'état actuel de S. M. l'Empereur de toutes les Russies, membre || et secrétaire perpétuel de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, || docteur en philos., membre de plusieurs académies et sociétés savantes russes || et étrangères, Chevalier des ordres impériaux et royaux de || St.-Stanislas, de St.-Vladimir et de Ste Anne. || TOME II. || *Avec le portrait de* Daniel Bernoulli, *gravé sur acier*, 4 *planches* || *de figures et* 5 *fac similés* || ST-PETERSBOURG, || 1843. Tome II, page 283, lig. 20—28.

(***) CORRESPONDANCE || MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE || DE QUELQUES CÉLÈBRES GÉOMÈTRES || DU XVIIIeme SIÈCLE, etc. TOME II, etc., pages 248, 249. Ainsi, la réponse aurait été écrite *un an* avant la missive! De plus, dans la *Correspondance*, elle *précède* celle-ci d'environ quarante pages! Comment le savant Editeur n'a-t-il point aperçu cette double inversion ?

« *P. S.* Après avoir fini cette lettre, j'examinois votre théo-
» rème, et j'ai trouvé que vous vous êtes précipité en
» deux endroits, car je crois avoir deviné votre rai-
» sonnement. Vous dites, M., que

» $A \ldots \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc. est égal à

» $B \ldots \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+0+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+0+0+\frac{1}{99}+$ etc.

» Pour en faire voir le contraire, prenons la suite B
» toute complète, en faisant cette autre

» $C \ldots \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+$ etc.;

» il faudrait maintenant que $C - A$ fût $= C - B$; or
» le terme général pour $C - A$ est $\frac{1}{(xx+2x)(xx+2x+1)}$
» Voyons ce que c'est que $C - B$. Or on voit que
» $C - B$ est $=$ à la somme de toutes ces suites

» $D \ldots \frac{1}{\square\, 2.2-1}+\frac{1}{\square\, 2.2.2-1}+\frac{1}{\square\, 2.2.2.2-1}+$ etc. (*)

» $E \ldots \frac{1}{\square\, 3.3-1}+\frac{1}{\square\, 3.3.3-1}+\frac{1}{\square\, 3.3.3.3-1}+$ etc.

» . . . .

» $G \ldots \frac{1}{\square\, 5.5-1}+\frac{1}{\square\, 5.5.5-1}+\frac{1}{\square\, 5.5.5.5-1}+$ etc.

» au lieu de ces suites, vous aurez pris ces autres, en
» omettant toujours l'unité dans les dénominateurs:

» $d \ldots \frac{1}{\square\, 2.2}+\frac{1}{\square\, 2.2.2}+\frac{1}{\square\, 2.2.2.2}+$ etc. $=\frac{1}{3.4}$

» $e \ldots \frac{1}{\square\, 3.3}+\frac{1}{\square\, 3.3.3}+\frac{1}{\square\, 3.3.3.3}+$ etc. $=\frac{1}{8.9}$

» $f \ldots \frac{1}{\square\, 4.4}+\frac{1}{\square\, 4.4.4}+\frac{1}{\square\, 4.4.4.4}+$ etc. $=\frac{1}{15.16}$

» $g \ldots \frac{1}{\square\, 5.5}+\frac{1}{\square\, 5.5.5}+\frac{1}{\square\, 5.5.5.5}+$ etc. $=\frac{1}{24.25}$

» et en ce cas on auroit $C - A = C - B$ ou $A = B$; mais se-
» lon la construction de votre suite B, on doit omettre les
» suites telles que f, étant déjà comprises sous des précédentes
» telles que d.

» Mais je suis sûr que vous vous serez aperçu avant moi
» du défaut de ce raisonnement, si vous y avez songé depuis,
» et que vous me l'avez marqué fort à la hâte, puisque ce
» n'était qu'en forme de *postscriptum*. »

Arrêtons-nous, un instant, sur cette singulière réfutation. En premier lieu, d'après Bernoulli lui-même,

$$C - B = \frac{1}{15}+\frac{1}{63}+\frac{1}{255}+\ldots$$
$$+\frac{1}{80}+\frac{1}{728}+\frac{1}{6\,560}+\ldots$$
$$+\frac{1}{624}+\frac{1}{15\,624}+\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$C - A = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{16}+\frac{1}{24}-\frac{1}{25}+\ldots$$

(*) Les notations $\square\, 2.\,2$, $\square\, 2.\,2.\,2, \ldots$ employées par Bernoulli, représentent $(2^2)^2$, $(2^3)^2, \ldots$

Or, on ne voit pas pourquoi ces deux quantités seraient inégales (*).

Réplique de Goldbach (26 mai 1729) (**) :

« Après ma petite dissertation ***De terminis serierum***, j'ai dessein » d'écrire une autre ***De summis***, où je rapporterai quelques ob- » servations que j'ai faites sur cette matière et parmi lesquelles » se trouvera aussi le théorème dont je vous ai parlé dans » mes lettres précédentes. Le voici en attendant tel que je » l'ai écrit dans mon livre :

» Summa seriei A . . . $\frac{1}{(x+1)^m}$ aequalis est summae » seriei B . . . $\frac{1}{(x+1)^m-1}$, si in hac ommittantur omnes » termini, in quibus $x+1$ habet radicem rationalem cu- » juscunque potestatis, et m utrobique sit numerus po- » sitivus. Posito v. gr. $m=1$, erit series

» A . . . $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+$ etc. (***)

» $=B$ . . . $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+0+0+$ etc.

» posito $m=2$, erit series

» A . . . $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+$ etc.

» B . . . $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+0+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+0+0+$ etc.

» ***Demonstratio***. Si ex serie A . . . $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+$ etc.

. . . .

» Le second exemple est, comme vous voyez, la série de » mon ***potscriptum***. La somme de cette autre série

» C . . . $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+$ etc.

» (dont j'ai parlé dans ma dernière lettre) suit fort naturelle- » ment du premier exemple, car si on ajoute la suite B à la » suite C, on aura visiblement $B+C=A+1$. Or $B=A$, » donc $C=1$. »

L'égalité $B+C=A+1$ est-elle *visible*? Je ne le pense pas. Dans les *Commentaires de Pétersbourg* (1737), Euler a essayé une démonstration de l'égalité $C=1$. Mais cette démonstration est inadmissible. C'est pourquoi j'en ai donné une autre (****).

Voici encore un curieux P. S. d'une lettre de D. Bernoulli, du 28 mai 1728 (*****)

« Avez vous remarqué cette propriété
» numeri naturales: 1 2 3 4 5 etc.
» eorum cubi: 1 8 27 64 125 etc.
» erit summa cuborum semper = quadrato summae numero- » rum, id est, v. gr. $1+8+27+$ etc. $=(1+2+3+$ etc.$)^2$; » c'est une observation d'Adadouroff. »

Les lecteurs du *Bullettino* savent que ce théorème:

(*) Il y a plus : elles sont égales, parce que *le théorème de Goldbach est vrai*. D'un autre côté, en écrivant : « au lieu de ces suites, vous *aurez pris ces autres* », Bernoulli affirme une chose qu'il ignore : il fait, à Goldbach, un véritable *procès de tendance*.

(**) CORRESPONDANCE || MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE || DE QUELQUES CÉLÈBRES GÉOMÈTRES || DU XVIIIème SIÈCLE, etc. TOME II, etc., pages 305, 306.

(***) Comme la plupart de ses contemporains, Goldbach *s'inquiète peu* de la convergence des séries.

(****) JOURNAL || DE || MATHÉMATIQUES || PURES ET APPLIQUÉES, etc. Publié || PAR JOSEPH LIOUVILLE, etc. TOME VII — ANNÉE 1842. || PARIS, etc. 1842.

(*****) CORRESPONDANCE || MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE || DE QUELQUES CÉLÈBRES GÉOMÈTRES || DU XVIIIème SIÈCLE, etc., TOME II, etc., page 261, lig. 24—29.

la somme des cubes des n *premiers nombres naturels égale le carré de la somme de ces nombres*

remonte, au moins, à *Brahmegupta* (*).

Qui était donc cet *Adadouroff*?

Extrait d'une lettre adressée au Prince Boncompagni par Eugène Catalan (10 décembre 1884).

« Depuis trois mois, je demande, à tous mes correspondants : « *où Goldbach a-t-il énoncé son théorème* ? » Je suis donc hors d'état de répondre, d'une manière satisfaisante, à la question que vous me faites l'honneur de m'adresser. Voici tout ce que je puis vous dire : 1.° Dans le tome XIV des *Nouvelles Annales*, Terquem donne cet énoncé : « *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers* (Goldbach). » 2.° Dans le tome XVIII (*Bulletin de Bibliographie*, etc. p. 2.) le savant Rédacteur publiait une Note ainsi conçue :

Théorème de Waring sur les nombres premiers.

« On lit dans la 3.^e édition (1782) des *Meditationes analyticæ*, au haut » de la page 379. »

. . . .

Ainsi ce théorème, ... *appartient à Waring et non à Goldbach* ; je l' ai dit par erreur . . . . . d' après la *Correspondance mathématique et physique* (Fuss)..

Ici (comme je l'écrivais naguère à M. Desboves) je crois que Terquem, malgré toute son érudition, s'est trompé.

La première édition des *Méditationes* a été publiée en 1776. A cette époque, Goldbach, né en 1690, était mort depuis douze ans.

L'allusion à la *Correspondance Mathématique et physique* est fort embarrassante. J'ai feuilleté cet ouvrage, et je n'ai pu y trouver l'énoncé du *théorème de Goldbach* ; ce qui ne veut pas dire qu' il n'y soit pas. 3.° Dans le même tome XIV des N. A. (p. 293) M. Desboves commence ainsi une *Note sur le théorème de G.* :

« *Tout nombre pair, excepté* 2, *est la somme de deux nombres premiers,* » *au moins de deux manières.* »

J'ai écrit trois fois, à mon ancien Collègue, afin de savoir si cet énoncé est celui de Goldbach: impossible d'obtenir une réponse satisfaisante ! Voilà, cher Prince, l'état de la question. »

P. S. (17 mars 1885). A ma prière, M. Bouniakowsky, le savant et vénérable Vice-Président de l' Académie de Saint-Pétersbourg, s' est livré à d'actives recherches sur le même sujet. Elles n'ont pas abouti. Voilà donc, semble-t-il, un nouveau *problème historique* à résoudre.

(*) Édouard Lucas. — *Sur un théorème de l'Arithmétique indienne.—Bullettino,* tome IX, p. 157.