

SÉANCE DU 18 MAI 1892.

PRÉSIDENCE DE M. DE PRESLE.

Communications :

M. Demoulin : *Détermination explicite des courbes dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral.*

M. Raffy : *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces.*

M. Lery : *Sur un problème d'Analyse indéterminée.*

M. Félix Lucas revient sur un théorème relatif aux *intersections de trois quadriques*, qu'il a fait connaître à la séance du 18 juin 1890, et qui a été publié au t. XIX du *Bulletin* (p. 118). Il fait observer que cette proposition rentre dans une série de théorèmes que M. Picquet a démontrés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, en 1865 (2^e série, t. IV, p. 71 et suiv.).

M. Schlegel adresse un Mémoire intitulé : *Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions.*

M. CATALAN adresse la Note suivante :

Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique.

[Addition (1)].

VI. — *Autres séries elliptiques.*

13. Soit encore la formule de Cauchy

$$(1) \quad (1+x)(1+tx) \dots (1+t^{n-1}x) = 1 + T_{n,1}x + \dots + T_{n,p}x^p + \dots + T_{n,n}x^n,$$

dans laquelle

$$T_{n,p} = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^p)} t^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Si l'on divise les deux membres par $1+x$, on a

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+tx)(1+tx^2) \dots (1+t^{n-1}x) \\ = 1 + T_{n,1} \left| \begin{array}{l} x + T_{n,2} \\ - T_{n,1} \\ + 1 \end{array} \right| x^2 + \dots + T_{n,n} x^{n-1}; \end{array} \right.$$

(1) Voir le *Bulletin*, t. XIX, p. 124 et 145.

14. *Remarque.* — L'égalité (24) est la même chose que

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\dots \\ = 1 + \frac{q}{1-q}x + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}x^2 + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3 + \dots \end{array} \right.$$

Au lieu de celle-ci, Jacobi a trouvé ⁽¹⁾

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+qx)(1+q^3x)(1+q^5x)\dots \\ = 1 + \frac{q}{1-q^2}x + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}x^2 + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}x^3 + \dots \end{array} \right.$$

Donc, en faisant $x = \pm 1$:

$$(31) \quad \beta = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots,$$

$$(32) \quad \alpha = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

Ces deux formules ont été données précédemment ⁽²⁾. En outre, la première est déjà ancienne ⁽³⁾.

VII. — *Autres théorèmes d'Arithmétique.*

15. Dans l'égalité (26) :

la fraction

$$\frac{q}{1-q} = q \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 1) q^n;$$

la fraction

$$\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} = q^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 2) q^n;$$

la fraction

$$\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} = q^6 \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 3) q^n;$$

etc. ⁽⁴⁾.

Si le second membre est développé sous la forme

$$1 + A_1 q + A_2 q^2 + A_3 q^3 + A_4 q^4 + \dots,$$

⁽¹⁾ *Fundamenta*, p. 180.

⁽²⁾ *Bulletin*, t. XIX, p. 148, 149.

⁽³⁾ *Recherches...*, p. 52.

⁽⁴⁾ *Recherches...*, p. 47. $F(n, p)$ représente le nombre de décompositions de n , en parties, égales ou inégales, non supérieures à p . On suppose $F(0, p) = 1$.

il doit être identique avec

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \dots$$

Conséquemment ⁽¹⁾ :

$$A_1 = -F(0, 1) = -1,$$

$$A_2 = -F(1, 1) = -1,$$

$$A_3 = -F(2, 1) + F(0, 2) = -1 + 1 = 0,$$

$$A_4 = -F(3, 1) + F(1, 2) = -1 + 1 = 0,$$

$$A_5 = -F(4, 1) + F(2, 2) = -1 + 2 = +1,$$

etc. ; puis ce théorème :

La quantité

$$-F(n-1, 1) + F(n-3, 2) - F(n-6, 3) + F(n-10, 4) - \dots$$

nulle si n n'est pas pentagonal, égale ± 1 dans les autres cas.

16. L'égalité (25) conduit à un théorème qui a de l'analogie avec celui-ci ⁽²⁾.

Liège, septembre 1891.

SÉANCE DU 1^{er} JUIN 1892.

PRÉSIDENTE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Fouret : *Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques.*

M. Bioche : *Sur un problème relatif à l'ellipse.*

M. d'Ocagne : *Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane.*

M. DEMOULIN fait la Communication suivante :

*Quelques remarques relatives à la théorie
des courbes gauches.*

1. Nous rappellerons tout d'abord quelques résultats bien connus concernant la cinématique des systèmes invariables.

⁽¹⁾ *Recherches...*, p. 61, Table V.

⁽²⁾ *Recherches...*, p. 48.