

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CATALAN

## **Sur quelques théorèmes d'analyse et d'arithmétique**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 19 (1891), p. 145-151.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1891\\_\\_19\\_\\_145\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__145_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique;  
par M. EUGÈNE CATALAN.

I. — Une formule de Cauchy.

1. Cette formule, bien remarquable (1), est

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & (1+x)(1+tx)(1+t^2x) \dots (1+t^{n-1}x) \\ & = 1 + \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)} tx^2 + \dots + t^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n \quad (2). \end{aligned} \right.$$

On va voir qu'il est facile d'en faire une démonstration *directe*.  
Dans le second membre,  $x^p$  a pour coefficient

$$T_{n,p} = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^p)} t^{\frac{p(p-1)}{2}}$$

Si l'on multiplie par  $1+t^n x$  les deux membres de l'égalité (1),  
ce coefficient devient  $T_{n,p} + t^n T_{n,p-1}$ .

La formule étant évidente quand  $n=1$ , il faut donc, d'après  
le procédé classique, prouver que l'on a, *identiquement*,

$$(2) \quad T_{n+1,p} = T_{n,p} + t^n T_{n,p-1}.$$

Or, si l'on supprime le facteur commun

$$\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^{p-1})},$$

cette égalité se réduit à

$$\frac{1-t^{n+1}}{1-t^p} t^{\frac{p(p-1)}{2}} = \frac{1-t^{n-p+1}}{1-t^p} t^{\frac{p(p-1)}{2}} + t^{n+\frac{(p-1)(p-2)}{2}};$$

puis, à

$$(1-t^{n+1})t^{p-1} = (1-t^{n-p+1})t^{p-1} + t^n(1-t^p);$$

ce qui est exact.

II. — Un théorème de Gauss.

2. Comme je l'ai fait observer à l'endroit cité (3), d'après la

(1) Je m'en suis occupé, déjà, dans les *Notes sur la théorie des fractions continues...*, et dans les *Lettres à quelques Mathématiciens*.

(2) *Comptes rendus*, septembre 1843, p. 527.

(3) *Lettres...*, p. 19.

forme du premier membre, dans la formule de Cauchy,  $T_{n,p}$  est un *polynôme entier*, fonction de  $t$ . D'ailleurs,  $t^{\frac{p(p-1)}{2}}$  est une quantité première avec le dénominateur de  $T_{n,p}$ . En conséquence,

$$(3) \quad \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^p)} = \text{entier} \quad (1).$$

3. *Remarque I.* — Cette équation (3) constitue un beau théorème, dû à Gauss, ainsi que l'a constaté M. Perott (2).

*Remarque II.* — Le théorème de Gauss est cité dans l'*Algèbre* de M. J. Bertrand (première édition, p. 136). Cet Ouvrage est suivi des *Solutions des exercices*, données par G... et P... A la page 356, on trouve une démonstration de l'égalité (3). Mais elle me semble inexacte. En effet, elle se réduit à établir l'existence d'une relation analogue à l'égalité (2), sans que l'on sache si deux des trois termes sont entiers (3).

### III. — Une rectification.

4. A la page 99 des *Recherches sur quelques produits indéfinis*, la formule qui précède l'égalité (20), empruntée aux *Fundamenta*, a été mal copiée. Elle doit être lue ainsi

$$\frac{q}{1-q^2} + 2^3 \frac{q^2}{1-q^4} + 3^3 \frac{q^3}{1-q^6} + 4^3 \frac{q^4}{1-q^8} + \dots = \frac{k^2 \omega^4}{\pi^2}.$$

D'ailleurs, l'égalité (20) est la même chose que

$$q(1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \dots)^2 = \frac{k^2 \omega^4}{\pi^2}.$$

Donc la formule (378), corrigée, est

$$(378 \text{ bis}) \quad q(1 + q + q^3 + q^6 + \dots)^2 = \frac{q}{1-q^2} + 2^3 \frac{q^2}{1-q^4} + 3^3 \frac{q^3}{1-q^6} + \dots;$$

(1) *Lettres...*, pp. 18 et 19. Elles contiennent quelques fautes typographiques.

(2) *Bulletin de la Société mathématique*, t. X, p. 87. La démonstration donnée par ce savant Professeur est plus *courte* que la nôtre; mais elle n'est pas *élémentaire*.

(3) *Voir*, sur ce point, la page 19 des *Lettres...* Faute d'avoir examiné suffisamment la page 356, j'avais admis cette *pseudo-démonstration*.

ou, ce qui revient au même,

$$(379) \quad (q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots)^8 = \frac{q^8}{1 - q^{16}} + 2^3 \frac{q^{16}}{1 - q^{32}} + 3^3 \frac{q^{24}}{1 - q^{48}} + \dots;$$

relation connue <sup>(1)</sup>.

#### IV. — *Autres séries elliptiques.*

5. On sait que

$$(4) \quad (q + q^9 + q^{25} + \dots)^4 = \frac{q^4}{1 - q^8} + 3 \frac{q^{12}}{1 - q^{24}} + 5 \frac{q^{20}}{1 - q^{40}} + \dots \quad (2).$$

Conséquemment,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{q^4}{1 - q^8} + 3 \frac{q^{12}}{1 - q^{24}} + 5 \frac{q^{20}}{1 - q^{40}} + \dots \right]^2 \\ & = \frac{q^8}{1 - q^{16}} + 2^3 \frac{q^{16}}{1 - q^{32}} + 3^3 \frac{q^{24}}{1 - q^{48}} + \dots \quad (3); \end{aligned} \right.$$

ou, par le changement de  $q^4$  en  $x$ ,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{x}{1 - x^2} + 3 \frac{x^3}{1 - x^6} + 5 \frac{x^5}{1 - x^{10}} + 7 \frac{x^7}{1 - x^{14}} + \dots \right]^2 \\ & = \frac{x^2}{1 - x^4} + 2^3 \frac{x^4}{1 - x^8} + 3^3 \frac{x^6}{1 - x^{12}} + \dots \quad (4). \end{aligned} \right.$$

6. A la page 527 des *Comptes rendus* <sup>(5)</sup>, l'illustre Cauchy donne cette autre formule, aussi importante que la première :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(1-x)(1-tx)\dots(1-t^{n-1}x)} \\ & = 1 + \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)} x^2 + \dots \quad (6). \end{aligned} \right.$$

<sup>(1)</sup> LEGENDRE, t. III, p. 133.

<sup>(2)</sup> *Recherches...*, p. 99.

<sup>(3)</sup> *Ibid.*

<sup>(4)</sup> Cette relation, qui me paraît remarquable, figure dans la page 100 des *Recherches...*; mais trop sommairement. Elle suppose, bien entendu, que le nombre  $x$  est inférieur à 1.

<sup>(5)</sup> Septembre 1843.

<sup>(6)</sup> Dans la série formant le second membre, les coefficients des puissances de  $x$  sont, d'après le théorème de Gauss (n° 3), des *polynômes entiers*.

Il en résulte, par le changement de  $x$  en  $-x$ ,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(1+x)(1+tx)\dots(1+t^{n-1}x)} \\ & = 1 - \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)} x^2 - \dots \end{aligned} \right.$$

Comparant avec l'égalité (1), on a donc

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 &= \left[ 1 + \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)} t x^2 + \dots + t^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n \right] \\ &\times \left[ 1 - \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)} x^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})(1-t^{n+2})}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} x^3 + \dots \right]; \end{aligned} \right.$$

et, si  $n$  devient infini,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 &= \left[ 1 + \frac{x}{1-t} + \frac{tx^2}{(1-t)(1-t^2)} + \frac{t^3x^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} + \dots \right] \\ &\times \left[ 1 - \frac{x}{1-t} + \frac{x^2}{(1-t)(1-t^2)} - \frac{x^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

7. Dans cette relation générale, supposons  $t = x = q$ . Elle devient

$$(11) \quad 1 = AB;$$

en posant, pour abrégier,

$$(12) \quad A = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots,$$

$$(13) \quad B = 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots$$

8. A la page 52 des *Recherches*, on trouve

$$(14) \quad A = B'C',$$

en faisant

$$(15) \quad B' = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots,$$

$$(16) \quad C' = 1 + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

De plus (1),

$$(15) \quad B' = \beta, \quad C' = \beta'.$$

La combinaison des égalités (11), (14) donne

$$(16) \quad 1 = BB'C';$$

ou, à cause des valeurs (15),

$$(17) \quad 1 = B\beta\beta'.$$

Mais, d'après Euler,

$$1 = \alpha\beta\beta' \quad (2);$$

donc

$$(18) \quad B = \alpha.$$

9. Si, dans une célèbre formule de Jacobi (3), on prend  $z = -1$ , on trouve

$$(19) \quad \alpha = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

A cause de la définition (13) et de l'égalité (18), nous avons donc, finalement,

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots \\ & = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots \end{aligned} \right.$$

Ainsi, ces deux séries ont même limite (4).

### V. — Théorème d'Arithmétique.

10. Reprenons la formule

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + \dots \right]^2 \\ & = \frac{x^2}{1-x^4} + 2^3 \frac{x^4}{1-x^8} + 3^3 \frac{x^6}{1-x^{12}} + \dots \end{aligned} \right.$$

(1) Même page.

(2) *Recherches...*, p. 2.

(3) *Fundamenta*, p. 180. Voir, aussi, les *Notes sur la théorie des fractions continues...*, p. 6.

(4) Les relations (18), (20) sont-elles nouvelles? Quoi qu'il en soit, elles complètent, pour ainsi dire, les théorèmes exprimés par les égalités (15).

Nous avons, en employant la notation d'Euler,

$$\frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + \dots = x + 4x^3 + 6x^5 + \dots + x^n \int n + \dots;$$

ou, pour abrégér,

$$(21) \quad \frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + \dots = \sum_1^{\infty} x^n \int n,$$

$n$  étant *impair*.

Dans le développement du premier membre de l'égalité (6), le coefficient de  $x^{2n}$  est donc

$$(22) \quad \int_1 \int (2n-1) + \int 3 \int (2n-3) + \dots + \int (2n-1) \int_1 = S_{2n}.$$

D'autre part, le terme général du second membre est

$$\lambda^3 \frac{x^{2\lambda}}{1-x^{4\lambda}}.$$

Développé, ce terme devient

$$\lambda^3 [x^{2\lambda} + x^{6\lambda} + x^{10\lambda} + \dots + x^{2\mu\lambda} + \dots],$$

$\mu$  étant *impair*. Si donc

$$\lambda\mu = n,$$

on voit que  $\lambda, \mu$  sont deux facteurs, *conjugués*, du nombre *impair*  $n$ . Par suite, le coefficient de  $x^{2n}$ , dans le second membre dont il s'agit, est  $\sum \lambda^3$  (1). On a donc ce théorème :

*n* étant un nombre *impair*, on décompose  $2n$ , par voie d'addition, en

$$1 + (2n-1), \quad 3 + (2n-3), \quad 5 + (2n-5), \quad \dots \quad (2n-1) + 1;$$

et l'on fait la somme,  $S_{2n}$ , des produits

$$\int_1 \int (2n-1), \quad \int 3 \int (2n-3), \quad \dots, \quad \int (2n-1) \int_1.$$

D'autre part, on prend tous les diviseurs de  $n$ , savoir,  $1, \dots, \lambda, \dots, n$ ; et l'on forme la somme  $\sum \lambda^3$  de ces diviseurs.

Cela posé, les deux sommes sont égales.

(1) J'admets la convergence de la série, facile à prouver.

11. *Application.* — Soit  $n = 9$ ; d'où  $\lambda = 1, 3, 9$ . On a

$$\begin{aligned} S_{18} &= 2 \left[ \int_1 \int_{17} + \int_3 \int_{15} + \int_5 \int_{13} + \int_7 \int_{11} \right] + \left[ \int_9 \right]^2 \\ &= 2[1.18 + 4.24 + 6.14 + 8.12] + 13^2 = 588 + 169 = 757. \end{aligned}$$

Cette somme doit égaler  $1^3 + 3^3 + 9^3 = 1 + 27 + 729$ ; ce qui est vrai.

12. *Remarque.* — Si le nombre  $n$  est *premier*, les seules valeurs de  $\lambda$  sont 1 et  $n$ . Donc, dans ce cas particulier,

$$(23) \quad S_{2n} = 1 + n^3 \quad (1).$$

Liège, septembre 1891.

---

---

(1) Le théorème précédent, qui n'est pas nouveau (*Recherches...*, p. 100), me paraît curieux. Il serait difficile peut-être de le démontrer *directement*.