Association française pour l'avancement des sciences : conférences de Paris. 22, Compte-rendu de la 22e session

M. E. CATALAN

Professeur émérite à l'Université de Liége.

UNE APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE A L'ARITHMÉTIQUE

[I 13 b α]
[I 17 c]
[K 6 a]

— *Séance du 4 août 1893* —

1. — Lemme. — *Si neuf quantités* a, b, c, a′, b′, c′, a″, b″, c″ *satisfont aux six équations :*

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

elles satisfont également :

1° *Aux six équations :*

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''a + b''b + c''c &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

2° *Aux neuf équations :*

$$\left.\begin{aligned} b'c'' - c'b'' &= \pm a, & b''c - c''b &= \pm a', & bc' - cb' &= \pm a'', \\ c'a'' - a'c'' &= \pm b, & c''a - a''c &= \pm b', & ca' - ac' &= \pm b'', \\ a'b'' - b'a'' &= \pm c, & a''b - b''a &= \pm c', & ab' - ba' &= \pm c''; \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

3° *A l'équation :*

$$a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb') = \pm 1 \text{ (*)}. \qquad (6)$$

(*) *Théorie analytique des lignes à double courbure*, p. 2.
La première partie de la proposition appartient à Poisson, qui l'a énoncée d'une manière différente (*Correspondance sur l'École polytechnique*, t. I, p. 240). Pour la seconde partie, due à Lacroix, on peut consulter la *Géométrie analytique* de Lefébure de Fourcy. Le *lemme* (ou plutôt le *théorème*) est généralisé dans mon *Mémoire sur la transformation des variables* (Bruxelles, 1840).

2. — Angle trièdre. — Si les quantités considérées sont réelles, elles représentent les cosinus directifs de trois droites OA, OB, OC, perpendiculaires deux à deux, et rapportées à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ. On a ainsi :

a, a', a'', cosinus directifs de OA,
b, b', b'', » » OB,
c, c', c'', » » OC.

3. — Remarque. — Le premier membre de l'équation (6) est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & a', & a'', \\ b, & b', & b'', \\ c, & c', & c''. \end{vmatrix}$$

Comme dans notre *Théorie analytique*, nous supposerons :

$$\Delta = +1 \text{ (*)} \qquad (7)$$

4. — Second trièdre. — D'après les équations (3), ces mêmes quantités a, a', a'', b, etc. déterminent un second trièdre $OA_1B_1C_1$ *trirectangle*, pour lequel :

a, b, c sont les cosinus directifs de OA_1,
a', b', c' » » OB_1,
a'', b'', c'' » » OC_1.

Par conséquent :

$$AOX = A_1OX, \quad AOY = B_1OX, \quad AOZ = C_1OX;$$
$$BOX = A_1OY, \quad BOY = B_1OY, \quad BOZ = C_1OY;$$
$$COX = A_1OZ, \quad COY = B_1OZ, \quad COZ = C_1OZ.$$

5. — Cônes circonscrits. — Considérons :

Le cône engendré par OA tournant autour de OX,
» » OB » » OY,
» » OC » » OZ.

Le premier contient l'arête OA_1 ; le deuxième contient l'arête OB_1 ; le troisième contient l'arête OC_1. Ainsi, *les trièdres* OABC, $OA_1B_1C_1$ *ont leurs arêtes situées sur trois cônes de révolution* (**).

(*) Si les directions OA, OB sont choisies de manière que les cosinus a, a', a'', b, b', b'' satisfassent aux conditions

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$

la direction OC est donnée, *sans ambiguïté*, par les formules :

$$c = a'b'' - b'a'', \quad c' = a''b - b''a, \quad c'' = ab' - ba'.$$

(**) Cette propriété, à peu près évidente, a-t-elle été déjà signalée ?

6. — Suite. — L'équation du premier cône a la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = m^2x^2 \text{ (*)}.$$

Prenons OA = 1 : l'abscisse du point A est a ; donc

$$1 = m^2a^2;$$

d'où, par l'élimination de m :

$$\frac{x^2}{a^2} = x^2 + y^2 + z^2. \quad (8)$$

L'équation du deuxième cône serait :

$$\frac{y^2}{b'^2} = x^2 + y^2 + z^2; \quad (9)$$

et celle du troisième :

$$\frac{z^2}{c''^2} = x^2 + y^2 + z^2. \quad (10)$$

L'équation (8) est vérifiée par $x = a$, $y = b$, $z = c$;
» (9) » $x = a'$, $y = b'$, $z = c'$;
» (10) » $x = a''$, $y = b''$, $z = c''$;

ce qui devait être.

7. — Relations entre les deux trièdres. — Nous avons trouvé (4) :

$$\text{AOX} = \text{A}_1\text{OX}, \quad \text{AOY} = \text{B}_1\text{OX}, \quad \text{AOZ} = \text{C}_1\text{OX};$$
$$\text{BOX} = \text{A}_1\text{OY}, \quad \text{BOY} = \text{B}_1\text{OY}, \quad \text{BOZ} = \text{C}_1\text{OY};$$
$$\text{COX} = \text{A}_1\text{OZ}, \quad \text{COY} = \text{B}_1\text{OZ}, \quad \text{COZ} = \text{C}_1\text{OZ};$$

ou, ce qui revient au même :

arc AX = *arc* A_1X, *arc* AY = *arc* B_1X, *arc* AZ = *arc* C_1X;
arc BX = *arc* A_1Y, *arc* BY = *arc* B_1Y, *arc* BZ = *arc* C_1Y; (11)
arc CX = *arc* A_1Z, *arc* CY = *arc* B_1Z, *arc* CZ = *arc* C_1Z. (**)

8. — Triangles trirectangles. — Soient (*fig. 1*) les triangles ABC, XYZ. Du point X, comme pôle, je décris l'arc AA_1 (***), de manière que

$$XA_1 = AX, \quad YA_1 = BX, \quad ZA_1 = CX \text{ (****)}; \quad (11)$$

ce qui est possible, d'après le lemme. Ainsi, il existe, sur la sphère donnée, un point A_1 satisfaisant aux conditions (11) (*****).

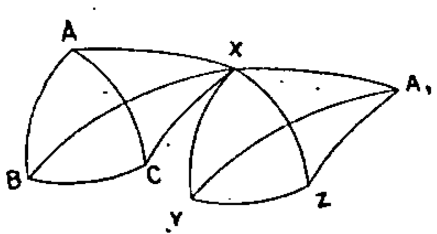

Fig. 1.

(*) Parce que tout plan, perpendiculaire à OX, le coupe suivant une circonférence.
(**) Arcs de *grands cercles*.
(***) Arc de *petit cercle*.
(****) Arcs de *grands cercles*.
(*****) En vertu de ces conditions, les triangles sphériques

$$\text{ABX, BCX, CAX, XYA}_1\text{, YZA}_1\text{, ZXA}_1$$

sont égaux (ou *symétriques*) deux à deux. Pour plus de simplicité, nous les supposons égaux.

9. — Suite. — Opérant sur Y et Z comme on a opéré sur X, on arrive à cette conclusion :

Étant donné, sur une sphère, deux triangles trirectangles ABC, XYZ, *on peut en déduire un troisième, égal aux deux premiers, et tel que* X, Y, Z *soient, respectivement, les pôles de* A, A_1, *de* B, B_1, *de* C, C_1.

10. — Remarque. — On peut se demander si la *réciproque* suivante est vraie :

Deux triangles trirectangles, ABC, $A_1B_1C_1$, *étant donnés sur une sphère, il en existe un troisième,* XYZ, *tel que les égalités* (11) *soient vérifiées* (IV) (*).

11. — Projection d'un tétraèdre. — Soit ABC *(fig. 2)* la base d'un tétraèdre dont le sommet S est projeté en O, et dont les trois autres faces sont *rectangulaires*.

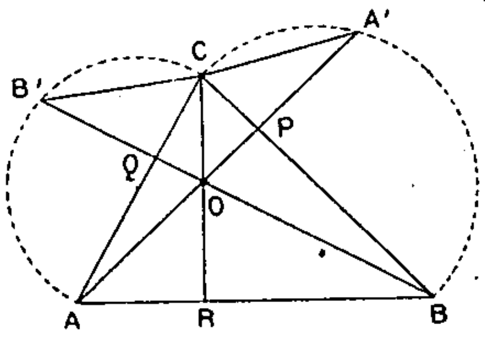

Fig. 2.

Les projections des arêtes AS, BS, CS, sur le plan ABC, sont, respectivement, perpendiculaires à BC, CA, AB. Donc *le point* O *est l'orthocentre de* ABC.

La réciproque est vraie. C'est-à-dire que, O étant l'orthocentre, si l'on décrit les demi-circonférences CA'B, CB'A, *les cordes* CA', CB' *sont égales*. En effet, de :

$$\frac{CP}{CR} = \frac{CO}{BC}, \quad \frac{CQ}{CR} = \frac{CO}{AC},$$

on déduit :

$$CP \times BC = CO \times CR = CQ \times AC,$$

ou

$$\overline{CA'}^2 = \overline{CB'}^2 \text{ (**)}$$

12. — Problème. — *Satisfaire aux équations* (1), (2), (3), (4), *par des valeurs rationnelles des inconnues.*

Les valeurs générales sont, comme on sait :

$$\left.\begin{aligned}
a &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
a' &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
a'' &= \sin\psi\sin\theta,\\
b &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
b' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
b'' &= \cos\psi\sin\theta,\\
c &= \sin\varphi\sin\theta,\\
c' &= -\cos\varphi\sin\theta,\\
c'' &= \cos\theta;
\end{aligned}\right\} \quad (12)\ (***)$$

(*) La réponse me semble affirmative ; mais, pressé par le temps, je néglige cette question incidente.

(**) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, p. 81.

(***) Formules d'Euler.

dans lesquelles les angles φ, ψ, θ sont *arbitraires*. Les quantités précédentes seront rationnelles si l'on prend :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = s, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi = t, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = u. \tag{13}$$

Effectivement, de :

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1-s^2}{1+s^2}, & \cos\psi &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \cos\theta &= \frac{1-u^2}{1+u^2}, \\ \sin\varphi &= \frac{2s}{1+s^2}, & \sin\psi &= \frac{2t}{1+t^2}, & \sin\theta &= \frac{2u}{1+u^2}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

on conclut :

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{(1-s^2)(1-t^2)}{(1+s^2)(1+t^2)} - \frac{4st(1-u^2)}{(1+s^2)(1+t^2)(1+u^2)}, \\ a' &= \frac{2s(1-t^2)}{1+s^2)(1+t_2)} + \frac{2t(1-s^2)(1-u^2)}{(1+s^2)(1+t^2)(1+u^2)}, \\ a'' &= \frac{4tu}{(1+t^2)(1+u^2)}, \\ b &= -\frac{2t(1-s^2)}{(1+s^2)(1+t^2)} - \frac{2s(1-t^2)(1-u^2)}{(1+s^2)(1+t^2)(1+u^2)}, \\ b' &= \frac{-4st}{(1+s^2)(1+t^2)} + \frac{(1-s^2)(1-t^2)(1-u^2)}{(1+s^2)(1+t^2)(1+u^2)}, \\ b'' &= \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)(1+u^2)}, \\ c &= \frac{4su}{(1+s^2)(1-u^2)}, \\ c' &= -\frac{2u(1-s^2)}{(1+s^2)(1-u^2)}, \\ c'' &= \frac{1-u^2}{1+u^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

13. — Identités. — Si l'on pose :

$$D = (1+s^2)(1+t^2)(1+u^2), \tag{16}$$

on déduit, des formules (15), diverses identités; par exemple celle-ci :

$$\left.\begin{aligned} D^2 = {} & \left[(1-s^2)(1-t^2)(1+u^2) - 4st(1-u^2)\right]^2, \\ & + 4\left[(s+t)(1-st) + u^2(s-t)(1+st)\right]^2, \\ & + 16t^2u^2(1+s^2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

14. — SUITE. — Soient, pour abréger :

$$\left.\begin{aligned}
P &= (1 - s^2)(1 - t^2)(1 + u^2) - 4st(1 - u^2),\\
Q &= 2\left[(s + t)(1 - st) + u^2(s - t)(1 + st)\right],\\
R &= 4tu(1 + s^2),\\
p &= 1 + st, \quad q = 1 + tu, \quad r = 1 + us,\\
p' &= s - t, \quad q' = t - u, \quad r' = u - s.
\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Il est clair que :

$$D^2 = (1 + s^2)(1 + t^2) \times (1 + t^2)(1 + u^2) \times (1 + u^2)(1 + s^2);$$

ou, par la règle de Fibonacci :

$$D^2 = (p^2 + p'^2)(q^2 + q'^2)(r^2 + r'^2) = P^2 + Q^2 + R^2. \qquad (19)$$

D'après la même règle, le produit

$$(p^2 + p'^2)(q^2 + q'^2)(r^2 + r'^2)$$

peut être remplacé par une somme de deux carrés. Donc, au moyen des identités (19), *on peut trouver une infinité de solutions entières de la double équation*

$$N^2 = v^2 + w^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (A)$$

15. — APPLICATION. — Soient, par exemple :

$$s = 2, \qquad t = 3, \qquad u = 4.$$

Alors :

$$p = 7, \quad q = 13, \quad r = 9, \quad p' = -1, \quad q' = -1, \quad r' = 2;$$

puis :

$$\begin{aligned}
P &= (1 - 6)^2 - 5^2 + 16\left[(1 + 7^2)^2 - 1^2\right]\\
&= 16 \times 48 = 768\ (^*),\\
Q &= 2[5(-5) + 16(-1 \times 7)] = -274.\\
R &= 4 \times 4 \times 3 \times 5 = 240.
\end{aligned}$$

(*) La valeur générale ci-dessus peut être changée en :

$$P = (1 - st)^2 - (s + t)^2 + u^2\left[p^2 - p'^2\right].$$

On doit donc trouver :

$$(7^2 + 1^2)(13^2 + 1^2)(9^2 + 2^2) = 768^2 + 274^2 + 240^2,$$

ou :

$$50 \times 170 \times 85 = 768^2 + 274^2 + 240^2,$$

ou :

$$722\,500 = 589\,824 + 75\,076 + 57\,600;$$

ce qui est exact.

16. — Remarque. — Le produit :

$$(p^2 + p'^2)(q^2 + q'^2)(r^2 + r'^2)$$

est la somme de *huit* carrés. Conséquemment, le nombre N^2, somme de *deux* carrés et somme de *trois* carrés, est encore la somme de *huit* carrés.

Par exemple :

$$\begin{aligned} 722\,500 = 850^2 &= 819^2 + 117^2 + 63^2 + 9^2 + 182^2 + 26^2 + 14^2 + 2^2 \\ &= 670\,761 + 13\,689 + 3\,969 + 81 + 33\,124 + 676 + 4. \end{aligned}$$

17. — Autres théorèmes. — Pour terminer ce petit travail, je rappellerai les propositions suivantes :

1° *Soient* α *et* $-\beta$ *les racines de l'équation :*

$$x^2 - 2ax - b^2 = 0,$$

dans laquelle a *et* b *sont des nombres entiers. La quantité*

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta} \qquad (n > 1)$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés (*).

2° x, y *étant deux nombres entiers, premiers entre eux, la quantité*

$$x^{4n} - x^{4n-2}y^2 + x^{4n-4}y^4 - \dots + y^{4n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés.

(*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés* (1884).