

Association française pour
l'avancement des sciences :
conférences de Paris. 22,
Compte-rendu de la 22e
session

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (022 ; 1893 ; Besançon). Association française pour l'avancement des sciences : conférences de Paris. 22, Compte-rendu de la 22e session. 1893-1894.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

M. E. CATALAN

Professeur émérite à l'Université de Liège.

UNE APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE A L'ARITHMÉTIQUE

[I 13 b α]

[I 17 c]

[K 6 a]

— Séance du 4 août 1893 —

1. — LEMME. — Si neuf quantités $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ satisfont aux six équations :

$$\left. \begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

elles satisfont également :

1° Aux six équations :

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''a + b''b + c''c &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2° Aux neuf équations :

$$\left. \begin{aligned} b'c'' - c'b'' &= \pm a, & b''c - c''b &= \pm a', & bc' - cb' &= \pm a'', \\ c'a'' - a'c'' &= \pm b, & c''a - a''c &= \pm b', & ca' - ac' &= \pm b'', \\ a'b'' - b'a'' &= \pm c, & a''b - b''a &= \pm c', & ab' - ba' &= \pm c''; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

3° A l'équation :

$$a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb') = \pm 1 \quad (*). \quad (6)$$

(*) *Théorie analytique des lignes à double courbure*, p. 2.

La première partie de la proposition appartient à Poisson, qui l'a énoncée d'une manière différente (*Correspondance sur l'École polytechnique*, t. I, p. 240). Pour la seconde partie, due à Lacroix, on peut consulter la *Géométrie analytique* de Lefébure de Fourcy. Le lemme (ou plutôt le théorème) est généralisé dans mon *Mémoire sur la transformation des variables* (Bruxelles, 1840).

2. — ANGLE TRIÈDRE. — Si les quantités considérées sont réelles, elles représentent les cosinus directifs de trois droites OA, OB, OC, perpendiculaires deux à deux, et rapportées à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ. On a ainsi :

$$\begin{array}{lll} a, a', a'', & \text{cosinus directifs de OA,} \\ b, b', b'', & \text{» } & \text{» } & \text{OB,} \\ c, c', c'', & \text{» } & \text{» } & \text{OC.} \end{array}$$

3. — REMARQUE. — Le premier membre de l'équation (6) est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, a', a'', \\ b, b', b'', \\ c, c', c''. \end{vmatrix}$$

Comme dans notre *Théorie analytique*, nous supposons :

$$\Delta = +1 (*) \quad (7)$$

4. — SECOND TRIÈDRE. — D'après les équations (3), ces mêmes quantités a, a', a'', b , etc. déterminent un second trièdre $OA_1B_1C_1$ *trirectangle*, pour lequel :

$$\begin{array}{lll} a, b, c & \text{sont les cosinus directifs de OA}_1, \\ a', b', c' & \text{» } & \text{» } & \text{OB}_1, \\ a'', b'', c'' & \text{» } & \text{» } & \text{OC}_1. \end{array}$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{lll} \text{AOX} = \text{A}_1\text{OX}, & \text{AOY} = \text{B}_1\text{OX}, & \text{AOZ} = \text{C}_1\text{OX}; \\ \text{BOX} = \text{A}_1\text{OY}, & \text{BOY} = \text{B}_1\text{OY}, & \text{BOZ} = \text{C}_1\text{OY}; \\ \text{COX} = \text{A}_1\text{OZ}, & \text{COY} = \text{B}_1\text{OZ}, & \text{COZ} = \text{C}_1\text{OZ}. \end{array}$$

5. — CÔNES CIRCONSCRITS. — Considérons :

$$\begin{array}{llll} \text{Le cône engendré par OA tournant autour de OX,} \\ \text{» } & \text{» } & \text{OB} & \text{» } & \text{» } & \text{OY,} \\ \text{» } & \text{» } & \text{OC} & \text{» } & \text{» } & \text{OZ.} \end{array}$$

Le premier contient l'arête OA_1 ; le deuxième contient l'arête OB_1 ; le troisième contient l'arête OC_1 . Ainsi, *les trièdres OABC, $OA_1B_1C_1$ ont leurs arêtes situées sur trois cônes de révolution (**).*

(*) Si les directions OA, OB sont choisies de manière que les cosinus a, a', a'', b, b', b'' satisfassent aux conditions

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$

la direction OC est donnée, sans ambiguïté, par les formules :

$$c = a'b'' - b'a'', \quad c' = a''b - b''a, \quad c'' = ab' - ba'.$$

(**) Cette propriété, à peu près évidente, a-t-elle été déjà signalée ?

6. — SUITE. — L'équation du premier cône a la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = m^2 x^2 \text{ (**).}$$

Prenons $OA = 1$: l'abscisse du point A est a ; donc

$$1 = m^2 a^2 ;$$

d'où, par l'élimination de m :

$$\frac{x^2}{a^2} = x^2 + y^2 + z^2. \quad (8)$$

L'équation du deuxième cône serait :

$$\frac{y^2}{b'^2} = x^2 + y^2 + z^2 ; \quad (9)$$

et celle du troisième :

$$\frac{z^2}{c''^2} = x^2 + y^2 + z^2. \quad (10)$$

L'équation (8) est vérifiée par $x = a, \quad y = b, \quad z = c$;

» (9) » $x = a', \quad y = b', \quad z = c'$;

» (10) » $x = a'', \quad y = b'', \quad z = c''$;

ce qui devait être.

7. — RELATIONS ENTRE LES DEUX TRIÈDRES. — Nous avons trouvé (4) :

$$AOX = A_1OX, \quad AOY = B_1OX, \quad AOZ = C_1OX ;$$

$$BOX = A_1OY, \quad BOY = B_1OY, \quad BOZ = C_1OY ;$$

$$COX = A_1OZ, \quad COY = B_1OZ, \quad COZ = C_1OZ ;$$

ou, ce qui revient au même :

$$\text{arc } AX = \text{arc } A_1X, \quad \text{arc } AY = \text{arc } B_1X, \quad \text{arc } AZ = \text{arc } C_1X ;$$

$$\text{arc } BX = \text{arc } A_1Y, \quad \text{arc } BY = \text{arc } B_1Y, \quad \text{arc } BZ = \text{arc } C_1Y ; \quad (11)$$

$$\text{arc } CX = \text{arc } A_1Z, \quad \text{arc } CY = \text{arc } B_1Z, \quad \text{arc } CZ = \text{arc } C_1Z. \quad (**)$$

8. — TRIANGLES TRIRECTANGLES. — Soient (fig. 1) les triangles ABC, XYZ.

Du point X, comme pôle, je décris l'arc AA_1 (***) , de manière que

$$XA_1 = AX, \quad YA_1 = BX, \quad ZA_1 = CX \text{ (****)} ; \quad (11)$$

ce qui est possible, d'après le lemme. Ainsi, il existe, sur la sphère donnée, un point A_1 , satisfaisant aux conditions (11) (*****).

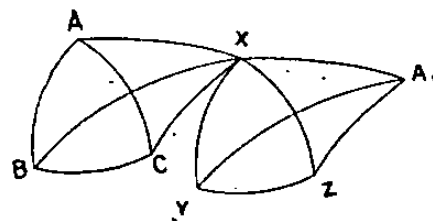


FIG. 1.

(*) Parce que tout plan, perpendiculaire à OX , le coupe suivant une circonférence.

(**) Arcs de grands cercles.

(***) Arc de petit cercle.

(****) Arcs de grands cercles.

(*****) En vertu de ces conditions, les triangles sphériques

$$ABX, BCX, CAX, XYA_1, YZA_1, ZXA_1$$

sont égaux (ou symétriques) deux à deux. Pour plus de simplicité, nous les supposons égaux.

9. — SUITE. — Opérant sur Y et Z comme on a opéré sur X, on arrive à cette conclusion :

Étant donné, sur une sphère, deux triangles trirectangles ABC, XYZ, on peut en déduire un troisième, égal aux deux premiers, et tel que X, Y, Z soient, respectivement, les pôles de A, A₁, de B, B₁, de C, C₁.

10. — REMARQUE. — On peut se demander si la réciproque suivante est vraie :

Deux triangles trirectangles, ABC, A₁B₁C₁, étant donnés sur une sphère, il en existe un troisième, XYZ, tel que les égalités (11) soient vérifiées (IV) (*).

11. — PROJECTION D'UN TÉTRAÈDRE. — Soit ABC (fig. 2) la base d'un tétraèdre dont le sommet S est projeté en O, et dont les trois autres faces sont rectangulaires.

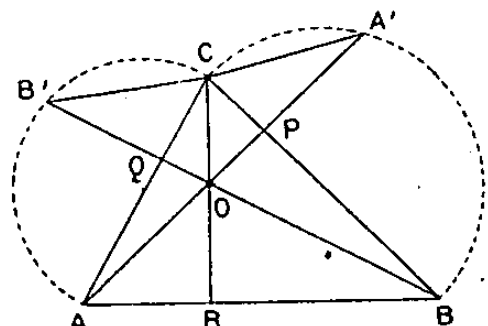


FIG. 2.

Les projections des arêtes AS, BS, CS, sur le plan ABC, sont, respectivement, perpendiculaires à BC, CA, AB. Donc le point O est l'orthocentre de ABC.

La réciproque est vraie. C'est-à-dire que, O étant l'orthocentre, si l'on décrit les demi-circonférences CA'B, CB'A, les cordes CA', CB' sont égales. En effet, de :

$$\frac{CP}{CR} = \frac{CO}{BC}, \quad \frac{CQ}{CR} = \frac{CO}{AC},$$

on déduit :

$$CP \times BC = CO \times CR = CQ \times AC,$$

ou

$$\overline{CA'}^2 = \overline{CB'}^2 (**)$$

12. — PROBLÈME. — Satisfaire aux équations (1), (2), (3), (4), par des valeurs rationnelles des inconnues.

Les valeurs générales sont, comme on sait :

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ a' &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ a'' &= \sin \psi \sin \theta, \\ b &= -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ b' &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ b'' &= \cos \psi \sin \theta, \\ c &= \sin \varphi \sin \theta, \\ c' &= -\cos \varphi \sin \theta, \\ c'' &= \cos \theta; \end{aligned} \right\} (12) (***)$$

(*) La réponse me semble affirmative; mais, pressé par le temps, je néglige cette question incidente.

(**) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, p. 81.

(***) Formules d'Euler.

dans lesquelles les angles φ, ψ, θ sont *arbitraires*. Les quantités précédentes seront rationnelles si l'on prend :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = s, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi = t, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = u. \quad (13)$$

Effectivement, de :

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1-s^2}{1+s^2}, & \cos \psi &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \cos \theta &= \frac{1-u^2}{1+u^2}, \\ \sin \varphi &= \frac{2s}{1+s^2}, & \sin \psi &= \frac{2t}{1+t^2}, & \sin \theta &= \frac{2u}{1+u^2}, \end{aligned} \right\} (14)$$

on conclut :

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{(1-s^2)(1-t^2)}{(1+s^2)(1+t^2)} - \frac{4st(1-u^2)}{(1+s^2)(1+t^2)(1+u^2)}, \\ a' &= \frac{2s(1-t^2)}{(1+s^2)(1+t^2)} + \frac{2t(1-s^2)(1-u^2)}{(1+s^2)(1+t^2)(1+u^2)}, \\ a'' &= \frac{4tu}{(1+t^2)(1+u^2)}, \\ b &= -\frac{2t(1-s^2)}{(1+s^2)(1+t^2)} - \frac{2s(1-t^2)(1-u^2)}{(1+s^2)(1+t^2)(1+u^2)}, \\ b' &= \frac{-4st}{(1+s^2)(1+t^2)} + \frac{(1-s^2)(1-t^2)(1-u^2)}{(1+s^2)(1+t^2)(1+u^2)}, \\ b'' &= \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)(1+u^2)}, \\ c &= \frac{4su}{(1+s^2)(1-u^2)}, \\ c' &= -\frac{2u(1-s^2)}{(1+s^2)(1-u^2)}, \\ c'' &= \frac{1-u^2}{1+u^2}. \end{aligned} \right\} (15)$$

13. — IDENTITÉS. — Si l'on pose :

$$D = (1+s^2)(1+t^2)(1+u^2), \quad (16)$$

on déduit, des formules (15), diverses identités; par exemple celle-ci :

$$\left. \begin{aligned} D^2 &= [(1-s^2)(1-t^2)(1+u^2) - 4st(1-u^2)]^2, \\ &+ 4[(s+t)(1-st) + u^2(s-t)(1+st)]^2, \\ &+ 16t^2u^2(1+s^2)^2. \end{aligned} \right\} (17)$$

14. — SUITE. — Soient, pour abréger :

$$\left. \begin{aligned} P &= (1 - s^2)(1 - t^2)(1 + u^2) - 4st(1 - u^2), \\ Q &= 2[(s + t)(1 - st) + u^2(s - t)(1 + st)], \\ R &= 4tu(1 + s^2), \\ p &= 1 + st, \quad q = 1 + tu, \quad r = 1 + us, \\ p' &= s - t, \quad q' = t - u, \quad r' = u - s. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Il est clair que :

$$D^2 = (1 + s^2)(1 + t^2) \times (1 + t^2)(1 + u^2) \times (1 + u^2)(1 + s^2);$$

ou, par la règle de Fibonacci :

$$D^2 = (p^2 + p'^2)(q^2 + q'^2)(r^2 + r'^2) = P^2 + Q^2 + R^2. \quad (19)$$

D'après la même règle, le produit

$$(p^2 + p'^2)(q^2 + q'^2)(r^2 + r'^2)$$

peut être remplacé par une somme de deux carrés. Donc, au moyen des identités (19), on peut trouver une infinité de solutions entières de la double équation

$$N^2 = v^2 + w^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (A)$$

15. — APPLICATION. — Soient, par exemple :

$$s = 2, \quad t = 3, \quad u = 4.$$

Alors :

$$p = 7, \quad q = 13, \quad r = 9, \quad p' = -1, \quad q' = -1, \quad r' = 2;$$

puis :

$$\begin{aligned} P &= (1 - 6)^2 - 5^2 + 16[(1 + 7^2)^2 - 1^2] \\ &= 16 \times 48 = 768 (*), \end{aligned}$$

$$Q = 2[5(-5) + 16(-1 \times 7)] = -274.$$

$$R = 4 \times 4 \times 3 \times 5 = 240.$$

(*) La valeur générale ci-dessus peut être changée en :

$$P = (1 - st)^2 - (s + t)^2 + u^2[p^2 - p'^2].$$

On doit donc trouver :

$$(7^2 + 1^2)(13^2 + 1^2)(9^2 + 2^2) = 768^2 + 274^2 + 240^2,$$

ou :

$$50 \times 170 \times 83 = 768^2 + 274^2 + 240^2,$$

ou :

$$722\ 500 = 589\ 824 + 75\ 076 + 57\ 600;$$

ce qui est exact.

16. — REMARQUE. — Le produit :

$$(p^2 + p'^2)(q^2 + q'^2)(r^2 + r'^2)$$

est la somme de *huit* carrés. Conséquemment, le nombre N^2 , somme de *deux* carrés et somme de *trois* carrés, est encore la somme de *huit* carrés.

Par exemple :

$$\begin{aligned} 722\ 500 &= 850^2 = 819^2 + 117^2 + 63^2 + 9^2 + 182^2 + 26^2 + 14^2 + 2^2 \\ &= 670\ 761 + 13\ 689 + 3\ 969 + 81 + 33\ 124 + 676 + 4. \end{aligned}$$

17. — AUTRES THÉORÈMES. — Pour terminer ce petit travail, je rappellerai les propositions suivantes :

1° Soient α et $-\beta$ les racines de l'équation :

$$x^2 - 2ax - b^2 = 0,$$

dans laquelle a et b sont des nombres entiers. La quantité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta} \quad (n > 1)$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés (*).

2° x, y étant deux nombres entiers, premiers entre eux, la quantité

$$x^{4n} - x^{4n-2}y^2 + x^{4n-4}y^4 - \dots + y^{4n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés.

(*) Mémoire sur certaines décompositions en carrés (1884).