BnF Gallica

Association française pour l'avancement des sciences : conférences de Paris. 20, Compte-rendu de la 20e session

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

{BnF Gallica

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (020 ; 1891 ; Marseille). Association française pour l'avancement des sciences : conférences de Paris. 20, Compte-rendu de la 20e session. 1891-1892.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
reutilisationcommerciale@bnf.fr.

M. Eugène CATALAN

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Professeur émérite à l'Université de Liège.

DIVERSES NOTES D'ARITHMÉTIQUE

— *Séance du 19 septembre 1891* —

I

COMPLÉMENT A LA FORMULE DE M. LE LASSEUR

1. — Cette formule est :

$$2^{4k+2}+1=(2^{2k+1}+2^{k+1}+1)(2^{2k+1}-2^{k+1}+1). \qquad (1)\ (*)$$

2. — Si $2k+1$ n'est pas premier, ce nombre égale nn', n et n' étant *impairs*. Le premier membre de l'égalité (1), savoir, $2^{2nn'}+1$ est divisible par $2^{2n}+1$ et par $2^{2n'}+1$. Le premier quotient égale :

$$2^{2n(n'-1)}-2^{2n(n'-2)}+2^{2n(n'-3)}-\ldots+1.$$

Le second :

$$2^{2n'(n-1)}-2^{2n'(n-2)}+2^{2n'(n-3)}-\ldots+1.$$

Ainsi, dans ce cas,

$$2^{2nn'}+1=(2^{2n}+1)[2^{2n(n'-1)}-2^{2n(n'-2)}+\ldots+1], \qquad (2)$$

$$2^{2nn'}+1=(2^{2n'}+1)[2^{2n'(n-1)}-2^{2n'(n-2)}+\ldots+1]. \qquad (3)$$

3. — *Application*. — Soit $4k+2=66$, ou $2k+1=33$.

On a: $n=3,\ n'=11$;

(*) Au Congrès de Reims, j'ai fait observer qu'elle résulte, immédiatement, de l'identité :

$$x^4+2px^2+q^2=[x^2+x\sqrt{2(q-p)}+q][x^2-x\sqrt{2(q-p)}+q],$$

connue depuis 1848. (Voir les *Mélanges mathématiques*, tome II, p. 266.)

puis : $$2^{66}+1=(2^6+1)[2^{60}-2^{54}+2^{48}-2^{42}+2^{36}-2^{30}+2^{24}-2^{18}+2^{12}-2^6+1],$$

$$2^{66}+1=(2^{22}+1)[2^{44}-2^{22}+1],$$

$$2^{66}+1=(2^{33}+2^{17}+1)(2^{33}-2^{17}+1).$$

4. — *Remarques* I. — Chacun des trinômes

$$2^{33}+2^{17}+1,\quad 2^{33}-2^{17}+1$$

est la *somme de deux carrés;* etc. (*).

II. — *Le cube de* $3^{2k+1}=1$, *augmenté de* 1, *est décomposable en trois facteurs entiers;* etc. (*).

III. — Dans l'application précédente, les binômes 2^6+1, $2^{22}+1$, sont divisibles par $2^2+1=5$. Supprimant ce facteur commun, on a donc :

$$(2^4-2^2+1)(2^{60}-2^{54}+2^{48}-\ldots-2^6+1)$$
$$=(2^{20}-2^{18}+2^{16}-\ldots-2^2+1)(2^{44}-2^{22}+1)\ (^{**}).$$

II

SUR DES SOMMES DE TROIS CARRÉS

5. — On a, identiquement,

$$6[1+3(a^2+ab+b^2-a-b)]=(3a-1)^2+(3b-1)^2+(3a+3b-2)^2; \qquad (4)$$

ou, en posant :

$$A=3a-1,\qquad B=3b-1,\qquad C=A+B: \qquad (5)$$

$$6[1+3(a^2+ab+b^2-a-b)]=A^2+B^2+C^2. \qquad (6)$$

Cette relation peut être remplacée par une autre, plus simple.

En effet,

$$A^2+B^2+C^2=18a^2+18ab+18b^2-18a-18b+6$$
$$=3[6a^2+6ab+6b^2-6a-6b+2],$$

ou :

$$A^2+B^2+C^2=3[(a+2b-1)^2+(b+2a-1)^2+(a-b)^2]. \qquad (7)$$

(*) *Loc. cit.*, p. 267.
(**) Il est clair que l'on pourrait généraliser ces résultats.

Donc, si nous faisons :

$$A' = a + 2b - 1, \quad B' = b + 2a - 1, \quad C' = B' - A', \quad (8)$$

nous aurons, au lieu de l'identité (4) :

$$2[1 + 3(a^2 + ab + b^2 - a - b)] = A'^2 + B'^2 + C'^2. \quad (9)$$

Si a, b sont des quantités numériques, entières, le second membre de cette égalité (9) est, *ordinairement, la somme de trois carrés.*

6. — *Remarque.* — Il y a exception si $a = b$, à cause de $C' = 0$.

Il y a exception, encore, si $a = 1$, $b = 0$, ou inversement. On a donc ce théorème d'arithmétique :

Si a, b *sont des nombres entiers, inégaux* (et dont aucun n'est nul), *la quantité* $2[1 + 3(a^2 + ab + b^2 - a - b)]$ *est la somme de trois carrés.* En même temps, *le triple de cette somme de trois carrés est la somme de trois carrés* (*).

7. — *Application.* — Soient $a = 5$, $b = 7$. Alors

$$A = 14, \quad B = 20, \quad C = 34, \quad A' = 18, \quad B' = 16, \quad C' = -2;$$

puis : $$2[3(25 + 35 + 49 - 5 - 7) + 1] = 18^2 + 16^2 + 2^2,$$

$$6[3(25 + 35 + 49 - 5 - 7) + 1] = 14^2 + 20^2 + 34^2;$$

ou : $$2 \cdot 292 = 324 + 256 + 4,$$

$$6 \cdot 292 = 196 + 400 + 1156;$$

ce qui est exact.

8. — Dans l'égalité (6), supposons que a, b soient des nombres entiers quelconques (même nuls). Nous avons cet autre théorème :

Le sextuple du nombre entier

$$3(a^2 + ab + b^2 - a - b) + 1$$

est toujours la somme de trois carrés.

9. — *Remarque.* — Des égalités précédentes, on en conclut une autre, que l'on peut écrire ainsi :

$$3[x^2 + y^2 + (x + y)^2] = (x + 2y)^2 + (2x + y)^2 + (x - y)^2, \quad (10)$$

ou sous cette autre forme : (11)

$$[x^2 + y^2 + (x + y)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) = (x + 2y)^2 + (2x + y)^2 + (x - y)^2;$$

x, y étant des quantités quelconques (**).

(*) A cause des égalités (6), (9). Ce petit théorème paraîtra, peut-être, digne de remarque, si l'on se rappelle que *le produit d'une somme de trois carrés, par une somme de trois carrés, n'est pas toujours une somme de trois carrés.*

(**) Voici donc une suite de produits, égaux, chacun, à la somme de trois carrés, et dans lesquels les deux facteurs sont, chacun aussi, égaux à la somme de trois carrés.

10. — *Autre identité.* Dans le tome II des *Mélanges mathématiques*, j'ai démontré que, *si l'on suppose :*

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 1, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - x''(x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ y &= y' - y''(x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ z &= z' - z''(x'^2 + y'^2 + z'^2); \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

on a :

$$\begin{gathered}(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \\ [(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yz'')^2].\end{gathered} \tag{14}$$

Ainsi, dans ce cas, *le produit d'une somme de trois carrés, par une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés* (*).

11. — Au lieu de la démonstration donnée à l'endroit cité (laquelle laisse à désirer), on peut employer celle qui suit :

Soient, pour abréger :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \mathrm{A}, \tag{15}$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \mathrm{B}. \tag{16}$$

Les formules (13) deviennent :

$$x = x' - \mathrm{A}x'', \quad y = y' - \mathrm{A}y'', \quad z = z' - \mathrm{A}z''. \tag{17}$$

Il résulte, de celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} yz'' - zy'' = (y' - \mathrm{A}y'')z'' - (z' - \mathrm{A}z'')y'' = y'z'' - z'y'', \\ zx'' - xz'' = z'x'' - x'z'', \qquad xy'' - yx'' = x'y'' - y'x''. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

L'identité (14), qu'il s'agit d'établir, est donc, à cause des formules

(12), (13) : $$\mathrm{A} - 2\mathrm{A} + \mathrm{A}^2\mathrm{B} = \mathrm{A}\sum(y'z'' - z'y'')^2,$$

ou : $$-1 + \mathrm{AB} = \sum(y'z'' - z'y'')^2;$$

ou, par la condition (12) :

$$\begin{gathered}(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - x'x'' + y\,y'' + z'z'')^2 \\ = \sum(y'z'' - z'y'')^2,\end{gathered}$$

identité évidente et connue.

(*) Les trois binômes sont supposés différents de zéro.

12. — *Application.* — Soient :

$$x' = 4, \qquad y' = 5, \qquad z' = 6,$$
$$x = 13, \qquad y'' = -9, \qquad z'' = -1;$$

valeurs qui satisfont à la condition énoncée.

Il en résulte : $A = 16 + 25 + 36 = 77;$
puis :

$$x = 4 - 77 \,.\, 13 = -997, \quad y'z'' - z'y'' = -5 + 54 = 49,$$
$$y = 5 + 77 \,.\, 9 = 698, \quad z'x'' - x'z'' = 6 \,.\, 13 + 4 = 82,$$
$$z = 6 + 77 = 83, \quad x'y'' - y'x'' = -36 - 65 = -101.$$

On doit donc trouver :

$$(4^2 + 5^2 + 6^2)(49^2 + 82^2 + 101^2) = 977^2 + 698^2 + 83^2,$$

ou : $\quad 77(2401 + 6724 + 10201) = 994009 + 487204 - 6889,$

ou encore : $\quad 77 \times 19326 = 1\,488\,102,$

ou enfin : $\quad 11 \times 9663 = 106293;$

ce qui est exact.

III

SOLUTION D'UN PROBLÈME

13. — *Trouver un nombre impair*, N, *tel que :* 1° $\dfrac{N+1}{2}$ *soit la somme de quatre carrés;* 2° $\left(\dfrac{N+1}{2}\right)^2$ *soit la somme de trois carrés.*

Il suffit de prendre $N = 8a^2 + 5$, de manière que tous les facteurs premiers, de N, aient la forme $4\mu + 1$.

On a, identiquement,

$$8a^2 + 5 = (4a^2 + 3)^2 - (4a^2 + 2)^2. \tag{19}$$

Par suite, et d'après une propriété connue,

$$(4a^2 + 3)^2 = (4a^2 + 2)^2 - b^2 - c^2; \tag{20}$$

b^2 et c^2 étant les carrés dont la somme est N.

Cette égalité est la même chose que

$$\left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = (4a^2 + 2)^2 + b^2 + c^2. \tag{21}$$

D'un autre côté,

$$\frac{N+1}{2} = 4a^2 + 3 = (2a)^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2. \tag{22}$$

Le nombre N, choisi comme il a été dit, satisfait donc aux conditions données.

14.—*Applications.* — 1° $a = 1$; d'où $N = 13 = 2^2 + 3^2$. De là résultent :

$$\frac{N+1}{2} = 7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$$

$$\left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = 49 = 6^2 + 2^2 + 3^2.$$

2° $a = 12$; $N = 8 \cdot 144 + 5 = 1\,157 = 13 \times 89 = 14^2 + 31^2$
$= 34^2 + 1^2$;

puis :
$$\frac{N+1}{2} = 579 = 24^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$$

$$\left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = 578^2 + 14^2 + 31^2 = 578^2 + 34^2 + 1^2.$$

15. — *Remarques.* I. — Le nombre N, égal à $(4a^2 + 3)^2 - (4a^2 + 2)^2$, *est* donc *la différence de deux carrés consécutifs.*

II. — $N = 8a^2 + 5 = (2a)^2 + (2a)^2 + 2^2 + 1^2$, *est la somme de quatre carrés.*

III. — De $N = b^2 + c^2$, ou $N + 1 = b^2 + c^2 + 1$, on conclut, par un théorème connu (*), que $(N + 1)^2$ *est la somme de trois carrés.*

IV. — $N + 3$ est un multiple de 8. Donc, par un autre théorème connu (**), $N + 3$ *est la somme de huit carrés impairs.*

16. — THÉORÈME (***). — *Si* $8a^2 + 5$ *est un nombre premier,* p :

1° p, *somme de quatre carrés, est une somme de deux carrés;*

2° $\dfrac{p+1}{2}$ *est une somme de quatre carrés;*

3° $\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2$ *est une somme de trois carrés;*

4° $(p + 1)^2$ *est une somme de trois carrés;*

5° $p + 3$ *est la somme de huit carrés impairs.*

17. — *Exemple.* — Soit $a = 7$.

Alors $\quad 8a^2 + 5 = 8 \cdot 49 + 5 = 397 = p.$

On trouve :

$$p = 14^2 + 14^2 + 2^2 + 1^2 = 29^2 + 6^2;$$

$$\frac{p+1}{2} = 199 = 14^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2;$$

(*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 9. Du reste, cette propriété résulte de l'égalité (22).

(**) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 100.

(***) Résumé de ce qui précède.

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 = 39\,601 = 198^2 + 29^2 + 6^2;$$

$$(p+1)^2 = 158\,404 = 396^2 + 38^2 + 12^2;$$

$$p + 3 = 400 = 19^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2.$$

IV

RAPPEL D'ANCIENS THÉORÈMES.

18. — I. — *Si un nombre impair,* N, *est la somme de deux carrés,* $\frac{N-1}{4}$ *est la somme de deux nombres triangulaires ; et réciproquement. (Recherches ..., p. 94.)*

II. — *Le quadruple de tout nombre impair est la somme de quatre carrés impairs* (*). *(Recherches ...., p. 99.)*

III. — *Tout multiple de* 8 *est la somme de huit carrés impairs. (Recherches ...,* p. 100.)

IV. — *Le triple de tout carré impair est la somme de trois carrés; ayant la forme* $(6\mu \pm 1)^2$ *Recherches ...,* p. 108.) (**).

V. — *Le sextuple de tout carré impair est la somme de trois carrés. (Recherches ...,* p. 108.)

VI. — *Si un nombre premier,* p, *n'est pas la somme de deux carrés,* p^2 *égale la somme de trois carrés. (Recherches, ...,* p. 111.)

VII. — n *étant un nombre entier, autre que zéro,* $12n+1$ *est la somme de deux carrés* (***).

VIII. — *Si le carré d'un nombre entier est la somme de deux carrés consécutifs, ce nombre entier, égal à la somme de deux carrés, est égal, aussi, à la somme de trois carrés, dont deux, au moins, sont consécutifs* (****).

IX. — a, b, c. n *étant des nombres entiers, le nombre*

$$4a\left[(a+c)^{2n-1} + (a-c)^{2n-1}\right].$$

est la somme de quatre carrés, dont deux sont égaux, et dont les deux autres sont divisibles par b^2. *(Notes sur la Théorie ...,* p. 33.)

X. — *Toute puissance, entière et positive, d'une somme de trois carrés,*

(*) Cette proposition est énoncée, par Legendre, d'une manière un peu différente.

(**) On lit, dans la *Théorie des Nombres*, de Legendre (tome I, p. 393) : « *Tout nombre impair,* excepté seulement les nombres $8n+7$, *est la somme de trois carrés* »; mais cet énoncé suppose qu'une partie des carrés peut être nulle. Dans le petit Mémoire actuel, nous n'adoptons pas ce *sous-entendu.*

(***) Cet énoncé suppose que $12n+1$ *n'est pas carré. (Mélanges mathématiques,* t. III, p. 247.

(****) *Notes sur la théorie des fractions continues...* (p. 29). Ici, contrairement à la supposition faite précédemment, quelqu'un des nombres considérés peut être nul.

est la somme de trois carrés. (Mémoire sur certaines décompositions en carrés, p. 9.)

XI. — a, b *étant des nombres entiers ; soient*

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \beta = -a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La quantité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta},$$

dans laquelle n *est un nombre entier, supérieur à* 1, *est la somme de deux carrés. (Mémoire ...*, p. 21.)

XII. — x, y *étant des nombres entiers, premiers entre eux, le nombre*

$$x^{4n} - x^{4n-2}y^2 + x^{4n-4}y^4 - \ldots + y^{4n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés ($n > 1$) (*).

XIII. — *La quantité* $\alpha^{2n} + \beta^{2n}$ (**) *est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux. (Mémoire ...*, p. 30.)

XIV. — *La somme des puissances* 4n, *de deux nombres entiers, inégaux, est la somme de quatre carrés, dont deux sont égaux. (Mémoire...*, p. 31.)

XV. — *Chaque valeur entière de* y, *satisfaisant à l'équation*

$$(a^2 + 1)x^2 = y^2 - 1,$$

est la somme de trois carrés (***). *(Mémoire...*, p. 47).

XVI. — *Le nombre* (2, 4, 6 ... 2n)² *est la somme de* 4n *carrés impairs. (Mémoire...*, p. 61.)

XVII. — *Le produit de quatre nombres entiers, augmenté de deux unités, n'est jamais une puissance exacte. (Mathesis*, tome VI, p. 102) (****).

XVIII. — *Le triple de la somme de quatre carrés est toujours la somme de quatre carrés. (Mélanges math.*, tome III, p. 211.)

XIX. — *Le quintuple de la somme de quatre carrés est toujours la somme de quatre carrés. (Ibid.)*

XX. — *Si* p *est un nombre premier ayant la forme* $4\mu + 1$, *le produit d'une somme de quatre carrés, par* p, *est toujours la somme de quatre carrés* (*****).

V

NOMBRES TRIANGULAIRES ET NOMBRES PENTAGONAUX

19. — Théorème. — *Tout nombre triangulaire, supérieur à* 1, *s'il n'est pas pentagonal, est la somme de deux ou de plusieurs nombres pentagonaux.*

(*) *Mémoire sur certaines décompositions...*, p. 24.
(**) Voir ci-dessus.
(***) Il y a exception pour $y = 1$. Bien entendu, *a* est un *nombre entier*.
(****) J'ignore si le mot *consécutifs* a été oublié.
(*****) Le théorème XIX est complet dans celui-ci.

La formule (393) des *Recherches sur quelques produits indéfinis* est :

$$6(2n+1)^2 = (6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + 4(6z \mp 1)^2. \qquad (23)$$

On peut l'écrire ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3x^2 \mp x}{2} = \frac{3y^2 \mp y}{2} + 4\frac{3z^2 \mp z}{2}; \qquad (24)$$

et cette égalité démontre le théorème.

20. — *Remarques.* I. — Le nombre triangulaire donné résulte, tout au plus, de l'addition de *six* nombres pentagonaux.

II. — Quand il en est ainsi, *quatre* de ces nombres pentagonaux sont égaux entre eux (*).

21. — En cherchant les nombres qui peuvent être, à la fois, triangulaires et pentagonaux, on est conduit à l'équation

$$3u^2 - v^2 = 2. \qquad (25)$$

Si l'on fait :

$$\alpha = 2 + \sqrt{3}, \qquad \beta = 2 - \sqrt{3}, \qquad (26)$$

$$P_n = \alpha^n + \beta\alpha^{n-1} + \beta^2\alpha^{n-2} + \ldots + \beta^n, \qquad (27)$$

les solutions, en nombres entiers, de l'équation (25) sont données par les formules :

$$u_n = 3P_{n-2} - P_{n-3}, \qquad v_n = 5P_{n-2} - P_{n-3}; \qquad (28)$$

ou par celles-ci :

$$u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}, \qquad v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}, \qquad (29)$$

dans lesquelles :

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 3, \qquad v_1 = 1, \qquad v_2 = 5. \qquad (30)$$

Ainsi :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 11, \quad u_4 = 41, \quad u_5 = 153, \quad \ldots$$

22. — *Remarque.* — A cause de $x = \frac{u-1}{2}$, d'où $x + 1 = \frac{u+1}{2}$, les nombres *triangulo-pentagonaux* sont donnés par la formule :

$$T_n = \frac{(u_{n-1})(u_n+1)}{8}. \qquad (31)$$

Ces nombres sont donc :

$$T_1 = 0, \quad T_1 = 2, \quad T_2 = 15, \quad T_4 = 210, \quad T_5 = 2\,926, \quad \ldots$$

(*) La même remarque subsiste, si $\frac{n(n+1)}{2}$ est la somme de *quatre* ou *cinq* nombres pentagonaux.

VI

THÉORÈMES EMPIRIQUES (*)

23. — I. — *Le sextuple de tout nombre impair est la somme de trois carrés.*

II. — *Soit* N *ce sextuple. Si* $N-5$ *n'est pas carré,* N*, somme de trois carrés, est aussi la somme de quatre carrés.*

III. — n *étant un nombre entier, autre que zéro, la quantité* $6n^2+6n-3$ *est la somme de trois carrés.*

IV. — *Cette même quantité est, suivant la grandeur de* n : 1° *la somme de six carrés;* 2° *la somme de neuf carrés;* ...; n° *la somme de* $6n^2+6n-3$ *carrés.*

24. — *Applications du Théorème* I :

$$\begin{array}{l}
6\,.\,1 = 6 = 4+1+1\\
6\,.\,3 = 18 = 16+1+1\\
6\,.\,5 = 30 = 25+4+1\\
6\,.\,7 = 42 = 25+16+1\\
6\,.\,9 = 54 = 49+4+1\\
6\,.\,11 = 66 = 64+1+1\\
6\,.\,13 = 78 = 49+25+4\\
6\,.\,15 = 90 = 64+25+1\\
6\,.\,17 = 102 = 100+1+1\\
6\,.\,19 = 114 = 64+49+1\\
6\,.\,21 = 126 = 121+4+1\\
6\,.\,23 = 138 = 121+16+1\\
6\,.\,25 = 150 = 121+25+4\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
6\,.\,97 = 582 = 23^2+7^2+2^2
\end{array}$$

25. — *Applications du Théorème* II :

$$\begin{array}{l}
18 = 16+1+1 = 9+4+4+1\\
42 = 25+16+1 = 36+4+1+1\\
66 = 64+1+1 = 36+25+4+1\\
78 = 49+25+4 = 64+9+4+1\\
90 = 64+25+1 = 64+16+9+1\\
102 = 100+1+1 = 81+16+4+1\\
114 = 64+49+1 = 100+9+4+1\\
138 = 121+16+1 = 121+9+4+4\\
150 = 121+25+4 = 121+16+9+4
\end{array}$$

(*) Les démonstrations viendront plus tard ; du moins je l'espère.

26. — *Applications du Théorème* III (*) :

n	$6n^2 + 6n - 3$
1	$9 = 2^2 + 2^2 + 1^2$
2	$33 = 5^2 + 2^2 + 2^2$
3	$69 = 8^2 + 2^2 + 1^2$
4	$117 = 10^2 + 4^2 + 1^2$
5	$177 = 13^2 + 2^2 + 2^2$
6	$249 = 14^2 + 3^2 + 2^2$
7	$333 = 14^2 + 11^2 + 4^2$
8	$429 = 20^2 + 5^2 + 2^2$
9	$537 = 23^2 + 2^2 + 2^2$
10	$657 = 25^2 + 4^2 + 4^2$
11	$789 = 28^2 + 2^2 + 1^2$
12	$933 = 28^2 + 10^2 + 7^2$
13	$1\,089 = 32^2 + 10^2 + 7^2$
14	$1\,257 = 35^2 + 4^2 + 4^2$
15	$1\,437 = 37^2 + 8^2 + 2^2$
16	$1\,629 = 40^2 + 5^2 + 2^2$
17	$1\,833 = 40^2 + 13^2 + 8^2$
18	$2\,049 = 43^2 + 10^2 + 10^2$
19	$2\,277 = 47^2 + 8^2 + 2^2$
...	....
99	$59\,049 = 243^2 + 12^2 + 12^2$
100	$60\,517 = 244^2 + 31^2 + 10^2$

27. — *Applications du Théorème* IV :

$$9 = 2^2 + 2^2 + 1^2 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$33 = 5^2 + 2^2 + 2^2 = 16 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 = \\ 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 = \text{etc.}$$

$$69 = 8^2 + 2^2 + 1^2 = 64 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = \\ 6^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = \text{etc.}$$

$$117 = 10^2 + 4^2 + 1^2 = 9^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2 = \\ 8^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = \text{etc.}$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, tome IV, p. 553.