

Association française pour  
l'avancement des sciences. 12,  
Comptes-rendus de la 12<sup>e</sup>  
session Rouen 1883

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (012 ; 1883 ; Rouen). Association française pour l'avancement des sciences. 12, Comptes-rendus de la 12e session Rouen 1883. 1884.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [reutilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:reutilisationcommerciale@bnf.fr).

## M. CATALAN

Professeur à l'Université de Liège.

## NOTES D'ALGÈBRE ET D'ARITHMÉTIQUE

(RÉSUMÉ \*)

— Séance du 17 août 1888 —

## I

Sur l'équation  $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + w^2$ .Soient  $\alpha, \beta$  deux entiers premiers entre eux.Soient  $p, q$  deux autres entiers, satisfaisant à la condition

$$\beta q - \alpha p = 1.$$

Toutes les solutions de la proposée sont données, *sans répétition*, par les formules

$$x = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + w^2)p + \beta\theta,$$

$$y = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + w^2)q + \alpha\theta,$$

$$u = x + \alpha, \quad v = y - \beta;$$

 $\theta$  étant un entier arbitraire.

## II

Sur une série récurrente.

Soient  $a, b$  deux nombres entiers, satisfaisant à la condition

$$a^2 - 2b^2 = 1.$$

Supposons

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 2a;$$

et, à partir de  $n = 3$  :

$$P_n = 2aP_{n-1} - P_{n-2}.$$

(\*) Les démonstrations seront données autre part.

On trouve, par la méthode connue,

$$P_n = \frac{1}{2b\sqrt{2}} \left[ (a + b\sqrt{2})^n - (a - b\sqrt{2})^n \right].$$

Si l'on fait

$$Q_n = \frac{1}{2} \left[ (a + b\sqrt{2})^n + (a - b\sqrt{2})^n \right],$$

l'équation

$$2x^2 = y^2 - 1,$$

à laquelle satisfont  $x = b$ ,  $y = a$ , est vérifiée par

$$x = bP_n, \quad y = Q_n.$$

REMARQUES. I. — Dans la suite

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n, \dots$$

deux termes consécutifs sont premiers entre eux.

II. — Si  $n$  est pair,  $P_n$  est divisible par  $2a$ .

III. — On a

$$P_n = (2a)^{n-1} - C_{n-2,1} (2a)^{n-3} + C_{n-3,2} (2a)^{n-5} - \dots$$

IV. — Plus généralement,

$$\begin{aligned} & \frac{(a + \sqrt{a^2 + b^2})^n - (a - \sqrt{a^2 + b^2})^n}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= (2a)^{n-1} + C_{n-2,1} (2a)^{n-3} b^2 + C_{n-3,2} (2a)^{n-5} b^4 + \dots \end{aligned}$$

### III

*Sur une suite de nombres entiers.*

Dans la relation de récurrence :

$$P_n = 2aP_{n-1} - P_{n-2},$$

supposons  $a = 17$ , d'où  $b = 12$ . Nous aurons :

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, & P_2 &= 2.17, & P_3 &= 3.5.7.11, & P_4 &= 2^2.17.577, \\ P_5 &= 19.70.151, \dots & P_{10} &= 2.17.19.241.70.151.5.521. \end{aligned}$$

En général, pour toute valeur entière de  $a$ ,  $P_{kl}$  est divisible par  $P_k$  et par  $P_l$ . Cette propriété s'accorde avec des théorèmes dus à M. Edouard Lucas (\*).

(\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, tome II.

## IV

*Sur une décomposition en deux carrés.*

Il est évident que

$$(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16}) = P^2 + Q^2,$$

P, Q étant des polynômes entiers, homogènes (\*). Je trouve

$$\begin{aligned} P &= x^{15} - x^{12}y^3 - x^{10}y^5 - x^8y^7 - x^6y^9 - x^5y^{10} - x^3y^{12} + y^{15}, \\ Q &= x^{14}y + x^{13}y^2 + x^{11}y^4 - x^8y^7 + x^7y^8 - x^4y^{11} - x^2y^{13} - xy^{14}; \end{aligned}$$

et sept autres systèmes de valeurs, distincts de celui-ci.

## V

*Décomposition en deux et en trois carrés.*

THÉORÈME. — a, b étant des nombres entiers, soient

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \beta = -a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La quantité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta},$$

dans laquelle n est un nombre entier, supérieur à 1, est : 1° la somme de deux carrés ; 2° la somme de trois carrés.

COROLLAIRE. — x, y étant deux nombres entiers, premiers entre eux, et supérieurs à 1 ; le nombre

$$x^{4n} - x^{4n-2}y^2 + x^{4n-4}y^4 - \dots + y^{4n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés.

Relation avec un théorème de Gauss (\*\*). Ce théorème est exprimé par l'égalité

$$4 \frac{x^n - 1}{x - 1} = Y^2 - pZ^2,$$

p étant un nombre premier, de la forme  $4\mu + 1$ . Cela posé :

Si, dans le polynôme  $Y^2$ , on remplace x par  $-z^2$ , et que  $Y_1^2$  soit le résultat de la substitution ; ce nouveau polynôme est : 1° la somme de quatre carrés ; 2° la somme de cinq carrés.

(\*) Pour fixer les idées, et simplifier l'écriture, nous prenons seulement quatre facteurs binômes ; mais la méthode est générale.

(\*\*) Trouvée après le Congrès.

## VI

Sur l'équation  $Ax^2 = y^2 + 1$ .

Soit d'abord le cas particulier de

$$(a^2 + 1)x_n^2 = y_n^2 + 1,$$

$a$  étant un nombre entier, égal ou supérieur à 1. On a ce théorème :

*A partir de  $n = 3$ , chaque valeur de  $x_n$ , égale à la somme de deux carrés, est égale, aussi, à la somme de trois carrés.*

Soit maintenant l'équation générale :

$$Ax^2 = y^2 + 1,$$

dans laquelle

$$A = a^2 + b^2.$$

Soient

$$x = p, \quad y = q$$

les valeurs les plus simples qui la vérifient. On a

$$x_n = \frac{(p\sqrt{A} + q)^{2n-1} + (p\sqrt{A} - q)^{2n-1}}{2\sqrt{A}}.$$

Le second membre est divisible par  $p$ . Posant  $x = pz$ , on trouve, au lieu de la proposée,

$$(q^2 + 1)z^2 = y^2 + 1.$$

De cette remarque, peut-être nouvelle, résulte la *décomposition de  $x_n$  en une somme de quatre carrés* (\*).

(\*) Très probablement,  $x_n$  est aussi une *somme de trois carrés*. Jusqu'à présent, je n'ai pu démontrer cette proposition.