

Association française pour  
l'avancement des sciences. 9,  
Comptes-rendus de la 9<sup>e</sup>  
session Reims 1880

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (009 ; 1880 ; Reims, Marne). Association française pour l'avancement des sciences. 9, Comptes-rendus de la 9e session Reims 1880. 1881.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUEZ ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [reutilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:reutilisationcommerciale@bnf.fr).

M. E. CATALAN

Professeur d'analyse à l'Université de Liège

SUR UNE SUITE DE POLYNÔMES ENTIERS, ET SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES

— Séance du 13 août 1880 —

I

PRÉLIMINAIRES

1. *Sommation d'une série.* Soit

$$y_p = 1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \dots + n^p x^{n-1} + \dots \quad [1]$$

Si l'on multiplie les deux membres par  $(1-x)^{p+1}$ , on trouve

$$y_p (1-x)^{p+1} = 1 + a_p x + b_p x^2 + \dots + l_p x^{p-2} + x^{p-1}; \quad [2]$$

$a_p, b_p, \dots, l_p$  étant des *nombres entiers*. Soit

$$P_p = 1 + a_p x + b_p x^2 + \dots + l_p x^{p-2} + x^{p-1}. \quad [3]$$

Les premières valeurs de  $P_p$  sont

$$P_1 = 1, P_2 = 1 + x, P_3 = 1 + 4x + x^2, P_4 = 1 + 11x + 11x^2 + x^3, \dots$$

Dans chacun de ces polynômes, *les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux entre eux*. En outre, pour  $x = 1$ :

$$P_1 = 1, P_2 = 1.2, P_3 = 1.2.3, P_4 = 1.2.3.4, \dots$$

2. *Transformation de  $y_p$ .* On trouve, au moyen de formules connues,

$$y_p = \frac{1}{(1-x)^2} \Delta^0 (0^p) + \frac{x}{(1-x)^3} \Delta^1 (0^p) + \dots + \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{p+1}} \Delta^p (0^p). \quad [4]$$

3. *Autres expressions de  $y_p$ .* Si l'on fait  $\frac{x}{1-x} = t$ , et

$$T_p = \Delta^0 (0^p) + t \Delta^1 (0^p) + \dots + t^{p-1} \Delta^p (0^p), \quad [7]$$

on a

$$P_p = \frac{T_p}{(1+t)^{p-1}}, \quad [9]$$

puis

$$y_p = (1+t)^2 T_p. \quad [12]$$

5. Relation entre  $P_p$  et  $P_{p+1}$ . Je trouve

$$P_{p+1} = (px+1)P_p + (x-x^2) \frac{dP_p}{dx}. \quad [15]$$

8. Relation entre  $T_p$  et  $T_{p+1}$  :

$$T_{p+1} = [(t+t^2) T_p]',$$

## II

### FONCTIONS GÉNÉRATRICES — INTÉGRALES DÉFINIES

15. Fonction génératrice de  $y_p$ . Soit

$$\frac{1}{1-e^{\alpha}x} = 1 + e^{\alpha}x + e^{2\alpha}x^2 + e^{3\alpha}x^3 + \dots \quad [23]$$

Si l'on ordonne le second membre suivant les puissances de  $\alpha$ , on obtient

$$\frac{1}{1-e^{\alpha}x} = y_0 + \alpha y_1 \frac{x}{1} + \alpha^2 y_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \alpha^p y_p \frac{x^p}{1 \dots p} + \dots, \quad [24]$$

ou

$$\frac{1}{1-e^{\alpha}x} = \frac{1}{1-x} + \alpha \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}, \quad [25]$$

ou encore

$$\frac{e^{\alpha}-1}{1-e^{\alpha}x} = \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \quad [26]$$

16. Fonction génératrice de  $T_p$ . La dernière égalité équivaut à

$$\frac{e^{\alpha}-1}{1-t(e^{\alpha}-1)} = \sum_1^{\infty} T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}. \quad [27]$$

17. Transformation de la formule [26].

Si l'on pose

$$\alpha = \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi,$$

on conclut, de l'égalité [26] :

$$\frac{-e^{-\cos \varphi} + (1+x) \cos(\sin \varphi) - x e^{-\cos \varphi}}{e^{-\cos \varphi} - 2x \cos(\sin \varphi) + x e^{-\cos \varphi}} = \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} \frac{\cos p \varphi}{\Gamma(p+1)} \quad [30]$$

$$\frac{\sin(\sin \varphi)}{e^{-\cos \varphi} - 2x \cos(\sin \varphi) + x e^{-\cos \varphi}} = \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} \frac{\sin p \varphi}{\Gamma(p+1)} \quad [31]$$

18. *Intégrales définies.* Des deux dernières relations, on déduit, par la méthode connue :

$$\frac{P_p}{(1-x)^p} = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{-e^{-\cos\varphi} + (1+x) \cos(\sin\varphi) - xe^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi} - 2x \cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} \cos p\varphi d\varphi, \quad [32]$$

$$\frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} = y_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi} - 2x \cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} \sin p\varphi d\varphi. \quad [33]$$

19. *Corollaires.*

I.  $\int_0^\pi e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi) \sin p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad [35]$

II.  $\int_0^\pi e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi) \cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad [36]$

III.  $\int_0^\pi (e^{\cos\varphi} + e^{-\cos\varphi}) \sin(\sin\varphi) \sin p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{\Gamma(p+1)} \cdot (p \text{ impair}) \quad [37]$

$\int_0^\pi (e^{\cos\varphi} + e^{-\cos\varphi}) \cos(\sin\varphi) \cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{\Gamma(p+1)} \cdot (p \text{ pair}) \quad [38]$

29. *Autre intégrale définie.* De la formule [33], on déduit

$$n^p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi e^{n \cos\varphi} \sin(n \sin\varphi) \sin p\varphi d\varphi. \quad [39]$$

IV

SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES NATURELS

30. On a, par les égalités (1), (2) :

$$1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \dots + n^p x^{n-1} + \dots = [1 + a_p x + b_p x^2 + \dots + b_p x^{p-3} + a_p x^{p-2} + x^{p-1}] \times [1 + C_{p+1,1} x + C_{p+2,2} x^2 + \dots].$$

Si l'on effectue le produit, qu'on l'identifie avec le premier membre, que l'on change  $n$  en  $n-1, n-2, \dots, 1$ , etc., on trouve

$$S_p = C_{p+n, p+1} + a_p C_{p+n-1, p+1} + b_p C_{p+n-2, p+1} + \dots + C_{n, p+1}; \quad [41]$$

puis

$$S_p = \frac{1}{\Gamma(p+2)} \frac{d^{p+1} [x^{n-1} P_p]}{dx^{p+1}} \text{ pour } (x=1) \quad [42]$$

34. Valeurs des coefficients  $a_p, b_p, c_p, \dots$ . D'après l'une des expressions de  $P_p$  :

$$\left. \begin{aligned} a_p &= -\frac{p-1}{1} \Delta(O^p) + \Delta^2(O^p), \\ b_p &= \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \Delta(O^p) - \frac{p-2}{1} \Delta^2(O^p) + \Delta^3(O^p), \\ c_p &= -\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3} \Delta(O^p) + \frac{(p-2)(p-3)}{1.2} \Delta^2(O^p) \\ &\quad - \frac{p-3}{1} \Delta^3(O^p) + \Delta^4(O^p), \end{aligned} \right\} \quad [45]$$

35. Autre expression de  $S_p$ . Il résulte, de la formule [39],

$$S_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{e^{(n+1)\cos\varphi} \sin(n\sin\varphi) - e^{n\cos\varphi} \sin(n+1\sin\varphi) + \sin(\sin\varphi)}{e^{\cos\varphi} - 2\cos(\sin\varphi) + e^{\cos\varphi}} \sin p\varphi d\varphi. \quad [46]$$

38. Expression de  $\Delta^n(O^p)$ . Si l'on fait

$$e^{\cos\varphi} + \sqrt{-1} \sin\varphi = \rho (\cos\theta + \sqrt{-1} \sin\theta),$$

on trouve, au moyen de la formule (39),

$$\Delta_n(O^p) = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \rho^n \sin n\theta \sin p\varphi d\varphi.$$

V

APPLICATION AUX NOMBRES DE BERNOULLI

42. Expressions de  $B_{p-1}$ . En partant de la formule [41], et en adoptant la définition de Lacroix, j'obtiens :

$$B_{p-1} = \int_{-\infty}^0 \frac{P_p x dx}{(1-x)^{p+2}}, \quad [54]$$

puis

$$B_{p-1} = \int_{-1}^0 T_p t dt, \tag{55}$$

et enfin

$$B_{p-1} = -\frac{1}{2} \Delta (0^p) + \frac{1}{3} \Delta^2 (0^p) - \frac{1}{4} \Delta^3 (0^p) + \dots + \frac{1}{p+1} \Delta^p (0^p) \tag{57}$$

46. *Autre expression* de  $B_{p-1}$ . En combinant les formules [33] [34], je trouve

$$-B_{p-1} = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^{\pi-\cos\varphi} \frac{e^{-\cos\varphi} \sin\varphi + \sin(\sin\varphi-\varphi)}{e^{\cos\varphi} - 2\cos(\sin\varphi) + e^{-\cos\varphi}} \sin p\varphi d\varphi \tag{60}$$

## VI

### PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES $T_p$

48. *Première propriété* : 1° L'équation  $T_p = 0$  a toutes ses racines réelles ; 2° ces racines, comprises entre  $-1$  et  $0$ , sont séparées par les racines de  $T_{p-1} = 0$ .

49. *Deuxième propriété*. — Si  $p$  est pair,  $T_p, T''_p, T^{(iv)}_p, \dots$  sont divisibles par  $2t+1$ ; et, si  $p$  est impair,  $T'_p, T'''_p, \dots$  sont divisibles par ce binôme.

50. *Troisième propriété*. Pour  $t = -1, T_p = \mp 1$ , selon que  $p$  est pair ou impair.

52. *Quatrième propriété*. —  $k, -1$  étant deux racines quelconques de  $T_{p-1} = 0$ , on a

$$\int_{-k}^l T_p dt = 0.$$

53. *Cinquième propriété*. Les racines de l'équation  $T_p = 0$  sont conjuguées deux à deux, de manière que leur somme égale  $-1$ .

## VII

### RELATION SIMPLE ENTRE DEUX SÉRIES REMARQUABLES

54. D'après un théorème d'Abel, si l'on fait

$$u = \frac{1}{1 - e^x x},$$

on a, identiquement,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 3 \frac{du}{dx} + 2u = 2u^3 \quad [63]$$

Or, la formule [25] peut être écrite ainsi :

$$u = 1 + t + (t + t^2) \left[ T_1 \frac{\alpha}{1} + T_2 \frac{\alpha^2}{1.2} + T_3 \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \dots \right].$$

Par conséquent, si l'on fait

$$2T_p + 3T_{p+1} + T_{p+2} = 2(1+t)^2 H_p (*), \quad [67]$$

on trouve

$$1 + t \sum_1^\infty H_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} = \left[ 1 + t \sum_1^\infty T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \right]^3. \quad [68]$$

Ainsi, le cube de la série

$$1 + t \frac{\alpha}{1} + t(1+2t) \frac{\alpha^2}{1.2} + t(1+6t+6t^2) \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \dots$$

est une série plus simple que la première

## M. Edouard COLLIGNON

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées

### SUR LES POLYGONES INSCRIPTIBLES

— Séance du 13 août 1880. —

#### §. I<sup>er</sup>

De tous les polygones qu'on peut construire dans un plan avec des côtés donnés, le plus grand est celui qui est inscriptible dans un cercle. Cette proposition est bien connue, et peut être démontrée de plusieurs manières. La démonstration que nous allons en donner offre un nouvel exemple de l'application de la statique à la géométrie.

Avec les côtés donnés formons un polygone articulé, à l'intérieur duquel nous exercerons une pression  $p$  arbitraire, uniformément

(\*) Dans le Mémoire, je démontre que le polynôme  $H_p$  a ses coefficients entiers et positifs.