Association française pour l'avancement des sciences. 9, Comptes-rendus de la 9e session Reims 1880

M. E. CATALAN

Professeur d'analyse à l'Université de Liége

SUR UNE SUITE DE POLYNOMES ENTIERS, ET SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES

— Séance du 13 août 1880 —

I

PRÉLIMINAIRES

1. *Sommation d'une série.* Soit

$$y_p = 1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \ldots + n^p x^{n-1} + \ldots \qquad [1]$$

Si l'on multiplie les deux membres par $(1-x)^{p+1}$, on trouve

$$y_p (1-x)^{p+1} = 1 + a_p x + b_p x^2 + \ldots + l_p x^{p-2} + x^{p-1}; \qquad [2]$$

a_p, b_p, ... l_p étant des *nombres entiers*. Soit

$$P_p = 1 + a_p x + b_p x^2 + \ldots \quad + l_p x^{p-2} + x^{p-1}. \qquad [3]$$

Les premières valeurs de P_p sont

$$P_1 = 1 \,,\; P_2 = 1 + x \,,\; P_3 = 1 + 4x + x^2 \,,\; P_4 = 1 + 11x + 11x^2 + x^3 , \;\ldots..$$

Dans chacun de ces polynômes, *les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux entre eux.* En outre, pour $x = 1$:

$$P_1 = 1 \,,\; P_2 = 1.2 \,,\; P_3 = 1.2.3 \,,\; P_4 = 1.2.3.4 \,,\; \ldots$$

2. *Transformation* de y_p. On trouve, au moyen de formules connues,

$$y_p = \frac{1}{(1-x)^2}\Delta(o^p) + \frac{x}{(1-x)^3}\Delta^2(o^p) + \ldots + \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{p+1}}\Delta^p(o^p) \qquad [4]$$

3. *Autres expressions* de y_p. Si l'on fait $\dfrac{x}{1-x} = t$, et

$$T_p = \Delta(o^p) + t\,\Delta^2(o^p) + \ldots + t^{p-1}\Delta^p(o^p) \,, \qquad [7]$$

on a

$$P_p = \frac{T_p}{(1+t)^{p-1}}, \qquad [9]$$

puis

$$y_p = (1+t)^2\, T_p . \qquad [12]$$

. . . .

5. *Relation entre* P_p et P_{p+1}. Je trouve

$$P_{p+1} = (px+1) P_p + (x - x^2) \frac{dP_p}{dx}. \qquad [15]$$

. . . .

8. *Relation entre* T_p et T_{p+1} :

$$T_{p+1} = \left[(t + t^2) T_p \right]',$$

. . . .

II

FONCTIONS GÉNÉRATRICES — INTÉGRALES DÉFINIES

15. *Fonction génératrice* de y_p'. Soit

$$\frac{1}{1 - e^{\alpha} x} = 1 + e^{\alpha} x + e^{2\alpha} x^2 + e^{3\alpha} x^3 + \dots \qquad [23]$$

Si l'on ordonne le second membre suivant les puissances de α, on obtient

$$\frac{1}{1 - e^{\alpha} x} = y_0 + x y_1 \frac{\alpha}{1} + x y_2 \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots + y x_p \frac{\alpha^p}{1 \dots p} + \dots, \qquad [24]$$

ou

$$\frac{1}{1 - e^{\alpha} x} = \frac{1}{1 - x} + x \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}, \qquad [25]$$

ou encore

$$\frac{e^{\alpha} - 1}{1 - e^{\alpha} x} = \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1 - x)^p} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \qquad [26]$$

16. *Fonction génératrice* de T_p. La dernière égalité équivaut à

$$\frac{e^{\alpha} - 1}{1 - t(e^{\alpha} - 1)} = \sum_1^{\infty} T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}. \qquad [27]$$

17. *Transformation de la formule* [26].

Si l'on pose

$$\alpha = \cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi,$$

on conclut, de l'égalité [26] :

$$\frac{-e^{-\cos\varphi} + (1 + x)\cos(\sin\varphi) - x e^{-\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi} - 2x \cos(\sin\varphi) + x e^{-\cos\varphi}} = \sum_1^{\infty} \frac{P^p}{(1-x)^p} \frac{\operatorname{Cos} p\varphi}{\Gamma(p+1)} \qquad [30]$$

$$\frac{\operatorname{Sin}(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi} - 2x \cos(\sin\varphi) + x^2 e^{-\cos\varphi}} = \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} \frac{\operatorname{Sin} p\varphi}{\Gamma(p+1)} \qquad [31]$$

18. *Intégrales définies.* Des deux dernières relations, on déduit, par la méthode connue :

$$\frac{P_p}{(1-x)^p} =$$

$$\frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} \frac{-e^{-\cos\varphi} + (1+x)\cos(\sin\varphi) - xe^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} \cos p\varphi d\varphi, \quad [32]$$

$$\frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} = y_p =$$

$$\frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} \sin p\varphi d\varphi. \quad [33]$$

19. *Corollaires.*

I. $$\int_0^{\pi} e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad [35]$$

II. $$\int_0^{\pi} e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi)\cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad [36]$$

III. $$\int_0^{\pi} \left(e^{\cos\varphi} + e^{-\cos\varphi}\right)\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{\Gamma(p+1)}. \ (p \textit{ impair}) \quad [37]$$

$$\int_0^{\pi} \left(e^{\cos\varphi} + e^{-\cos\varphi}\right)\cos(\sin\varphi)\cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{\Gamma(p+1)}. \ (p \textit{ pair}) \quad [38]$$

. . . .

29. *Autre intégrale définie.* De la formule [33], on déduit

$$n^p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} e^{n\cos\varphi}\sin(n\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi. \quad [39]$$

IV

SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES NATURELS

30. On a, par les égalités (1), (2) :

$$1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \ldots + n^p x^{n-1} + \ldots =$$
$$\left[1 + a_p x + b_p x^2 + \ldots + b_p x^{p-3} + a_p x^{p-2} + x^{p-1}\right]$$
$$\times \left[1 + C_{p+1,1} x + C_{p+2,2} x^2 + \ldots\right].$$

Si l'on effectue le produit, qu'on l'identifie avec le premier membre, que l'on change n en $n-1, n-2, \ldots 1$, etc., on trouve

$$S_p = C_{p+n,\,p+1} + a_p C_{p+n-1,\,p+1} + b_p C_{p+n-2,\,p+1} + \ldots + C_{np+1,\,p+1}\,; \quad [41]$$

puis

$$S_p = \frac{1}{\Gamma(p+2)} \frac{d^{p+1}[x^{n-1} P_p]}{d_x{}^{p+1}} \text{ pour } (x=1) \quad [42]$$

. . . .

34. *Valeurs des coefficients* a_p, b_p, c_p, ... D'après l'une des expressions de P_p :

$$a_p = -\frac{p-1}{1}\Delta(o^p) + \Delta^2(o^p),$$

$$\left.\begin{aligned} b_p &= \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\Delta(o^p) - \frac{p-2}{1}\Delta^2(o^p) + \Delta^3(o^p), \\ c_p &= -\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\ 2.\ 3}\Delta(o^p) + \frac{(p-2)(p-3)}{1.\ 2}\Delta^2(o^p) \\ &\quad - \frac{p-3}{1}\Delta^3(o^p) + \Delta^4(o^p), \end{aligned}\right\} \quad [45]$$

. . . .

35. *Autre expression* de S_p. Il résulte, de la formule [39],

$$S_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)$$

$$\int^{\pi} \frac{e^{(n+1)\cos\varphi}\sin(n\sin\varphi) - e^{n\cos\varphi}\sin(\overline{n+1}\sin\varphi) + \sin(\sin\varphi)}{e^{\cos\varphi} - 2\cos(\sin\varphi) + e^{\cos\varphi}} \sin p\varphi\, d\varphi. \quad [46]$$

. . . .

38. *Expression de* $\Delta^n(o^p)$. Si l'on fait

$$e^{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

on trouve, au moyen de la formule (39),

$$\Delta_n(o^p) = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} 5^n \sin n\theta \sin p\varphi\, d\varphi.$$

. . . .

V

APPLICATION AUX NOMBRES DE BERNOULLI

42. *Expressions* de B_{p-1}. En partant de la formule [41], et en adoptant la définition de Lacroix, j'obtiens,

$$B_{p-1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{P_p\, x\, dx}{(1-x)^{p+2}}, \quad [54]$$

puis

$$B_{p-1} = \int_{-1}^{0} T_p\, t dt, \qquad [55]$$

et enfin

$$B_{p-1} = -\frac{1}{2}\Delta(o^p) + \frac{1}{3}\Delta^2(o^p) - \frac{1}{4}\Delta^3(o^p) + \ldots + \frac{1}{p+1}\Delta^p(o^p) \qquad [57]$$

. . . .

46. *Autre expression* de B_{p-1}. En combinant les formules [33] [34], je trouve

$$-B_{p-1} = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} \frac{e^{-\cos\varphi}\sin\varphi + \sin(\sin\varphi - \varphi)}{e^{\cos\varphi} - 2\cos(\sin\varphi) + e^{-\cos\varphi}} \sin p\varphi\, d\varphi \qquad [60]$$

. . . .

VI

PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES T_p

48. *Première propriété* : 1° *L'équation* $T_p = 0$ *a toutes ses racines réelles ;* 2° *ces racines, comprises entre* -1 *et* 0, *sont séparées par les racines de* $T_{p-1} = 0$.

49. *Deuxième propriété. — Si* p *est pair,* $T_p, T''_p, T^{IV}_p, \ldots$ *sont divisibles par* $2t+1$; *et, si* p *est impair,* $T'_p, T'''_p \ldots$ *sont divisibles par ce binôme.*

50. *Troisième propriété. Pour* $t = -1$, $T_p = \mp 1$, *selon que* p *est pair ou impair.*

. . . .

52 *Quatrième propriété.* — k, — l *étant deux racines quelconques de* $T_{p-1} = 0$, *on a*

$$\int_{-k}^{l} T_p\, dt = 0.$$

53. *Cinquième propriété. Les racines de l'équation* $T_p = 0$ *sont conjuguées deux à deux, de manière que leur somme égale* -1.

VII

RELATION SIMPLE ENTRE DEUX SÉRIES REMARQUABLES

54. D'après un théorème d'Abel, si l'on fait

$$u = \frac{1}{1 - e^{\alpha} x},$$

on a, identiquement,

$$\frac{d^2u}{dx^2}+3\frac{du}{dx}+2u=2u^3 \qquad [63]$$

Or, la formule [25] peut être écrite ainsi :

$$u=1+t+(t+t^2)\left[T_1\frac{\alpha}{1}+T_2\frac{\alpha^2}{1.2}+T_3\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\dots\right].$$

Par conséquent, si l'on fait

$$2T_p+3T_{p+1}+T_{p+2}=2(1+t)^2H_p(^*), \qquad [67]$$

on trouve

$$1+t\sum_1^\infty H_p\frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}=\left[1+t\sum_1^\infty T_p\frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}\right]^3. \qquad [68]$$

Ainsi, le cube de la série

$$1+t\frac{\alpha}{1}+t(1+2t)\frac{\alpha^2}{1.2}+t(1+6t+6t^2)\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\dots$$

est une série plus simple que la première

M. Edouard COLLIGNON

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées

SUR LES POLYGONES INSCRIPTIBLES

— *Séance du 13 août 1880.* —

§. I[er]

De tous les polygones qu'on peut construire dans un plan avec des côtés donnés, le plus grand est celui qui est inscriptible dans un cercle. Cette proposition est bien connue, et peut être démontrée de plusieurs manières. La démonstration que nous allons en donner offre un nouvel exemple de l'application de la statique à la géométrie.

Avec les côtés donnés formons un polygone articulé, à l'intérieur duquel nous exercerons une pression p arbitraire, uniformément

(*) Dans le Mémoire, je démontre que *le polynôme* H_p *a ses coefficients entiers et positifs.*