

Association française pour
l'avancement des sciences. 6,
Comptes-rendus de la 6e
session Le Havre 1877

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (006 ; 1877 ; Le Havre, Seine-Maritime). Association française pour l'avancement des sciences. 6, Comptes-rendus de la 6e session Le Havre 1877. 1878.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

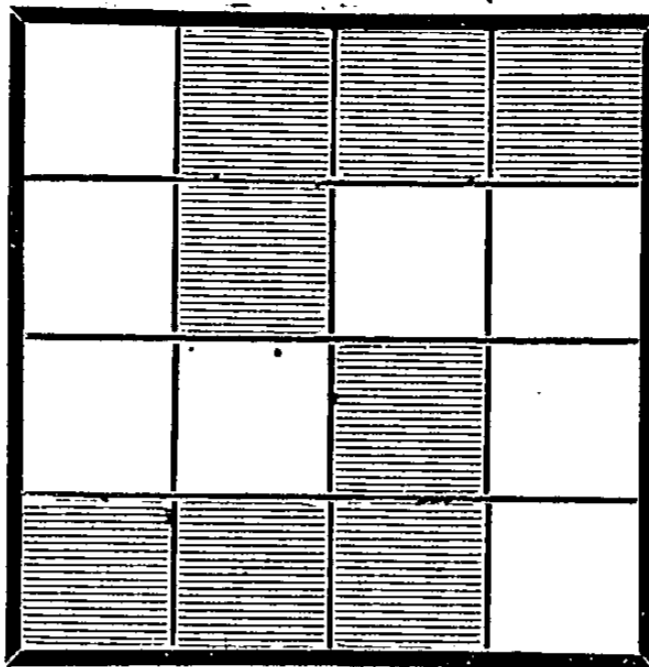
4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

que, pour deux lignes ou deux colonnes quelconques, le nombre de variations de couleurs est toujours égal au nombre des permanences. Voici, par exemple, l'échiquier anallagmatique de seize cases :



En remplaçant les cases blanches par le signe $+$, et les cases noires par le signe $-$, on a ainsi pour le produit des sommes :

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ de quatre carrés, la décomposition formée par la somme des quatre carrés :

$$\begin{aligned} & (+ap - bq - cr - ds)^2, \\ & (+as - br + cq + dp)^2, \\ & (+aq + bp - cs + dr)^2, \\ & (-ar - bs - cp + dq)^2. \end{aligned}$$

Nous engageons le lecteur à rechercher les figures des échiquiers anallagmatiques de 64 cases et de 256 cases. Il existe un *pavage anallagmatique* de ce genre, en marbre blanc et rose, dans l'une des cours d'un établissement public de Londres.

M. CATALAN

Professeur d'Analyse à l'Université de Liège.

SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE
DE PREMIÈRE ESPÈCE.

— Séance du 29 août 1877. —

I.

Soit

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (1)$$

Prenons la formule de transformation :

$$tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} tg\theta. \tag{2}$$

Il en résulte

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{[1 - (1-b)\cos^2\theta][1 - (1-b)\sin^2\theta]}}. \tag{3}$$

On a, par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} [1 - (1-b)\cos^2\theta]^{-\frac{1}{2}} &= \sum_0^\infty \frac{\Gamma(2n+1)}{4^n [\Gamma(n+1)]^2} (1-b)^n \cos^{2n}\theta, \\ [1 - (1-b)\sin^2\theta]^{-\frac{1}{2}} &= \sum_0^\infty \frac{\Gamma(2p+1)}{4^p [\Gamma(p+1)]^2} (1-b)^p \sin^{2p}\theta. \end{aligned}$$

Au moyen de ces valeurs, et d'une transformation connue, on change la formule (3) en

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty P_s \left(\frac{1-b}{16}\right)^s, \tag{4}$$

pourvu que l'on suppose $n + p = s$, et

$$P_s = \sum_{n=0}^{n=s} \frac{[(n+1)(n+2)\dots 2n \cdot (p+1)(p+2)\dots 2p]^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}. \tag{5}$$

On verra, tout à l'heure, que P_s est un nombre entier (*).

II.

Le développement de $F_1(c)$, ordonné suivant les puissances du module, est

$$\frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 c^6 + \dots \right].$$

Si l'on fait $1 - b = 2x$, on a

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty [C_{2n,n}]^2 \left[\frac{x(1-x)}{4}\right]^n,$$

ou

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty Q_s x^s, \tag{6}$$

(*) Cette propriété résulte aussi du théorème suivant:

$$\frac{(a+1)(a+2)\dots 2a \cdot (b+1)(b+2)\dots 2b}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a+b)} = \text{entier},$$

si a et b sont des nombres entiers. (Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques. — Seconde note, p. 44, 1872).

en posant

$$Q_s = \sum \left[C_{2s-2p, s-p} \right]^2 C_{s-p, p(-4)}^p \left(\frac{1}{4} \right)^{s-p} \quad (7) \quad \left(0 \leq p \leq \frac{s}{2} \right).$$

On a $\frac{1-b}{16} = \frac{x}{8}$. Dans le développement (6), le coefficient de $\left(\frac{1-b}{16} \right)^s$ est donc

$$P_s = Q_s 8^s = 2^s \sum \left[C_{2s-2p, s-p} \right]^2 C_{s-p, p(-4)}^p. \quad (7)$$

Cette troisième valeur de P_s doit être identique avec la première. Ainsi P_s est un nombre entier, divisible par 2^s .

Donc, si l'on fait

$$T_s = \sum \left[C_{2s-2p, s-p} \right]^2 C_{s-p, p(-4)}^p, \quad (8)$$

on a, finalement,

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty T_s \left(\frac{1-b}{32} \right)^s. \quad (9)$$

III.

De la relation (9), on conclut, en multipliant par $-cdc = +bdb$, puis intégrant :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \left[\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty \frac{T_s}{32^s} \int_1^0 (1-b)^s b db.$$

Le premier membre a pour valeur

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi - 1}{\sin^2 \varphi} d\varphi &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + \cos \varphi} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi} = \\ &= - \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1. \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \int_1^0 (1-b)^s b db &= \int_1^0 (1-b)^s db - \int_1^0 (1-b)^{s+1} db = \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{2}{\pi} = \sum_0^{\infty} \frac{T_s}{32^s (s+1)(s+2)}$$

IV.

Reprenons la formule

$$tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} tg\theta, \tag{2}$$

plus simple que celle de Lagrange :

$$tg(\varphi_1 - \varphi) = b tg\varphi.$$

En l'écrivant ainsi :

$$tg\varphi_1 = \sqrt{b} tg\varphi, \tag{10}$$

et en supposant

$$c_1 = \frac{1-b}{1+b}, \tag{11}$$

valeur d'où résulte, comme l'on sait,

$$b_1 = \frac{2\sqrt{b}}{1+b}, \tag{12}$$

on trouve aisément

$$F_1(c_1) = \frac{\sqrt{b}}{b_1} F_1(c), \tag{13}$$

puis

$$F_1(c_n) = \frac{\sqrt{b}}{b_n} \sqrt{b_1 \cdot b_2 \dots b_{n-1}} F_1(c). \tag{14}$$

Quand n augmente indéfiniment, le premier membre tend vers $\frac{\pi}{2}$. La limite de b_n est 1. Donc

$$\left[F_1(c) \right]^2 = \frac{\pi^2}{4b} \lim(b_1 b_2 b_3 \dots). \tag{15}$$

V.

Soit $b = \frac{p}{q}$. La formule (12) devient $b_1 = \frac{\sqrt{pq}}{\frac{1}{2}(p+q)}$. Faisons, comme Gauss :

$$p_1 = \sqrt{pq}, q_1 = \frac{1}{2}(p+q), p_2 = \sqrt{p_1 q_1}, q_2 = \frac{1}{2}(p_1 + q_1), \dots \tag{16}$$

De là résulte, au lieu de l'équation (15),

$$4 \frac{p}{q} \left[\frac{F_1(c)}{\pi} \right]^2 = \lim \left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \dots \right). \tag{17}$$

VI.

Les nombres p_n, q_n , toujours compris entre p et q , tendent, évidemment, vers une limite commune λ . Pour déterminer cette limite, d'abord trouvée par Gauss, écrivons ainsi les équations (16), de rang impair :

$$p_1^2 = pq, p_2^2 = p_1 q_1, \dots, p_n^2 = p_{n-1} \cdot q_{n-1}.$$

Il résulte, de celles-ci et de la relation (17),

$$\lambda = \frac{q}{2} \frac{\pi}{F_1(c)}. \quad (18)$$

VII.

Les valeurs de q_1, q_2, \dots, q_n (16) donnent, par un calcul aussi simple que le premier,

$$q_n = \frac{1}{2} [p + q - q_1 + p_1 - q_2 + p_2 - \dots - q_{n-1} + p_{n-1}] \quad (*)$$

La limite du premier membre est λ ; donc

$$\lambda = \frac{1}{2} [p + q - q_1 + p_1 - q_2 + p_2 - \dots - q_{n-1} + p_{n-1} - \dots] \quad (19)$$

Ainsi la quantité λ , donnée par la formule (18), est la limite commune : 1° de p_n ; 2° de q_n ; 3° de $\sqrt{pq} \sqrt{\frac{q_1}{p_1}} \sqrt{\frac{q_2}{p_2}} \sqrt{\frac{q_3}{p_3}} \dots$; 4° de $\frac{1}{2} [p + q - q_1 + p_1 - q_2 + p_2 - \dots]$.

VIII.

Des équations (18), (19), on conclut

$$\frac{\pi}{F_1(c)} = \frac{1}{q} [p + q - q_1 + p_1 - q_2 + p_2 - \dots].$$

La fonction $\frac{\pi}{F_1(c)}$, déjà décomposée en un produit indéfini (17), est donc développée en série. En outre, les numérateurs et les dénominateurs de ce produit

$$2 \sqrt{\frac{p}{q}} \sqrt{\frac{p_1}{q_1}} \sqrt{\frac{p_2}{q_2}} \dots,$$

(*) Par ce qui précède, le nombre des termes est pair. Si on le supposait, à tort, alternativement pair et impair, la série serait indéterminée.

ou plutôt leurs carrés, sont les termes mêmes de la série; ce qui est assez remarquable.

IX.

Les relations (16) ont une grande analogie avec celles que l'on rencontre dans le calcul de π , par la *méthode des isopérimètres*; savoir :

$$r_1 = \frac{1}{2}(r + R), R_1 = \sqrt{Rr_1}, r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + R_1), R_2 = \sqrt{R_1 r_2}, \dots$$

Aussi, ces dernières formules conduisent aux deux expressions suivantes de $\frac{1}{\pi}$, dont la première, au moins, nous paraît nouvelle :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} [r + R - r_1 + R_1 - r_2 + R_2 - \dots],$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{R}{2} \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_3}{R_3} \dots$$

M. A. DUVERGIER

Ingénieur constructeur à Lyon.

PERFECTIONNEMENT A L'INDICATEUR RICHARD.

— Séance du 29 août 1877. —

Parmi les divers genres d'appareils construits depuis Watt pour enregistrer l'action de la vapeur sur les pistons des machines au moyen d'un diagramme, j'ai eu à en essayer un certain nombre qui tous présentaient à côté de leurs avantages, des inconvénients réels dans leur emploi.

De tous ces derniers, l'appareil Richard, m'a paru être le plus maniable et le plus commode pour l'usage. Or, il est constant que plus les expériences seront faciles et plus elles seront multipliées, plus aussi les comparaisons entre ces différentes expériences seront nombreuses et permettront d'en tirer des déductions utiles pour le bon emploi de la vapeur dans les machines.

Mais l'appareil Richard, tel qu'il est livré par les constructeurs, présente le grave inconvénient dans la presque totalité des cas, de nécessiter un agencement cinématique spécial pour chaque machine que l'on