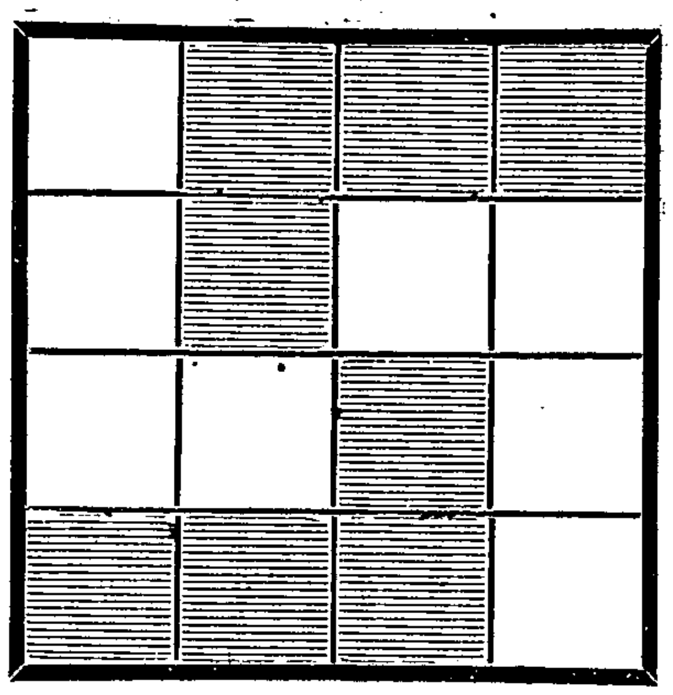
Association française pour l'avancement des sciences. 6, Comptes-rendus de la 6e session Le Havre 1877

que, pour deux lignes ou deux colonnes quelconques, le nombre de variations de couleurs est toujours égal au nombre des permanences. Voici, par exemple, l'échiquier anallagmatique de seize cases :



En remplaçant les cases blanches par le signe $+$, et les cases noires par le signe $-$, on a ainsi pour le produit des sommes :
$a^2+b^2+c^2+d^2$ et $p^2+q^2+r^2+s^2$ de quatre carrés, la décomposition formée par la somme des quatre carrés :

$$(+ap-bq-cr-ds)^2,$$
$$(+as-br+cq+dp)^2,$$
$$(+aq+bp-cs+dr)^2,$$
$$(-ar-bs-cp+dq)^2.$$

Nous engageons le lecteur à rechercher les figures des échiquiers anallagmatiques de 64 cases et de 256 cases. Il existe un *pavage anallagmatique* de ce genre, en marbre blanc et rose, dans l'une des cours d'un établissement public de Londres.

M. CATALAN

Professeur d'Analyse à l'Université de Liége.

SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE.

— Séance du 29 août 1877. —

I.

Soit

$$F_1(c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}. \tag{1}$$

Prenons la formule de transformation :

$$tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}}\, tg\theta. \tag{2}$$

Il en résulte

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{[1-(1-b)\cos^2\theta]\,[1-(1-b)\sin^2\theta]}}. \tag{3}$$

On a, par la formule du binôme :

$$\left[1-(1-b)\cos^2\theta\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(2n+1)}{4^n\,[\Gamma(n+1)]^2}(1-b)^n \cos^{2n}\theta;$$

$$\left[1-(1-b)\sin^2\theta\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(2p+1)}{4^p\,[\Gamma(p+1)]^2}(1-b)^p \sin^{2p}\theta.$$

Au moyen de ces valeurs, et d'une transformation connue, on change la formule (3) en

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^{\infty} P_s\left(\frac{1-b}{16}\right)^s, \tag{4}$$

pourvu que l'on suppose $n+p=s$, et

$$P_s = \sum_{n=0}^{n=s} \frac{[(n+1)(n+2)\ldots 2n.\,(p+1)(p+2)\ldots 2p]^2}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots s}. \tag{5}$$

On verra, tout à l'heure, que P_s *est un nombre entier* (*).

II.

Le développement de $F_1(c)$, ordonné suivant les puissances du module, est

$$\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 c^6 + \ldots\right].$$

Si l'on fait $1-b=2x$, on a

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^{\infty}\left[C_{2n,n}\right]^2\left[\frac{x(1-x)}{4}\right]^n,$$

ou

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^{\infty} Q_s x^s, \tag{6}$$

(*) Cette propriété résulte aussi du théorème suivant:

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots 2a.\,(b+1)(b+2)\ldots 2b}{1.2.3\ldots(a+b)} = \textit{entier},$$

si a *et* b *sont des nombres entiers.* (*Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques.* — Seconde note, p. 14, 1872).

en posant

$$Q_s = \sum \left[C_{2s-2p,\,s-p}\right]^2 C_{s-p,\,p(-1)}{}^p \left(\frac{1}{4}\right)^{s-p} \quad (7) \quad \left(0 \overline{\overline{<}} p \overline{\overline{<}} \frac{s}{2}\right).$$

On a $\frac{1-b}{16} = \frac{x}{8}$. Dans le développement (6), le coefficient de $\left(\frac{1-b}{16}\right)^s$ est donc

$$P_s = Q_s\, 8^s = 2^s \sum \left[C_{2s-2p,\,s-p}\right]^2 C_{s-p,\,p(-4)}{}^p. \qquad (7)$$

Cette troisième valeur de P_s doit être identique avec la première. Ainsi P_s *est un nombre entier, divisible par* 2^s .

Donc, si l'on fait

$$T_s = \sum \left[C_{2s-2p,\,s-p}\right]^2 C_{s-p,\,p(-4)}{}^p, \qquad (8)$$

on a, finalement,

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty T_s \left(\frac{1-b}{32}\right)^s. \qquad (9)$$

III.

De la relation (9), on conclut, en multipliant par $-cdc = +bdb$, puis intégrant :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \left[\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty \frac{T_s}{32^s} \int_1^0 (1-b)^s\, bdb.$$

Le premier membre a pour valeur

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi - 1}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} =$$

$$-\left[tg\tfrac{1}{2}\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1.$$

D'un autre côté,

$$\int_1^0 (1-b)^s\, bdb = \int_1^0 (1-b)^s\, db - \int_1^0 (1-b)^{s+1} db =$$

$$-\frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Ainsi

$$\frac{2}{\pi}=\sum_0^{\infty}\frac{T_s}{32^s\,(s+1)\,(s+2)}.$$

IV.

Reprenons la formule

$$tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{b}}tg\theta, \tag{2}$$

plus simple que celle de Lagrange :

$$tg\,(\varphi_1-\varphi)=b\,tg\varphi.$$

En l'écrivant ainsi :

$$tg\,\varphi_1=\sqrt{b}\,tg\varphi, \tag{10}$$

et en supposant

$$c_1=\frac{1-b}{1+b}, \tag{11}$$

valeur d'où résulte, comme l'on sait,

$$b_1=\frac{2\sqrt{b}}{1+b}, \tag{12}$$

on trouve aisément

$$F_1(c_1)=\frac{\sqrt{b}}{b_1}F_1(c), \tag{13}$$

puis

$$F_1(c_n)=\frac{\sqrt{b}}{b_n}\sqrt{b_1.b_2\ldots b_{n-1}}\,F_1(c). \tag{14}$$

Quand n augmente indéfiniment, le premier membre tend vers $\frac{\pi}{2}$. La limite de b_n est 1. Donc

$$\Big[F_1(c)\Big]^2=\frac{\pi^2}{4b}\,lim\,(b_1 b_2 b_3\ldots). \tag{15}$$

V.

Soit $b=\frac{p}{q}$. La formule (12) devient $b_1=\frac{\sqrt{pq}}{\frac{1}{2}(p+q)}$. Faisons, comme Gauss :

$$p_1=\sqrt{pq},\ q_1=\tfrac{1}{2}(p+q),\ p_2=\sqrt{p_1q_1},\ q_2=\tfrac{1}{2}(p_1+q_1),\ldots \tag{16}$$

De là résulte, au lieu de l'équation (15),

$$4\,\frac{p}{q}\left[\frac{F_1(c)}{\pi}\right]^2=lim\left(\frac{p_1}{q_1}.\frac{p_2}{q_2}.\frac{p_3}{q_3}\ldots\right). \tag{17}$$

VI.

Les nombres p_n, q_n, *toujours compris entre* p *et* q, *tendent, évidemment, vers une limite commune* λ. Pour déterminer cette limite, d'abord trouvée par Gauss, écrivons ainsi les équations (16), de *rang impair* :

$$p_1^2 = pq, p_2^2 = p_1 q_1, \ldots p_n^2 = p_{n-1} \cdot q_{n-1}.$$

Il résulte, de celles-ci et de la relation (17),

$$\lambda = \frac{q}{2} \frac{\pi}{F_1(c)} \cdot \qquad (18)$$

VII.

Les valeurs de $q_1, q_2, \ldots q_n$ (16) donnent, par un calcul aussi simple que le premier,

$$q_n = \tfrac{1}{2}\left[p + q - q_1 + p_1 - q_2 + p_2 - . - q_{n-1} + p_{n-1}\right] \text{(*)}$$

La limite du premier membre est λ; donc

$$\lambda = \frac{1}{2}[p + q - q_1 + p_1 - q_2 + p_2 - \ldots - q_{n-1} + p_{n-1} - \ldots] \quad (19)$$

Ainsi *la quantité* λ, *donnée par la formule* (18), *est la limite commune : 1° de* p_n ; *2° de* q_n ; *3° de* $\sqrt{pq}\sqrt{\frac{q_1}{p_1}}\sqrt{\frac{q_2}{p_2}}\sqrt{\frac{q_3}{p_3}}\ldots\ldots$; *4° de* $\frac{1}{2}[p + q - q_1 + p_1 - q_2 + p_2 - \ldots]$.

VIII.

Des équations (18), (19), on conclut

$$\frac{\pi}{F_1(c)} = \frac{1}{q}[p + q - q_1 + p_1 - q_2 + p_2 - \ldots].$$

La fonction $\frac{\pi}{F_1(c)}$, déjà décomposée en un produit indéfini (17), est donc développée en série. En outre, les numérateurs et les dénominateurs de ce produit

$$2\sqrt{\frac{p}{q}}\sqrt{\frac{p_1}{q_1}}\sqrt{\frac{p_2}{q_2}}\ldots,$$

(*) Par ce qui précède, le nombre des termes est *pair*. Si on le supposait, à tort, alternativement pair et impair, la série serait *indéterminée*.

ou plutôt leurs carrés, sont les termes mêmes de la série; ce qui est assez remarquable.

IX.

Les relations (16) ont une grande analogie avec celles que l'on rencontre dans le calcul de π, par la *méthode des isopérimètres*; savoir :

$$r_1 = \frac{1}{2}(r + R),\ R_1 = \sqrt{Rr_1},\ r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + R_1),\ R_2 = \sqrt{R_1 r_2},\ldots$$

Aussi, ces dernières formules conduisent aux deux expressions suivantes de $\frac{1}{\pi}$, dont la première, au moins, nous paraît nouvelle :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}[r + R - r_1 + R_1 - r_2 + R_2 - \ldots],$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{R}{2} \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_2}{R_3} \cdots$$

M. A. DUVERGIER

Ingénieur constructeur à Lyon.

PERFECTIONNEMENT A L'INDICATEUR RICHARD.

— *Séance du 29 août 1877.* —

Parmi les divers genres d'appareils construits depuis Watt pour enregistrer l'action de la vapeur sur les pistons des machines au moyen d'un diagramme, j'ai eu à en essayer un certain nombre qui tous présentaient à côté de leurs avantages, des inconvénients réels dans leur emploi.

De tous ces derniers, l'appareil Richard, m'a paru être le plus maniable et le plus commode pour l'usage. Or, il est constant que plus les expériences seront faciles et plus elles seront multipliées, plus aussi les comparaisons entre ces différentes expériences seront nombreuses et permettront d'en tirer des déductions utiles pour le bon emploi de la vapeur dans les machines.

Mais l'appareil Richard, tel qu'il est livré par les constructeurs, présente le grave inconvénient dans la presque totalité des cas, de nécessiter un agencement cinématique spécial pour chaque machine que l'on