

Association française pour
l'avancement des sciences. 6,
Comptes-rendus de la 6e
session Le Havre 1877

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (006 ; 1877 ; Le Havre, Seine-Maritime). Association française pour l'avancement des sciences. 6, Comptes-rendus de la 6e session Le Havre 1877. 1878.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

points doubles les points coniques situés sur ces cordes. Et comme ces points doubles sont sur le cercle de l'infini, nous voyons que :

Des plans parallèles aux plans tangents singuliers d'une surface de l'onde coupent cette surface suivant des anallagmatiques du 4^e ordre ().*

M. E. CATALAN

Professeur d'analyse à l'Université de Liège.

SUR LA SOMME DES DIVISEURS D'UN NOMBRE n

— Séance du 24 août 1877. —

I.

Dans le dernier *Bulletin de la Société mathématique*, M. Halphen donne le théorème exprimé par l'équation

$$\int n = 3 \int (n-1) - 5 \int (n-3) + 7 \int (n-6) - \dots, \quad (A)$$

et analogue au célèbre théorème d'Euler.

Il est facile de former d'autres propositions du même genre.

Soit, par exemple, l'égalité connue (**):

$$[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots]^2 = 1 + L_1 x + \dots + L_n x^n + \dots \quad (1)$$

Si l'on opère comme Labey (***) et M. Halphen, on trouve la relation

$$\int n + L_1 \int (n-1) + L_2 \int (n-2) + \dots + L_{n-1} = -\frac{n}{2} L_n, \quad (B)$$

analogue à (A), mais moins simple.

Relativement aux coefficients L_n , nous rappellerons seulement cette propriété :

La fonction

$$L_n - L_{n-1} - L_{n-2} + L_{n-3} + L_{n-4} - \dots,$$

nulle si n n'est pas triangulaire, égale $(2\lambda + 1) \binom{\lambda}{-1}$ quand $n = \frac{1}{2} \lambda (\lambda + 1)$.

(*) Par une tout autre voie, j'ai déjà démontré un cas particulier de ce théorème dans une communication que j'ai faite à Nantes.

(**) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 39.

(***) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 8.

II.

Soit maintenant la formule de Jacobi :

$$\begin{aligned} & [(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots]^3 \\ & = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

d'où résulte, comme l'a remarqué M. Halphen :

$$\begin{aligned} & x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + \int n \cdot x^n + \dots \\ & = \frac{x - 5x^2 + 14x^6 - 30x^{10} + 55x^{15} - \dots}{1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + \dots} \quad (*) \end{aligned} \quad (3)$$

Supposons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - \dots} \\ & = 1 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

de manière que les nombres entiers A_n sont donnés par la loi de récurrence :

$$A_n - 3A_{n-1} + 5A_{n-3} - 7A_{n-6} + 9A_{n-10} - \dots = 0. \quad (5)$$

Alors, d'après l'égalité (4) :

$$\int n = A_{n-1} - 5A_{n-3} + 14A_{n-6} - 30A_{n-10} + 55A_{n-15} - \dots \quad (C)$$

III.

J'ignore si l'on a fait attention que l'on peut ramener la détermination de $\int n$, au problème de la *décomposition d'un nombre entier, en parties entières, additives*. Pour arriver à ce résultat curieux, il suffit de modifier légèrement la méthode employée ci-dessus.

Soit la célèbre formule d'Euler :

$$\begin{aligned} & (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots \\ & = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

On en conclut, comme Labey :

$$\begin{aligned} & x + 3x^2 + 7x^3 + \dots + \int n \cdot x^n + \dots \\ & = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - \dots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots} \end{aligned}$$

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 39 et suiv. — Il est visible que, dans le numérateur, le coefficient de $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$ est, en valeur absolue, la somme des carrés des n premiers nombres entiers.

La fraction

$$\frac{1}{1-x-x^2+x^3+x^6-\dots} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$$

développée en série, devient $\sum_0^\infty \psi(n)x^n$, $\psi(n)$ représentant le nombre des décompositions de n en parties entières, positives, égales ou inégales (*).

Par conséquent,

$$\int n = \psi(n-1) + 2\psi(n-2) - 5\psi(n-5) - 7\psi(n-7) + 12\psi(n-12) + \dots \quad (D)$$

Exemple. Si $n=12$, on doit trouver :

$$\int 12 = \psi(11) + 2\psi(10) - 5\psi(7) - 7\psi(5) + 12\psi(0);$$

ou

$$\int 12 = 56 + 2 \cdot 42 - 5 \cdot 15 - 7 \cdot 7 + 12 = 28;$$

ce qui est exact (**).

M. GROLOUS

Ancien Élève de l'École polytechnique.

ÉTUDE SUR LA VARIATION DE FORCE VIVE DES PLANÈTES.

— Séance du 24 août 1877. —

M. LEVEAU

Astronome adjoint à l'Observatoire de Paris.

NOTE SUR LA COMÈTE PÉRIODIQUE DE D'ARREST.

— Séance du 24 août 1877. —

En ne considérant, d'après la haute autorité du Bureau des longitudes, comme comètes périodiques, que celles dont le retour a été

(*) Recherches sur quelques produits indéfinis, p. 44.

(**) Recherches sur quelques produits indéfinis, table III.