Association française pour l'avancement des sciences. 6, Comptes-rendus de la 6e session Le Havre 1877

points doubles les points coniques situés sur ces cordes. Et comme ces points doubles sont sur le cercle de l'infini, nous voyons que :

Des plans parallèles aux plans tangents singuliers d'une surface de l'onde coupent cette surface suivant des anallagmatiques du 4^e ordre (*).

M. E. CATALAN

Professeur d'analyse à l'Université de Liége.

SUR LA SOMME DES DIVISEURS D'UN NOMBRE n

— *Séance du 21 août 1877.* —

I.

Dans le dernier *Bulletin de la Société mathématique*, M. Halphen donne le théorème exprimé par l'équation

$$\int n = 3\int (n-1) - 5\int (n-3) + 7\int (n-6) - \ldots, \qquad \text{(A)}$$

et analogue au célèbre théorème d'Euler.

Il est facile de former d'autres propositions du même genre.

Soit, par exemple, l'égalité connue (**) :

$$[(1-x)\ (1-x^2)\ (1-x^3)\ \ldots]^2 = 1 + L_1 x - \ldots + L_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

Si l'on opère comme Labey (***) et M. Halphen, on trouve la relation

$$\int n + L_1 \int (n-1) + L_2 \int (n-2) + \ldots + L_{n-1} = -\frac{n}{2} L_n, \qquad \text{(B)}$$

analogue à (A), mais moins simple.

Relativement aux coefficients L_n, nous rappellerons seulement cette propriété :

La fonction

$$L_n - L_{n-1} - L_{n-2} + L_{n-5} + L_{n-7} - \ldots,$$

nulle si n *n'est pas triangulaire, égale* $(2\lambda+1)(-1)^{\lambda}$ *quand* $n = \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)$.

(*) Par une tout autre voie, j'ai déjà démontré un cas particulier de ce théorème dans une communication que j'ai faite à Nantes.

(**) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 39.

(***) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 8.

II.

Soit maintenant la formule de Jacobi :

$$[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^3$$
$$=1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-11x^{15}+\ldots, \qquad (2)$$

d'où résulte, comme l'a remarqué M. Halphen :

$$x+3x^2+4x^3+\ldots\int n.\,x^n+\ldots$$
$$=\frac{x-5x^2+14x^6-30x^{10}+55x^{15}-\ldots}{1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-11x^{15}+\ldots}\ (*). \qquad (3)$$

Supposons :

$$\frac{1}{1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-\ldots}$$
$$=1+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots, \qquad (4)$$

de manière que *les nombres entiers* A_n *sont donnés par la loi de récurrence :*

$$A_n-3A_{n-1}+5A_{n-3}-7A_{n-6}+9A_{n-10}-\ldots=0. \qquad (5)$$

Alors, d'après l'égalité (4) :

$$\int n=A_{n-1}-5A_{n-3}+14A_{n-6}-30A_{n-10}+55A_{n-15}-\ldots \qquad (C)$$

III.

J'ignore si l'on a fait attention que l'on peut ramener la détermination de $\int n$, au problème de la *décomposition d'un nombre entier, en parties entières, additives.* Pour arriver à ce résultat curieux, il suffit de modifier légèrement la méthode employée ci-dessus.

Soit la célèbre formule d'Euler :

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$$
$$=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\ldots \qquad (6)$$

On en conclut, comme Labey :

$$x+3x^2+7x^3+\ldots+\int n.\,x^n+\ldots.$$
$$=\frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-\ldots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\ldots}$$

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 39 et suiv. — Il est visible que, dans le numérateur, *le coefficient de* x$^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *est, en valeur absolue, la somme des carrés des* n *premiers nombres entiers.*

La fraction

$$\frac{1}{1-x-x^2+x^5+x^6-\ldots}=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots},$$

développée en série, devient $\sum_0^{\infty}\psi(n)x^n$, $\psi(n)$ représentant *le nombre des décompositions de* n *en parties entières, positives, égales ou inégales* (*).

Par conséquent,

$$\int n =$$
$$\psi(n-1)+2\psi(n-2)-5\psi(n-5)-7\psi(n-7)+12\psi(n-12)+\ldots \quad (D)$$

Exemple. Si $n=12$, on doit trouver:

$$\int 12=\psi(11)+2\psi(10)-5\psi(7)-7\psi(5)+12\psi(0);$$

ou

$$\int 12=56+2.42-5.15-7.7+12=28;$$

ce qui est exact (**).

M. GROLOUS

Ancien Élève de l'École polytechnique.

ÉTUDE SUR LA VARIATION DE FORCE VIVE DES PLANÈTES.

— *Séance du 24 août 1877.* —

M. LEVEAU

Astronome adjoint à l'Observatoire de Paris.

NOTE SUR LA COMÈTE PÉRIODIQUE DE D'ARREST.

— *Séance du 24 août 1877.* —

En ne considérant, d'après la haute autorité du Bureau des longitudes, comme comètes périodiques, que celles dont le retour a été

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 11.
(**) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, table III.