This page intentionally left blank.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII^E SERIE.

TOME XXXI, № 3.

RECHERCHES

SUR LA

CONSTANTE G, ET SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES

PAR

E. Catalan,

Membre-Correspondant de l'Académie.

(*Lu le 7 décembre 1882.*)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et C^ie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 45 Kop. = 1 Mk. 50 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Mai 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétue.l

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Avant-Propos.

Dans le *Mémoire sur la transformation des séries*, la lettre G représente

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots;$$

savoir

$$G = 0,\ 915\ 965\ 594\ 177\ 21\ldots$$

Par une méthode autre que la mienne, M. Bresse a trouvé

$$G = 0,\ 915\ 965\ 594\ 177\ 219\ 054\ 603\ 57\ldots$$

(*Comptes rendus*, tome LXIV, p. 1139). Très probablement, les vingt-deux premières décimales sont exactes. Ainsi, la valeur numérique de la constante G est, pour le moins, aussi bien connue que celle de la *Constante* C, d'Euler.

De même qu'on l'a tenté pour C, j'ai essayé depuis longtemps, mais en vain, de ramener l'autre constante à une forme simple, par exemple à celle-ci:

$$G = a\,.\,\mathrm{L}2 + b\,.\,\pi,$$

a et b étant commensurables. Peut-être le problème est-il impossible. Quoiqu'il en soit, j'ai rencontré, chemin faisant, un certain nombre de formules, peut-être nouvelles, et qui, je l'espère du moins, pourront intéresser les Géomètres. En voici quelques-unes:

$$\frac{B\,(p,\,q+m)}{B\,(q,\,p+m)} = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(q+\lambda)\,(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)\,(q+m+\lambda)},$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4 = 8\pi^2 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdots,$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+1}\right)} = \sqrt{\pi}\,\frac{1+a}{a}\cdot\frac{1+2a}{2+2a}\cdot\frac{3+3a}{2+3a}\cdot\frac{3+4a}{4+4a}\cdots,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q-1}\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}\prod_1^{\infty}\frac{(2n-1)(2n-1+q)}{2n(2n-2+q)},$$

$$G = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}.\left[\frac{8}{\pi}\left(\frac{9}{8}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^5\left(\frac{49}{48}\right)^7\left(\frac{80}{81}\right)^9\cdots\right],$$

etc.

Il y a bientôt un an, l'illustre Académie de Saint-Pétersbourg m'a fait l'honneur de me nommer Membre Correspondant: je la prie de vouloir bien agréer le petit Mémoire que je lui dédie aujourd'hui, en témoignage de ma reconnaissance.

Liège, 20 novembre 1882.

E. Catalan.

I.

Représentation de G, par des intégrales définies.

1. Il est visible que

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx. \tag{1}$$

L'intégration par parties, ou des transformations fort simples, donnent, au lieu de cette première expression:

$$G = -\int_0^1 \frac{\mathrm{L}.x}{1+x^2}\, dx, \tag{2}$$

$$G = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L}.\operatorname{tg}\frac{x}{2}\, dx, \tag{3}$$

$$G = \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x}}, \tag{4}$$

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\, dx, \tag{5}$$

$$G = \frac{\pi^2}{8} \int_0^1 \frac{\alpha d\alpha}{\sin \frac{\pi}{2} \alpha}, \text{ [1]} \tag{6}$$

2. A ces premières formules, nous en ajouterons d'autres, qui résultent, immédiatement, des intégrales données dans le *Mémoire sur la transformation* .... (pp. 32, 33); savoir:

$$G = \int_0^\infty \frac{\mathrm{L}.(1+x)}{1+x^2} dx - \frac{\pi}{8} \mathrm{L}.2, \tag{7}$$

---

1) Dans le *Bulletin de Darboux* (1877, p. 375), le facteur α a été omis. De même, le *Messenger mathématic, de Glaisher*, (tome VII, p. 140), mentionne deux formules d'où il résulte

$$G = \frac{\pi^3 E_2}{16}, \quad E_2 = 16 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}};$$

puis

$$G = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + e^{-x}},$$

c'est-à-dire

$$G = \frac{\pi^3}{16},$$

résultat inadmissible.

Enfin, dans sa *Théorie nouvelle des Nombres de Bernoulli et d'Euler*, M. Édouard Lucas donne (p. 23) la relation suivante, qui serait bien remarquable si elle était exacte:

$$\frac{1}{1^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} - \ldots = \frac{1}{2^{2n+2}} \frac{\pi^{2n+1}}{\Gamma(2n+1)} (-1)^n E_{2n}.$$

Malheureusement, il en résulte, à cause de $E_2 = -1$ (p. 19):

$$G = \frac{1}{16} \frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi^3}{32} = 0,\ 968\ 946\ldots,$$

au lieu de

$$G = 0,\ 915\ldots$$

La formule qui doit remplacer la précédente est

$$\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \ldots = \frac{\pi^{2n+1}}{4^{n+1}} \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)}.$$

Dans celle-ci, E_{2n} est *positif*: $E_0 = 1$, $E_2 = 1$, $E_4 = 5, \ldots$

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x)}\, dx + \frac{\pi}{8} \mathrm{L}.2, \tag{8}$$

$$G = \frac{\pi}{4} \mathrm{L}.2 + 2 \int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx, \tag{9}$$

$$G = \frac{3\pi}{4} \mathrm{L}.2 - 2 \int_0^1 \frac{x \operatorname{arc\,cot} x}{1+x^2}\, dx, \tag{10}$$

$$G = \frac{\pi}{2} \mathrm{L}.2 - \int_0^1 \frac{\mathrm{L}.(1+x^2)}{1+x^2}\, dx, \tag{11}$$

$$G = -\frac{\pi}{4} \mathrm{L}.2 + 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)}\, dx, \tag{12}$$

$$G = -\frac{\pi}{4} \mathrm{L}.2 + 2 \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - x \operatorname{arctg} x}{1-x^2}\, dx, \tag{13}$$

$$G = 2 \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}{1-x^2}\, dx, \tag{14}$$

$$G = \int_0^1 \frac{\mathrm{L}.\frac{1+x}{1-x}}{1+x^2}\, dx, \tag{15}$$

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{L}.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx. \tag{16}$$

3. Si, dans la formule

$$G = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\sin\theta}\, d\theta, \tag{5}$$

on fait $\sin\theta = x$, elle devient

$$G = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{17}$$

puis, au moyen de l'intégration par parties,

$$G = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 dx. \tag{18}$$

4. La combinaison des formules (1), (8) donne encore:

$$G = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}.2 + \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx. \tag{19}$$

5. On sait que:

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}\alpha} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{(1-\alpha)x} + e^{-(1-\alpha)x}}{e^x + e^{-x}}\,dx;\ ^{1)} \tag{20}$$

donc l'expression (6) devient

$$G = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}}\int_0^1 \left[e^{(1-\alpha)x} + e^{-(1-\alpha)x}\right]\alpha d\alpha. \tag{21}$$

D'ailleurs:

$$\int e^{(1-\alpha)x}\,\alpha d\alpha = e^x\int e^{-\alpha x}\,\alpha d\alpha = e^x\left[-\frac{\alpha}{x}e^{-\alpha x} + \frac{1}{x}\int e^{-\alpha x}d\alpha\right]$$

$$= e^x\left[-\frac{\alpha}{x}e^{-\alpha x} - \frac{1}{x^2}e^{-\alpha x} + c\right];$$

$$\int_0^1 e^{(1-\alpha)x}\,\alpha d\alpha = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{e^x}{x^2};$$

$$\int_0^1 e^{-(1-\alpha)x}\,\alpha d\alpha = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x^2}.$$

---

1) Poisson, *Journal de l'École polytechnique*, 18e Cahier, p. 298.

On a ainsi

$$\int_0^1 [e^{(1-\alpha)x} + e^{-(1-\alpha)x}]\, \alpha d\alpha = \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{x^2}; \tag{22}$$

puis, au lieu de la formule (21),

$$G = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{x^2 (e^x + e^{-x})}\, dx. \tag{23}$$

6. *Remarque.* Si l'on intègre par parties, on transforme cette égalité en celle-ci:

$$G = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} \frac{dx}{x}.\text{ [1]} \tag{24}$$

7. *Suite.* Soit

$$e^x = \cot \frac{1}{2}\theta;$$

et, par conséquent:

$$e^x - e^{-x} = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} - \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = 2\cot\theta,\ e^x + e^{-x} = \frac{2}{\sin\theta},$$

$$x = \mathrm{L}.\cot\frac{1}{2}\theta,\ dx = -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta\,.\,\cot\frac{1}{2}\theta} = -\frac{d\theta}{\sin\theta};$$

puis, après un changement de lettre:

$$G = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\mathrm{L}.\cot\frac{1}{2}x}\cdot\ \cdot\ \cdot \tag{25}$$

8. Nous avons donné (21) une valeur de G, sous forme d'intégrale double. En voici une autre.

Reprenons la formule

$$G = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\, dx. \tag{5}$$

---

1) *Mélanges mathématiques*, pp. 230, 231.

Or,

$$\frac{x}{\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1 + \cos x \cos y} \text{ [1]};$$

donc

$$G = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx\, dy}{1 + \cos x \cos y}. \tag{26}$$

II.

Intégrales eulériennes.

9. On doit, à M. Kummer, l'importante relation:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1 + e^{-x}} \frac{dx}{x} = \mathrm{L} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}. \text{ [2]} \tag{27}$$

Voici comment on peut la démontrer.

Pour toutes les valeurs positives de a et de b:

$$\int_0^{\infty} (e^{-bx} - e^{-ax}) \frac{dx}{x} = \mathrm{L} \cdot \frac{a}{b} \text{ [3]} \tag{28}$$

Soit A l'intégrale (27). Il est visible que

$$A = \sum_0^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} (e^{-qx} - e^{-px})\, e^{-nx} \frac{dx}{x};$$

ou, par l'application de la formule (28),

$$A = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \mathrm{L} \cdot \frac{p+n}{q+n};$$

---

1) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 595.

2) *Journal de Crelle*, tome XVII, p. 224.

3) Cette égalité, dont la vérification est facile, se trouve déjà dans le *Cours d'Analyse*, de Cauchy.

ou encore

$$A = \mathrm{L}\left[\frac{\frac{p}{q}\cdot\frac{p+2}{q+2}\cdot\frac{p+4}{q+4}\cdots\cdot}{\frac{p+1}{q+1}\cdot\frac{p+3}{q+3}\cdot\frac{p+5}{q+5}\cdots\cdot}\right]; \tag{29}$$

pourvu que chacun des produits soit convergent.

Dans le numérateur, le produit des λ premiers facteurs est

$$P_\lambda = \frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)\left(\frac{p}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{p}{2}+\lambda-1\right)}{\frac{q}{2}\left(\frac{q}{2}+1\right)\left(\frac{q}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{q}{2}+\lambda-1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} : \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)},$$

ou

$$P_\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)}.$$

De même, dans le dénominateur, le produit des λ premiers facteurs est

$$Q_\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}+\lambda\right)}.$$

Conséquemment

$$\frac{P_\lambda}{Q_\lambda} = \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)}. \tag{30}$$

Pour trouver la limite de la quantité

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)},$$

nous ferons usage du beau théorème de Gauss, exprimé par l'équation

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} = 1 + \frac{\beta}{1}\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\,\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \ldots \tag{31}$$

Si l'argument γ, supérieur à $\beta+\alpha$, croît indéfiniment, il est clair que

$$\lim\cdot\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} = 1. \tag{32}$$

Dans le cas actuel, pour appliquer cette proposition, il suffit de prendre:

$$\alpha = -\frac{1}{2},\quad \beta = \frac{p-q}{2},\quad \gamma = \frac{p}{2}+\lambda.$$

La limite cherchée est 1. On a donc

$$lim \cdot \frac{P_\lambda}{Q_\lambda} = \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}; \text{[1]}$$

et, par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1 + e^{-x}} \frac{dx}{x} = \mathrm{L} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}. \tag{27}$$

10. *Remarques.* I. La formule (32) équivant à

$$lim \cdot \frac{B(\gamma, \gamma - \alpha - \beta)}{B(\gamma - \alpha, \gamma - \beta)} = 1. \tag{33}$$

II. Si, dans l'équation (31), on suppose

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{p-q}{2}, \quad \gamma = \frac{p}{2},$$

on trouve

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} = 1 - \frac{1}{2}\frac{p-q}{p} - \frac{1}{2.4}\frac{(p-q)(p-q+2)}{p(p+2)} - \ldots;$$

développement connu.

Dans cette égalité, changeons p en q, q en p: le premier membre est remplacé par son inverse; donc

$$1 = \left[1 - \frac{1}{2}\frac{p-q}{p} - \frac{1}{2.4}\frac{(p-q)(p-q+2)}{p(p+2)} - \ldots\right]\left[1 + \frac{1}{2}\frac{p-q}{q} - \frac{1}{2.4}\frac{(p-q)(p-q-2)}{q(q+2)} - \ldots\right].$$

Cette relation est également connue. [2])

II. En modifiant la démonstration précédente, on peut généraliser la formule de M. Kummer.

On a

$$\mathrm{L} \,.\, \Gamma(p) = \varphi(p) = \int_0^\infty \left[p - 1 - \frac{1 - e^{-(p-1)x}}{1 - e^{-x}}\right] \frac{dx}{x} e^{-x}. \text{[3]} \tag{34}$$

---

1) Cette démonstration me parait beaucoup plus satisfaisante que celle qu'emploie Binet (*Intégrales eulériennes*, p. 156). Elle est préférable, d'ailleurs, à celle dont j'ai fait usage dans le *Mémoire sur la constante d'Euler et la fonction de Binet* (p. 235).

2) *Mélanges mathématiques*, p. 161. Voir aussi la Note intitulée: *Sur quelques formules relatives aux intégrales eulériennes;* etc.

3) Voir, par exemple, le *Calcul intégral* de M. Bertrand', p. 264. Plus loin, nous reviendrons sur la fonction φ.

Par conséquent,

$$L \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^\infty \left[-1 - \frac{1 - e^{-(p-1)x} - e^{-(q-1)x} + e^{-(p+q-1)x}}{1-e^{-x}} \right] \frac{dx}{x} e^{-x}.$$

Le premier membre égale $L \,.\, B(p,q)$. Dans le second membre, la quantité entre perenthèses est réductible à

$$\frac{-2 + e^{-x} + e^{-(p-1)x} + e^{-(q-1)x} - e^{-(p+q-1)x}}{1-e^{-x}};$$

donc l'intégrale devient

$$\int_0^\infty \frac{-2e^{-x} + e^{-2x} + e^{-px} + e^{-qx} - e^{-(p+q)x}}{1-e^{-x}} \frac{dx}{x};$$

ou, plus simplement:

$$\int_0^\infty \frac{(1-e^{-x})^2 - (1-e^{-px})(1-e^{-qx})}{1-e^{-x}} \frac{dx}{x}.$$

Nous arrivons ainsi à cette formule:

$$L \,.\, B(p,q) = \int_0^\infty \frac{(1-e^{-x})^2 - (1-e^{-px})(1-e^{-qx})}{1-e^{-x}} \frac{dx}{x}, \tag{35}$$

que nous croyons nouvelle et remarquable.

12. On en conclut d'abord la généralisation annoncée:

$$L \cdot \frac{B(p,q)}{B(p',q')} = \int_0^\infty \frac{(1-e^{-p'x})(1-e^{-q'x}) - (1-e^{-px})(1-e^{-qx})}{1-e^{-x}} \frac{dx}{x}. \tag{36}$$

Mais, pour obtenir un résultat plus intéressant, changeons

$$q, \quad p', \quad q'$$

respectivement, en

$$q+m, \quad p+m, \quad q.$$

Le premier membre devient

$$L \cdot \frac{B(p, q+m)}{B(q, p+m)}.$$

Dans le second membre, le numérateur se réduit à

$$-e^{-(p+m)x}-e^{-qx}+e^{-px}+e^{-(q+m)x}=(e^{-px}-e^{-qx})(1-e^{-mx}).$$

Donc

$$\mathrm{L}\,\frac{B(p,\,q+m)}{B(q,\,p+m)}=\int_0^\infty\frac{(e^{-px}-e^{-qx})(1-e^{-mx})}{1-e^{-x}}\,\frac{dx}{x}. \tag{37}$$

13. *Remarques.* I. Si, dans la relation (36), on suppose $q=p'=m$, $q'=q$, le numérateur de la seconde fraction se réduit encore à

$$(e^{-px}-e^{-qx})(1-e^{-mx}).$$

Par conséquent, on retombe sur le théorème d'Euler, exprimé par l'égalité

$$\frac{B(p,\,q+m)}{B(q,\,p+m)}=\frac{B(p,\,m)}{B(q,\,m)}. \tag{38}$$

II. Dans la même relation (36), changeons

$$p,\ q,\ p',\ q'$$

en

$$\frac{q}{2},\ \frac{p+1}{2},\ \frac{p}{2},\ \frac{q+1}{2}:$$

le numérateur égale

$$e^{-\frac{q}{2}x}+e^{-\frac{p+1}{2}x}-e^{-\frac{p}{2}x}-e^{-\frac{q+1}{2}x}=\left(e^{-\frac{q}{2}x}-e^{-\frac{p}{2}x}\right)\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right).$$

Donc

$$\mathrm{L}\cdot\frac{B\left(\frac{q}{2},\,\frac{p+1}{2}\right)}{B\left(\frac{p}{2},\,\frac{q+1}{2}\right)}=\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{q}{2}x}-e^{-\frac{p}{2}x}}{1+e^{-\frac{x}{2}}}\,\frac{dx}{x};$$

ou, par le changement de x en $2x$:

$$\mathrm{L}\cdot\frac{B\left(\frac{q}{2},\,\frac{p+1}{2}\right)}{B\left(\frac{p}{2},\,\frac{q+1}{2}\right)}=\int_0^\infty\frac{e^{-qx}-e^{-px}}{1+e^{-x}}\,\frac{dx}{x};$$

ce qui est la formule de Kummer.

III. Enfin, si l'on prend

$$p=\gamma,\quad q=\gamma-\alpha-\beta,\quad p'=\gamma-\alpha,\quad q'=\gamma-\beta,$$

la formule (36) se change en

$$L \cdot \frac{B(\gamma, \gamma - \alpha - \beta)}{B(\gamma - \alpha, \gamma - \beta)} = \int_0^\infty \frac{(e^{\alpha x} - 1)(e^{\beta x} - 1)}{1 - e^{-x}} e^{-\gamma x} \frac{dx}{x}. \quad (\gamma > \alpha + \beta) \tag{39}$$

Ainsi :

1°. *Le premier membre de l'équation de Gauss* (31) *est transformé en intégrale définie;*

2°.

$$\int_0^\infty \frac{(e^{\alpha x} - 1)(e^{\beta x} - 1)}{1 - e^{-x}} e^{-\gamma x} \frac{dx}{x} = 1 + \frac{\beta}{1} \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta(\beta + 1)}{1.2} \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} + \dots \tag{40}$$

14. L'intégrale (37) est, très facilement, développable en une série dont *tous les termes sont des logarithmes;* et, en conséquence, la quantité

$$\frac{B(p, q + m)}{B(q, p + m)}$$

peut être remplacée par un produit indéfini.

On a, en effet,

$$\frac{(e^{-px} - e^{-qx})(1 - e^{-mx})}{1 - e^{-x}} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (e^{-px} - e^{-qx})(1 - e^{-mx}) e^{-\lambda x}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[e^{-(p+\lambda)x} - e^{-(q+\lambda)x} - e^{-(p+m+\lambda)x} + e^{-(q+m+\lambda)x} \right].$$

Donc

$$\int_0^\infty \frac{(e^{-px} - e^{-qx})(1 - e^{-mx})}{1 - e^{-x}} \frac{dx}{x} =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left\{ \int_0^\infty \left[e^{-(p+\lambda)x} - e^{-(q+\lambda)x} \right] \frac{dx}{x} - \int_0^\infty \left[e^{-(p+m+\lambda)x} - e^{-(q+m+\lambda)x} \right] \frac{dx}{x} \right\}.$$

D'après la formule (28), ces deux intégrales ont pour valeur, respectivement,

$$L \cdot \frac{q + \lambda}{p + \lambda}, \quad L \cdot \frac{q + m + \lambda}{p + m + \lambda};$$

donc leur différence égale

$$L \cdot \frac{(q + \lambda)(p + m + \lambda)}{(p + \lambda)(q + m + \lambda)}.$$

Par suite, l'égalité (37) devient

$$L \cdot \frac{B(p, q + m)}{B(q, p + m)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} L \cdot \frac{(q + \lambda)(p + m + \lambda)}{(p + \lambda)(q + m + \lambda)}, \tag{41}$$

ou

$$\frac{B(p, q+m)}{B(q, p+m)} = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(q+\lambda)(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)(q+m+\lambda)}. \text{ }^{1)} \tag{42}$$

15. Les conséquences de cette nouvelle formule sont fort nombreuses. Elle donne d'abord

$$\frac{B(\gamma, \gamma-\alpha-\beta)}{B(\gamma-\alpha, \gamma-\beta)} = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(\gamma-\alpha+\lambda)(\gamma-\beta+\lambda)}{(\gamma+\lambda)(\gamma-\alpha-\beta+\lambda)}. \tag{43}$$

Ainsi, *la série de Gauss est développée en produit indéfini.*

En second lieu, si p, q, m sont des *nombres entiers*, la relation (42) permet de *développer, en produit indéfini, une quantité rationnelle.* [2])

Soient, par exemple:

$$p = 2, \quad q = 1, \quad m = 3.$$

On a

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\,\Gamma(p+m)} = \frac{1.2.3}{1.2.3.4} = \frac{1}{4}.$$

---

1) Le raisonnement employé ci-dessus (9) montre que le produit est convergent. Voici d'ailleurs une seconde démonstration, plus simple que la précédente.

On sait que

$$\mathrm{L}\,.\,\Gamma(p) = \sum_{k=1}^{k=\infty}\left[(p-1)\,\mathrm{L}\,.\left(1+\frac{1}{k}\right) - \mathrm{L}\,.\,\frac{k+p-1}{k}\right].$$

Il résulte immédiatement, de cette relation,

$$\mathrm{L}\,.\,\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\,\Gamma(p+m)} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[-\mathrm{L}\,.\,\frac{k+p-1}{k} - \mathrm{L}\,.\,\frac{k+q+m-1}{k} + \mathrm{L}\,.\,\frac{k+q-1}{k} + \mathrm{L}\,.\,\frac{k+p+m-1}{k}\right]$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \mathrm{L}\,.\,\frac{(k+q-1)(k+p+m-1)}{(k+p-1)(k+q+m-1)},$$

ou, par le changement de k en $\lambda+1$:

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\,\Gamma(p+m)} = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(q+\lambda)(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)(q+m+\lambda)},$$

etc.

2) Cette quantité est le rapport entre les deux *nombres combinatoires:*

$$C_{m+p+q-2,\; p-1}, \qquad C_{m+p+q-2,\; q-1}.$$

Donc

$$\frac{1}{4} = \frac{1.5}{2.4} \cdot \frac{2.6}{3.5} \cdot \frac{3.7}{4.6} \cdot \frac{4.8}{5.7} \cdots,$$

ou

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{21}{24} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{45}{48} \cdots$$

De même, en prenant

$$p = 5, \quad q = 3, \quad m = 2,$$

on trouve

$$\frac{2}{5} = \frac{21}{25} \cdot \frac{32}{36} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{60}{64} \cdot \frac{77}{81} \cdots$$

16. *Suite.* Dans diverses publications[1]), j'ai indiqué des moyens d'obtenir une infinité de développements, en séries, de π et de $\frac{1}{\pi}$. La formule (42) remplace ces séries par des produits indéfinis.

Soient, par exemple, $p = \frac{3}{2}$, $q = 1$, $m = \frac{1}{2}$. Le premier membre devient $\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{4}$. En conséquence,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9} \cdots,$$

ou

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots;$$

formule de Wallis.

Si l'on prend $p = m = \frac{1}{2}$, $q = 2$, on trouve

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{8}{11} \cdots$$

Soient, enfin :

$$p = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{3}{4}, \quad m = \frac{1}{2}.$$

Le premier membre de l'égalité (42) devient

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2.$$

Le second membre égale $\frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{15}{17} \cdots$ Donc

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 4 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{15}{17} \cdots \qquad (44)$$

1) *Comptes rendus*, tome XLVII; *Mélanges mathématiques*, p. 150; etc.

17. *Remarque.* En vertu d'un théorème d'Euler:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

Par conséquent, la dernière égalité peut être écrite ainsi:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4 = 8\pi^2 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{15}{17} \cdots \tag{45}$$ [1]

III.

Remarques sur la fonction de Binet. [2]

18. Si l'on pose

$$\mathrm{L}.\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.x - x + \frac{1}{2}\mathrm{L}.(2\pi) + \varpi(x), \tag{46}$$

on a, comme l'on sait, soit

$$\varpi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\,d\alpha, \tag{47}$$

soit

$$\varpi(x) = 2\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{x}: \tag{48}$$ [3]

$\varpi(x)$ est la fonction de Binet.

Dans son célèbre Mémoire, Binet forme, très-péniblement, l'équation

$$2\mathrm{L}.\Gamma(2x) = (-1 + 4x)\,\mathrm{L}(2x) + \mathrm{L}(2\pi) - 4x + 2\varpi(2x); \tag{49}$$ [4]

d'où il aurait pu conclure

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{L}.2. \tag{50}$$

---

1) Nous reviendrons, plus loin, sur la formule (44).

2) Elles ne font pas double emploi avec le Mémoire sur le même sujet.

3) Il est visible que cette seconde expression peut être remplacée par

$$\varpi(x) = 2x\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t x} - 1}\operatorname{arctg} t.$$

(*Mémoire sur les intégrales définies eulériennes*, pp. 240 et 241.)

4) P. 243 et suivantes. A la caractéristique μ, employée par le savant Géomètre, nous avons substitué ϖ.

M. Bertrand, par un procédé tout autre, a déterminé cette valeur; mais sa méthode est un peu longue.[1] Voici celle que j'expose dans mon cours.

Soit, comme précédemment (**11**),

$$\varphi(x) = \mathrm{L}\,.\,\Gamma(x). \tag{51}$$

On a, par une formule connue, dont la vérification est facile:

$$\varphi'(x+1) = \mathrm{L}\,.x + \frac{1}{2x} + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha x}\,dx; \tag{52}$$

et, en conséquence,

$$\varphi(x+1) = k + x\,\mathrm{L}.x - x + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.x + \varpi(x);$$

ou, plus simplement,

$$\varphi(x) = k + \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.x - x + \varpi(x): \tag{53}$$

k est la constante d'intégration, qu'il s'agit de déterminer.

La formule de Legendre:

$$\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)} = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

équivaut à

$$\varphi(2x) - \varphi(x) - \varphi\left(x+\frac{1}{2}\right) = (2x-1)\,\mathrm{L}.2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.\pi. \tag{54}$$

Or:

$$\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right) = k + x\,\mathrm{L}.\left(x+\frac{1}{2}\right) - x - \frac{1}{2} + \varpi\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi(2x) = k + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.(2x) - 2x + \varpi(2x);$$

donc le premier membre de l'égalité (54) a pour valeur:

$$-k + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,2 + x\,\mathrm{L}\cdot\frac{x}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Après quelques réductions, cette égalité se transforme en

$$-k - x\,\mathrm{L}.\left(1+\frac{1}{2x}\right) + \frac{1}{2} + \varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{L}.(2\pi).$$

Si l'on fait croître x indéfiniment, le premier membre tend vers $(-k)$.[2]

---

1) *Calcul intégral*, pp. 265, 266.

2) A cause de

$$x\,\mathrm{L}.\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \ldots$$

Ainsi

$$k = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.(2\pi);$$

et enfin, au lieu des égalités (49) et (53):

$$\mathrm{L}.\Gamma(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.(2\pi) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.x - x + \varpi(x). \tag{55}$$

19. *Remarques I.* Quand $x = 1$, cette équation se réduit à

$$0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.(2\pi) - 1 + \varpi(1).$$

Donc

$$\varpi(1) = 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.(2\pi). \tag{56}$$

II. D'après les formules (47) et (48):

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha}\,d\alpha = \int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\,\mathrm{arctg}\,t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.2, \tag{57}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha = 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\mathrm{arctg}\,t = 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.(2\pi). \tag{58}$$

III. Il résulte, des deux dernières valeurs,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}\,t}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\,dt = \frac{1}{4}\,\mathrm{L}.\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{59}$$ [1]

IV. Au moyen de la formule (55), l'égalité (54) se transforme en

$$\varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x + \frac{1}{2}\right) = x\,\mathrm{L}.\left(1 + \frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2}. \tag{60}$$ [2]

---

1) Dans les *Tables* de M. Bierens de Haan, je ne trouve pas cette intégrale.

2) A la p. 224 du Mémoire de Binet, on lit:

$$\text{«}2\mu\left(p + \frac{1}{2}\right) + 2\mu(p) - 2\mu(2p) = \frac{1}{2(2p+1)} + \frac{1}{2.3\,(2p+1)^2} + \frac{1}{3.4\,(2p+1)^3} + \text{etc.»}$$

Avec notre notation, cette égalité devient

$$\varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2.3\,(2x+1)^2} + \frac{1}{3.4\,(2x+1)^3} + \ldots\right].$$

La somme de la série est

$$1 + 2\,x\,\mathrm{L}.\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right),$$

ou

$$1 - 2\,x\,\mathrm{L}.\left(1 + \frac{1}{2x}\right).$$

Ainsi, la formule (60) ne diffère pas, au fond, de celle de Binet.

Cette relation, assez remarquable, à une grande analogie avec celle-ci:

$$2C_{2x} - C_x - C_{x+\frac{1}{2}} = -2\mathrm{L}.2.\text{ [1]} \tag{61}$$

Pour passer de la première à la seconde, il suffit de se rappeler que

$$C_x = \frac{1}{2x} - \mathrm{L}.x - \varpi'(x).\text{ [2]}$$

En effet, l'égalité (61) se réduit à

$$-\frac{1}{2x+1} + \mathrm{L}.\frac{2x+1}{2x} = 2\varpi'(2x) - \varpi'(x) - \varpi'\left(x+\frac{1}{2}\right);$$

et, en vertu de la relation (60), le second membre égale

$$\mathrm{L}\cdot\frac{2x+1}{2x} - \frac{1}{2x+1}.$$

20. Si, dans la formule (55), on change x en $x+1$, et que l'on retranche, on obtient

$$\mathrm{L}.x = \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.(x+1) - \left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.x - 1 + \varpi(x+1) - \varpi(x),$$

ou

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\cdot\frac{x+1}{x} - 1; \tag{62}$$

relation connue.

21. Si, dans la même formule (55), on change x en $2x$, on trouve, par une combinaison aussi simple que la précédente,

$$\mathrm{L}\ \Gamma(x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}.\Gamma(2x) = \frac{1}{4}\mathrm{L}.(2\pi) - \frac{1}{4}\mathrm{L}.(x) - \left(x-\frac{1}{4}\right)\mathrm{L}.2 + \varpi(x) - \frac{1}{2}\varpi(2x).$$

D'après le théorème de Legendre, la valeur du premier membre est

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}.\Gamma(x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}.\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) - \left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.2 + \frac{1}{4}\mathrm{L}.\pi.$$

Par suite,

$$\varpi(x) - \frac{1}{2}\varpi(2x) = \frac{1}{2}\mathrm{L}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}. \tag{63}$$

En particulier,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\varpi(1) = \frac{1}{4}\mathrm{L}.\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ce résultat donne une vérification de la formule (59).

---

1) *Sur la Constante d'Euler*, ... p. 221.

2) *Loc. cit.* p. 223.

22. Nous avons trouvé

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha}\, d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, \mathrm{L}.(2); \tag{57}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\int_0^\infty \left(\frac{2}{e^{2\alpha} - 1} + 1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha = 1 - \mathrm{L}.2.\ ^{(1)}$$

Mais (28):

$$\mathrm{L}.2 = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}}{\alpha}\, d\alpha = \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha}) \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha.$$

Donc

$$\int_0^\infty \left[\frac{2}{e^{2\alpha} - 1} + 2 - e^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha = 1,$$

ou

$$\int_0^\infty \left[\frac{2e^{2\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} - e^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha = 1. \tag{64}$$

Pour simplifier le premier membre, on peut employer la relation

$$\int_0^\infty \left[\frac{2e^{2\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} - \frac{2 - e^{-\alpha}}{\alpha} - 1 + e^{-\alpha}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha = 0.\ ^{2)}$$

La soustraction donne

$$\int_0^\infty \left[\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} + 1 - 2e^{-\alpha}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha = 1. \tag{65}$$

---

1) Par le changement de α en 2α.

2) Bierens de Haan, T. 94 (seconde édition). La première renferme une faute de signe indiquée, du reste, dans *l'errata*.

IV.

Sur la fonction $\varphi(x)$.

23. La formule

$$\mathrm{L}.\Gamma(x) = \varphi(x) = \int_0^\infty \left[x - 1 - \frac{1 - e^{-(x-1)\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha \tag{34}$$

résulte, par intégration, de celle-ci:

$$\varphi'(x) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}\right] d\alpha, \tag{66}$$

conséquence, presque immédiate, de *l'équation de définition:*

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \varphi'(x) = \int_0^\infty \left[e^{-\beta} - (1+\beta)^{-x}\right] \frac{d\beta}{\beta}.\text{ [1]}$$

Soit $x = 1$. Alors

$$\varphi'(1) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha} - 1}\right] d\alpha = -C, \tag{67}$$

C étant la *constante d'Euler*. Par suite,

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}\, d\alpha; \tag{68}$$

ou, si l'on pose $e^{-\alpha} = t$:

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{1 - t}\, dt. \tag{69}$$

---

1) La formule

$$\varphi'(x+1) = \mathrm{L}.x + \frac{1}{2x} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha} - 1} - \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha x}\, d\alpha, \tag{52}$$

rappelée ci-dessus, est une *transformée* de la relation (66).

Il est clair que: *Si x est commensurable, la différence $\varphi'(x) - \varphi'(1)$ est réductible à l'intégrale d'une différentielle rationnelle.* [1])

Quant à la quantité $\varphi'(1) = -C$, on n'a pu, jusqu'à présent, l'exprimer sous forme finie.

24. La fraction $\frac{1 - t^{x-1}}{1-t}$ est la limite de la série

$$1 - t^{x-1} + t - t^x + t^2 - t^{x+1} + t^3 - t^{x+2} + \ldots$$

Par conséquent,

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x-1}\right]; \tag{70}$$

formule connue. [2])

25. Il résulte, de cette formule,

$$\varphi(x) - x\varphi'(1) = \sum_1^\infty \left[\frac{x}{n} - \mathrm{L}.(n+x-1)\right] + const.$$

Pour déterminer la constante, prenons $x = 1$: le terme $\varphi(1) = \mathrm{L}.\Gamma(1)$ s'annule; donc

$$-\varphi'(1) = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{n} - \mathrm{L}.(n)\right] + const.;$$

et, finalement,

$$\varphi(x) = -(x-1)\,C + \sum_1^\infty \left[\frac{x-1}{n} - \mathrm{L}.\frac{x+n-1}{n}\right].\ ^{3)} \tag{71}$$

26. La série contenue dans le second membre serait peu propre au calcul de $\varphi(x)$; mais on la transforme aisément.

A cet effet, rappelons que

$$C = 1 + \left(\frac{1}{2} - \mathrm{L}.\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \mathrm{L}.\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \mathrm{L}.\frac{n}{n-1}\right) + \ldots,$$

ou

$$C = 1 + \sum_2^\infty \left[\frac{1}{n} - \mathrm{L}.\frac{n}{n-1}\right].\ ^{4)} \tag{72}$$

Si, après avoir *mis à part* le terme $(x-1) - \mathrm{L}.x$, on remplace C par l'expression précédente, on obtient, au lieu de la formule (71):

---

1) *Sur la constante d'Euler*, ... p. 214.
2) Henri Limbourg, *Théorie de la fonction gamma*, p. 70.
3) Nous avons remplacé $\varphi'(1)$ par $-C$.
4) *Mélanges mathématiques*, p. 164.

$$\varphi(x) = (x-1) - \mathrm{L}\,.\,x - (x-1) - \sum_{2}^{\infty}\left[(x-1)\,\mathrm{L}\,.\,\frac{n-1}{n} + \mathrm{L}\,.\,\frac{x+n-1}{n}\right];$$

ou, plus simplement,

$$\varphi(x) = \mathrm{L}\,.\left\{\frac{1}{x}\prod_{1}^{\infty}\frac{(n+1)^x}{n^{x-1}(n+x)}\right\}. \tag{73}$$

Ainsi, *la fonction $\varphi(x)$ est égale au logarithme népérien d'un produit indéfini.*

27. Ce n'est pas tout: comme $\varphi(x) = \mathrm{L}\,.\,\Gamma(x)$, on a, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\Gamma(x+1) = \prod_{1}^{\infty}\frac{(n+1)^x}{n^{x-1}(n+x)}. \tag{74}$$

Cette nouvelle formule équivaut à

$$\Gamma(x+1) = lim\,.\left[(n+1)^x\,\frac{1.2.3\ldots n}{(1+x)(2+x)\ldots(n+x)}\right](n=\infty).\text{ [1]} \tag{75}$$

V.

Développements en séries.

28. Si, dans l'égalité

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\cdot\frac{x+1}{x} - 1, \tag{68}$$

on change x en $x+1$, $x+2$, . . . et que l'on ajoute, on trouve

$$\varpi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\left(x+n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,\frac{x+n+1}{x+n} - 1\right].\text{ [2]} \tag{76}$$

Le second membre est la *Série de Gudermann.* Il est facile d'en vérifier la convergence. [3]

En particulier,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{0}^{\infty}\left[(n+1)\,\mathrm{L}\,.\,\frac{2n+3}{2n+1} - 1\right];$$

---

1) Celle-ci s'accorde avec la définition de $\Gamma(x)$, adoptée par Gauss.

2) Il ne faut pas oublier que $\varpi(x+n) = 0$, pour n *infini.*

3) Dans les Notes placées à la suite du *Calcul intégral* de Lacroix (tome II, p. 348), M. Serret démontre la formule de Gudermann pour le cas où x est un *nombre entier*. Cette restriction, on le voit, est inutile.

ou, sous une forme un peu plus simple,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{1}^{\infty}\left[n\,\mathrm{L}.\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right]. \tag{77}$$

29. Reprenons la relation (62) et celles qui s'en déduisent :

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.\frac{x+1}{x} - 1,$$

$$\varpi(x+1) - \varpi(x+2) = \left(x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{L}.\frac{x+2}{x+1} - 1,$$

. . . .

$$\varpi(x+n-1) - \varpi(x+n) = \left(x+\frac{2n-1}{2}\right)\mathrm{L}.\frac{x+n}{x+n-1} - 1,$$

. . . .

Il en résulte, si l'on ajoute $\varpi(x)$ aux deux membres de la première,

$$2\left[\varpi(x) - \varpi(x+1) + \varpi(x+2) - \ldots\right] = \varpi(x)$$
$$+ \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.\frac{x+1}{x} - 1\right] - \left[\left(x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{L}.\frac{x+2}{x+1} - 1\right] + \ldots,$$

$$2\left[\varpi(x) - \varpi(x+1) + \varpi(x+2) - \ldots\right] = \varpi(x)$$
$$+ \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(x+\frac{2n-1}{2}\right)\mathrm{L}.\frac{x+n}{x+n-1} - 1\right].$$

Pour simplifier le second membre, j'observe que la relation (76) peut être remplacée par

$$\varpi(x) = \sum_{1}^{\infty}\left[\left(x+\frac{2n-1}{2}\right)\mathrm{L}.\frac{x+n}{x+n-1} - 1\right].$$

Ainsi, dans la somme cherchée, les termes de rang *pair* se détruisent, et les autres s'ajoutent. Conséquemment,

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) + \varpi(x+2) - \ldots = \sum_{1}^{\infty}\left[\left(x+i-\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.\frac{x+i}{x+i-1} - 1\right], \tag{78}$$

i étant *impair*.

Par exemple,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{3}{2}\right) + \varpi\left(\frac{5}{2}\right) - \ldots = \sum_{1}^{\infty}\left[i\,\mathrm{L}.\frac{2i+1}{2i-1} - 1\right].\ (i\ \textit{impair}) \tag{79}$$

30. Les premiers membres de ces égalités peuvent, de diverses manières, être transformés en intégrales définies. Pour abréger, considérons seulement la seconde.

La formule

$$\varpi(x) = 2\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{x} \tag{48}$$

donne

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1} \operatorname{arctg} 2\beta;$$

ou, par le changement de 2β en x:

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1} \operatorname{arctg} x. \tag{80}$$

De même:

$$\varpi\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}, \quad \varpi\left(\frac{5}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1} \operatorname{arctg} \frac{x}{5}, \ldots;$$

puis

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{3}{2}\right) + \varpi\left(\frac{5}{2}\right) - \ldots = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\left[\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \operatorname{arctg}\frac{x}{5} - \ldots\right]. \tag{81}$$

Soit

$$y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \operatorname{arctg}\frac{x}{5} - \ldots; \tag{82}$$

et, par conséquent,

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{9+x^2} + \frac{5}{25+x^2} - \ldots$$

D'après une formule connue, [1])

$$y' = \frac{\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}}.$$

Donc

$$y = \int_0^x \frac{\frac{\pi}{2}\,dx}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}} = \int_0^x \frac{e^{\frac{\pi x}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx}{1+\left[e^{\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right]^2} = \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{\pi x}{2}}\right) - \frac{\pi}{4},$$

---

1) *Traité élémentaire des séries*, p. 36.

ou

$$y = \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi x}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi x}{2}} + 1}. \tag{83}$$

Telle est la somme de la série (82).

Au moyen de cette valeur, combinée avec la relation (81), la formule (79) devient

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x} - 1} \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi x}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi x}{2}} + 1} = \sum_1^\infty \left[i \mathrm{L} \cdot \frac{2i+1}{2i-1} - 1 \right], \ (i \textit{ impair}) \tag{84}$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2z} - 1} \operatorname{arctg} \frac{e^z - 1}{e^z + 1} = \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty \left[i \mathrm{L} \cdot \frac{2i+1}{2i-1} - 1 \right]. \ (i \textit{ impair}) \tag{85}$$

31. *Remarques.* I. La formule connue, presque évidente:

$$\int_0^\infty e^{-p\alpha} \cos q\alpha \, d\alpha = \frac{p}{p^2 + q^2},$$

donne

$$\frac{1}{1 + x^2} - \frac{3}{9 + x^2} + \frac{5}{25 + x^2} - \ldots = \int_0^\infty \cos \alpha x (e^{-\alpha} - e^{-3\alpha} + e^{-5\alpha} - \ldots) d\alpha,$$

ou

$$y' = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} d\alpha.$$

Nous venons de trouver

$$y' = \frac{\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}}.$$

Ainsi

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} d\alpha = \frac{\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}}. \tag{86}$$ [1]

II. A cause de

$$\varpi(x) = 2x \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t x} - 1} \operatorname{arctg} t,$$

1) Bierens de Haan, T. 281.

(18), on a aussi

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)-\varpi\left(\frac{3}{2}\right)+\varpi\left(\frac{5}{2}\right)-\ldots=\int_0^\infty \operatorname{arctg} t\left[\frac{1}{e^{\pi t}-1}-\frac{3}{e^{3\pi t}-1}+\ldots\right]dt. \tag{87}$$

Si l'on fait

$$e^{\pi t}=\frac{1}{z},$$

la série se transforme en

$$Z=\frac{z}{1-z}-3\frac{z^3}{1-z^3}+5\frac{z^5}{1-z^5}-\ldots; \tag{88}$$

d'où, par le développement de chaque fraction:

$$Z=\sum_1^\infty A_n z^n=\sum_1^\infty A_n e^{-n\pi t}. \tag{89}$$

Évidemment, A_n *égale l'excès de la somme des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu+1$, *sur la somme de ceux qui ont la forme* $4\mu-1$. Je ne pense pas que la fonction Z ait été déterminée. Néanmoins, par les formules (84) et (87):

$$\int_0^\infty Z\operatorname{arctg} t\,dt=\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\cdot\operatorname{arctg}\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1}. \tag{90}$$

32. On a vu, ci-dessus (27), un développement de l'intégrale de Kummer:

$$B=\int_0^\infty \frac{e^{-qx}-e^{-px}}{1+e^{-x}}\frac{dx}{x}.$$

Nous allons en former un autre, moins simple, mais qui donne lieu à quelques remarques intéressantes.

On a

$$B=\int_0^\infty \frac{e^{-(q-\frac{1}{2})x}-e^{-(p-\frac{1}{2})x}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}\frac{dx}{x}=\int_0^\infty \frac{e^{-(2q-1)x}-e^{-(2p-1)x}}{e^x+e^{-x}}\frac{dx}{x}.$$

Soit, pour fixer les idées, $p>q$. On a encore

$$B=\int_0^\infty e^{-(2p-1)x}\frac{e^{(2p-2q)x}-1}{e^x+e^{-x}}\frac{dx}{x}; \tag{91}$$

puis, en développant $\dfrac{e^{(2p-2q)x}-1}{x}$:

$$B = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} dx \left[\frac{2p-2q}{1} + \frac{(2p-2q)^2}{1.2} x + \frac{(2p-2q)^3}{1.2.3} x^2 + \ldots \right];$$

ou enfin

$$B = \sum_1^{\infty} \frac{(2p-2q)^n}{\Gamma(n+1)} \mathrm{B}_n, \tag{92}$$

en supposant

$$\mathrm{B}_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} x^{n-1} dx. \tag{93}$$

Le dénominateur surpasse e^x; donc

$$\mathrm{B}_n < \int_0^{\infty} e^{-2px} . x^{n-1} dx,$$

ou

$$\mathrm{B}_n < \frac{\Gamma(n)}{(2p)^n}.$$

Par suite, dans la série (92), le terme général est inférieur à $\frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p}\right)^n$; donc *cette série est convergente*. En outre, à cause de

$$\frac{p-q}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p}\right)^3 + \ldots = -\mathrm{L}.\left(1 - \frac{p-q}{p}\right) = \mathrm{L}.\frac{p}{q},$$

on a

$$B < \mathrm{L}.\frac{p}{q}.$$ [1]

33. (*Suite.*) On tire, de la formule (93),

$$\frac{d\mathrm{B}_n}{dp} = -2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} x^n dx;$$

---

1) On vérifie ce résu tat en partant de la formule de Kummer (27), et en prenant le développement de

$$\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)};$$

savoir:

$$1 - \frac{1}{2}\frac{q-p}{q} - \frac{1}{2.4}\frac{(q-p)(q-p-2)}{q(q+2)} - \ldots$$

La somme de la série est moindre que $1 - \frac{q-p}{2q} = \frac{p+q}{2q} < \frac{p}{q}$. Donc

$$B < \mathrm{L}\cdot\frac{p}{q}.$$

ou, ce qui revient au même,

$$B_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{dBn}{dp}. \tag{94}$$

Par conséquent, si l'on part de

$$B_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2px} + e^{(2p-2)x}}, \tag{95}$$

on aura:

$$B_2 = -\frac{1}{2}\frac{dB_1}{dp}, \quad B_3 = \frac{1}{2^2}\frac{d^2B_1}{dp^2}, \quad B_4 = -\frac{1}{2^3}\frac{d^3B_1}{dp^3}, \ldots;$$

puis, au lieu de la formule (92):

$$-\frac{1}{2}B = \frac{q-p}{1}B_1 + \frac{(q-p)^2}{1.2}\frac{dB_1}{dp} + \frac{(q-p)^3}{1.2.3}\frac{dB_1}{dp^2} + \ldots \tag{96}$$

Supposons

$$B_1 = F'(p): \tag{97}$$

la série est le développement de $F(q) - F(p)$. Donc

$$B = 2\,[F(p) - F(q)]. \tag{98}$$

34. (*Suite.*) Dans la valeur de B_1 (95), remplaçons e^{2x} par z: l'intégrale devient

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \frac{1}{4}\left[\varphi'\left(\frac{p+1}{2}\right) - \varphi'\left(\frac{p}{2}\right)\right]\text{[1]}.$$

Ainsi

$$B_1 = \frac{1}{4}\left[\varphi'\left(\frac{p+1}{2}\right) - \varphi'\left(\frac{p}{2}\right)\right]. \tag{99}$$

Cette expression de B_1 donne:

$$F(p) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{p+1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right] + const.,$$

---

1) Bierens de Haan, T. 3. Pour vérifier cette égalité importante, il suffit, par exemple, d'employer la formule

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t}\,dt. \tag{69}$$

On en déduit

$$\varphi'(x) - \varphi'\left(x - \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{x-\frac{3}{2}}\left(1-t^{\frac{1}{2}}\right)}{1-t}\,dt;$$

ou, par le changement de t en z^2:

$$\varphi'(x) - \varphi'\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^1 \frac{z^{2(x-1)}}{1+z}\,dz;$$

etc.

$$F(p)-F(q)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{p+1}{2}\right)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)-\varphi\left(\frac{q+1}{2}\right)+\varphi\left(\frac{q}{2}\right)\right],$$

et enfin

$$B=\int_0^\infty \frac{e^{-qx}-e^{-px}}{1+e^{-x}}\frac{dx}{x}=\mathrm{L}.\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}; \tag{27}$$

formule de Kummer.

35. *Remarque.* Le dernier calcul peut être présenté plus simplement. De

$$\mathrm{B}_1=F'(p)=\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2px}+e^{(2p-2)x}},$$

on déduit, en regardant p comme une variable dont q serait la valeur initiale :

$$F(p)-F(q)=\int_q^p dp\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2px}+e^{(2p-2)x}},$$

ou

$$F(p)-F(q)=\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^{-2x}}\int_q^p e^{-2px}\,dp.$$

L'intégrale relative à p est

$$-\frac{1}{2x}\left[e^{-2px}-e^{-2qx}\right].$$

Donc

$$F(p)-F(q)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2qx}-e^{2px}}{1+e^{-2x}}\frac{dx}{x},$$

ou

$$F(p)-F(q)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-qx}-e^{-px}}{1+e^{-x}}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}B.$$

36. Soit, plus généralement,

$$D=\int_0^\infty \frac{e^{-qx}-e^{-px}}{1+e^{-x}}f(x)\frac{dx}{x}, \tag{100}$$

la fonction $f(x)$ étant convenablement choisie.

On trouve, sans nouveaux calculs,

$$D=\sum_1^\infty \frac{(2p-2q)^n}{\Gamma(n+1)}\mathrm{D}_n, \tag{101}$$

en supposant

$$\mathrm{D}_n=\int_0^\infty \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x+e^{-x}}f(x)\,dx. \tag{102}$$

Soit
$$D_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} f(x)\,dx = F'(p). \tag{103}$$
Alors
$$F(p) - F(q) = \int_q^p dp \int_0^\infty \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{1+e^{-2x}} \int_q^p e^{-2px}\,dp,$$
ou
$$F(p) - F(q) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2qx} - e^{-2px}}{1+e^{-2x}} \frac{dx}{x} f(x),$$
ou enfin
$$F(p) - F(q) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1+e^{-x}} \frac{dx}{x} f\left(\frac{x}{2}\right). \tag{104}$$

Ainsi, entre D et $F(p) - F(q)$, il existe une analogie simple. C'est ce que nous voulions faire observer.

37. *Remarque.* D'après les valeurs de B_2, B_3, B_4, (**33**), il est clair que
$$B_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{d^{n-1} B_1}{dp^{n-1}}. \tag{105}$$
Or, par les formules (70) et (99):
$$B_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} - \ldots\right] \text{[1]} \tag{106}$$
Donc
$$B_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Gamma(n) \left[\frac{1}{p^n} - \frac{1}{(p+1)^n} + \frac{1}{(p+2)^n} - \ldots\right] \text{[2]} \tag{107}$$

38. Soient $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$: la dernière égalité se réduit à
$$B_2 = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots = G.$$
Donc (105)
$$G = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2px} + e^{(2p-2)x}}}{dp},$$
pourvu que, dans le résultat, on fasse $p = \frac{1}{2}$. En effet, on retrouve ainsi
$$G = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x}}. \tag{4}$$

---

1) Cette expression résulte, aussi, de la transformation effectuée sur la formule (95) [**34**, note].

2) L'intégrale (93), développée, conduit au même résultat.

39. Prenons, comme nouvel exemple de série, l'intégrale

$$E = \int_0^\infty \frac{e^x - 1}{e^{(1+a)x} + 1} \frac{dx}{x}, \tag{108}$$

la constante a étant supposée positive. [1])

On a d'abord, en remplaçant $\frac{e^x - 1}{x}$ par son développement,

$$E = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{(1+a)x} + 1} \left[\frac{1}{\Gamma(2)} + \frac{x}{\Gamma(3)} + \frac{x^2}{\Gamma(4)} + \ldots\right];$$

puis, en développant la fraction:

$$E = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Gamma(2)} + \frac{x}{\Gamma(3)} + \ldots\right] e^{-(1+a)nx}\, dx.$$

Si l'on effectue les intégrations, cette égalité devient

$$E = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{n(1+a)} + \frac{1}{2n^2(n+a)^2} + \frac{1}{3n^3(n+a)^3} + \ldots\right],$$

ou

$$E = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\, \mathrm{L} \cdot \frac{n(1+a)}{n(1+a) - 1}, \tag{109}$$

ou enfin

$$E = \mathrm{L} . \left[\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+2a}{2+2a} \cdot \frac{3+3a}{2+3a} \cdot \frac{3+4a}{4+4a} \ldots\right] {}^{2}). \tag{110}$$

40. Au moyen de la formule de Kummer, l'intégrale E peut être mise sous une autre forme. En effet, cette intégrale est la même chose que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-(1+a)x}}{1 + e^{-(1+a)x}}\, dx.$$

1) Si elle était négative ou nulle, l'intégrale serait infinie.

2) On parvient immédiatement à ce résultat en écrivant ainsi l'intégrale (108):

$$E = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \int_0^\infty \frac{e^x - 1}{x} e^{-n(1+a)x}\, dx,$$

et en appliquant la formule (28). Mais nous avons voulu donner un exemple de la méthode indiquée ci-dessus (**32**).

Donc, si l'on change x en $\frac{x}{1+a}$:

$$E = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{a}{1+a}\right)x} - e^{-x}}{1+e^{-x}} \frac{dx}{x};$$

ou, par la formule citée,

$$E = \mathrm{L} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+2}\right)}. \tag{111}$$

A cause de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, la comparaison avec la valeur (110) donne ce résultat curieux:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+2}\right)} = \sqrt{\pi}\,\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+2a}{2+2a} \cdot \frac{3+3a}{2+3a} \cdot \frac{3+4a}{4+4a} \cdots \tag{112}$$

En particulier, si $a = 1$:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\pi}\,\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{12} \cdots {}^{1)} \tag{113}$$

41. *Remarques* I. Nous avons trouvé, précédemment,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 4 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdots \tag{44}$$

Il résulte, de ces deux expressions,

$$\pi = \frac{3}{1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{11}{9} \cdot \left(\frac{12}{11}\right)^2 \cdot \frac{11}{13} \cdots,$$

ou

$$\pi = \frac{4^2}{1.3} \cdot \frac{3.5}{6^2} \cdot \frac{8^2}{5.7} \cdot \frac{7.9}{10^2} \cdot \frac{12^2}{9.11} \cdots \tag{114}$$

II. On obtient encore, par division,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{12}{11} \cdots,$$

ou

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{12}{13} \cdots \tag{115}$$

---

1) Dans le second membre, les nombres 1, 2, 3, 4,... sont disposés de manière à former *une grecque*.

III. On sait que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}\,F_1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).\ ^{1)}$$

Donc

$$\sqrt{2}\,F_1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = 3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{15}{14}\cdots \tag{116}$$

Ce développement de l'intégrale elliptique, $F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, me paraît remarquable. [2])

42. La formule (112) peut être écrite autrement.

Par un théorème d'Euler,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+2}\right)} = \mathrm{B}\left(\frac{a}{2a+2},\ \frac{a+1}{2a+2}\right),$$

ou

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{B}\left(\frac{a}{2a+2},\ \frac{1}{2}\right).$$

Donc, au lieu de la formule (112),

$$\mathrm{B}\left(\frac{a}{2a+2},\ \frac{1}{2}\right) = \pi\,\frac{1+a}{a}\,\frac{1+2a}{2+2a}\,\frac{3+3a}{2+3a}\,\frac{3+4a}{4+4a}\cdots \tag{117}$$

Si l'on fait

$$\frac{a}{2a+2} = p,$$

on trouve :

$$a = \frac{2p}{1-2p},\quad 1+a = \frac{1}{1-2p},\quad 1+2a = \frac{1+2p}{1-2p},\quad 2+2a = \frac{2}{1-2p},$$

$$3+3a = \frac{3}{1-2p},\quad 2+3a = \frac{2+2p}{1-2p},\ \ldots;$$

$$\frac{1+a}{a} = \frac{1}{2p},\quad \frac{1+2a}{2+2a} = \frac{1+2p}{2},\quad \frac{3+3a}{2+3a} = \frac{3}{2+2p},\quad \frac{3+4a}{4+4a} = \frac{3+2p}{4},\ \ldots;$$

puis

$$\mathrm{B}\left(p,\ \frac{1}{2}\right) = \pi\,\frac{1}{2p}\cdot\frac{1+2p}{2}\cdot\frac{3}{2+2p}\cdot\frac{3+2p}{4}\cdot\frac{5}{4+2p}\cdot\frac{5+2p}{6}\cdots \tag{118}$$

---

1) *Sur quelques formules relatives aux intégrales eulériennes*, p. 15.

2) On pourrait le simplifier encore, du moins en apparence, au moyen de la valeur

$$\sqrt{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{14}{15}\cdots$$

donnée par Euler (*Introduction à l'Analyse*, tome I, p. 141). Relativement à la quantité $F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, on peut consulter le Compte rendu de la *Session du Hâvre* (*Association française pour l'Avancement des Sciences*).

43. *Remarque.* Ce développement de $B\left(p, \frac{1}{2}\right)$ a été obtenu en supposant *a positif* (**39**); et, par conséquent, p compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. Mais *il subsiste pour toutes les valeurs positives de p.* Pour démontrer cette proposition, posons

$$N_\lambda = \frac{1.3.5 \ldots (2\lambda - 1)}{2.4.6 \ldots 2\lambda} \frac{(1+2p)(3+2p)\ldots(2\lambda-1+2p)}{2p(2+2p)\ldots(2\lambda-2+2p)},$$

et cherchons vers quelle limite tend cette quantité, lorsque λ croît indéfiniment.

Il est visible que

$$N_\lambda = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ldots\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}{1.2.3\ldots\lambda} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}+p\right)\left(\frac{3}{2}+p\right)\ldots\left(\lambda-\frac{1}{2}+p\right)}{p(1+p)(2+p)\ldots(\lambda-1+p)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)} \cdot \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+p\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(\lambda+p)}$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+p\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+p)}.$$

Or,

$$\lambda + \frac{1}{2} + \lambda + \frac{1}{2} + p = \lambda + 1 + \lambda + p;$$

donc (**9**) la limite du second facteur est 1.

En conséquence,

$$lim.\ N_\lambda = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)},$$

et

$$\pi\ lim.\ N_\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} = B\left(p, \frac{1}{2}\right).$$

44. *Suite.* Le premier membre de l'égalité (118) est

$$\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{p-1}\,d\theta.$$

Soient

$$\theta = \sin^2\varphi,\quad p = \frac{q}{2}:$$

l'intégrale se transforme en

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q-1}\varphi\,d\varphi,$$

et la formule (118) devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{(2n-1)(2n-1+q)}{2n(2n-2+q)} \text{ [1]}. \tag{119}$$

Celle-ci, que je crois nouvelle, a des conséquences nombreuses, sur lesquelles je reviendrai peut-être, dans une autre occasion. En attendant, je fais observer que, *si q est un nombre entier*, cette formule (119) donne le développement, en produit indéfini, soit de π, soit de la fraction

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (q-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (q-1)}.$$

45. Comme dernière application du procédé indiqué ci-dessus (**32**), cherchons le développement de l'intégrale

$$F = \int_0^{\infty} \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x} + 1} \frac{dx}{x^2}, \tag{120}$$

ou

$$F = \int_0^{\infty} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{e^x + e^{-x}} \frac{dx}{x^2}. \text{ [2]}$$

On a

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = 2\left[\frac{1}{\Gamma(3)} + \frac{x^2}{\Gamma(5)} + \frac{x^4}{\Gamma(7)} + \ldots\right];$$

donc

$$F = 2\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Gamma(3)} + \frac{x^2}{\Gamma(5)} + \frac{x^4}{\Gamma(7)} + \ldots\right] e^{-(2n-1)x}\, dx,$$

ou, si l'on effectue les intégrations:

$$F = 2\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{1.2(2n-1)} + \frac{1}{3.4(2n-1)^3} + \frac{1}{5.6(2n-1)^5} + \ldots\right]. \tag{121}$$

Pour $n = 1$, la série entre parenthèses est un développement de L . 2. Lorsque n surpasse 1, on prouve, aisément, que la somme de cette série est

---

1) Si q est un grand nombre, les facteurs $\frac{1}{q}$, $\frac{3}{2+q}$, $\frac{5}{4+q}$, ... sont fort petits, et les autres sont considérables. De là résultent des écarts excessifs entre les résultats que l'on obtiendrait en prenant un facteur, deux facteurs, trois facteurs,... C'est pour éviter cet inconvénient que, dans la formule (119), nous avons groupé deux facteurs consécutifs.

2) D'après la formule (23),

$$G = \frac{\pi}{4} F.$$

$$\frac{1}{2} \text{L} \cdot \frac{n}{n-1} + \frac{2n-1}{2} \text{L} \cdot \frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}.$$ [1]

Par conséquent,

$$F = 2 \text{L} . 2 - \sum_2^{\infty} (-1)^n \left[\text{L} \cdot \frac{n}{n-1} + (2n-1) \text{L} \cdot \frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2} \right],$$

ou

$$F = 2 \text{L} . 2 - \text{L} . \left[\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \right] - \text{L} \cdot \left[\left(\frac{8}{9}\right)^3 \left(\frac{25}{24}\right)^5 \left(\frac{48}{49}\right)^7 \left(\frac{81}{80}\right)^9 \cdots \right].$$

Le premier produit a pour limite $\frac{\pi}{2}$. Donc, finalement,

$$F = \text{L} \cdot \left[\frac{8}{\pi} \left(\frac{9}{8}\right)^3 \left(\frac{24}{25}\right)^5 \left(\frac{49}{48}\right)^7 \left(\frac{80}{81}\right)^9 \cdots \right]. \tag{122}$$ [2]

46. *Remarques I.* On vient de voir que

$$\frac{1}{2} \text{L} \cdot \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2x} \text{L} . (1-x^2) = \frac{1}{2x} [(1+x) \text{L} . (1+x) + (1-x) \text{L} . (1-x)],$$

---

1) Soient, en effet:

$$x = \frac{1}{2n-1}, \quad y = \frac{1}{2} \text{L} \cdot \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2x} \text{L} . (1-x^2).$$

Le développement de y est

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots - \frac{1}{2} \left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} + \cdots \right],$$

ou

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^5}{5.6} + \cdots \quad \textit{C. Q. F. D.}$$

D'ailleurs, comme on peut écrire:

$$y = \frac{1}{2x} (1+x) \text{L} . (1+x) + \frac{1}{2x} (1-x) \text{L} . (1-x),$$

la vraie valeur de cette fonction y, répondant à $x = 1$, est L.2. C'est pour éviter toute *introduction de séries divergentes*, que nous avons considéré, *à part*, le cas de $x = 1 = n$.

2) Chacun des facteurs, ou son inverse, a la forme

$$\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)^k,$$

k étant *impair*. Or,

$$\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k^2-1}\right)^{\frac{k^2}{k}}$$

a pour limite l'unité. Donc le produit entre parenthèses est convergent.

ou

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\cdot\frac{n}{n-1}+\frac{2n-1}{2}\,\mathrm{L}\cdot\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{2n-1}{2}\left[\frac{2n}{2n-1}\,\mathrm{L}\cdot\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n-2}{2n-1}\,\mathrm{L}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\right].\,^{1})$$

Il résulte, de cette identité,

$$F=2\,\mathrm{L}.2-2\sum_{2}^{\infty}(-1)^n\left[n\,\mathrm{L}\cdot\frac{2n}{2n-1}+(n-1)\,\mathrm{L}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\right]. \tag{123}$$

Mais, avant de passer des logarithmes aux nombres, on doit modifier les deux termes entre parenthèses, attendu qu'*ils n'ont pas pour limite zéro.* [2]).

Or,

$$n\,\mathrm{L}\cdot\frac{2n}{2n-1}+(n-1)\,\mathrm{L}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}=n\,\mathrm{L}\cdot\frac{4n^2-4n}{(2n-1)^2}+\mathrm{L}\cdot\frac{2n-1}{2n-2}.$$

Par conséquent,

$$F=2\,\mathrm{L}.2-2\,\mathrm{L}\cdot\left[\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{25}{24}\right)^3\left(\frac{48}{49}\right)^4\left(\frac{81}{80}\right)^5\cdots\right]-2\,\mathrm{L}\cdot\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{10}\cdots\right];$$

puis

$$F=\mathrm{L}.\left\{2\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2\left(\frac{24}{25}\right)^3\left(\frac{49}{48}\right)^4\left(\frac{80}{81}\right)^5\cdots\right]\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdots\right]\right\}^2. \tag{124}$$

II. La comparaison avec la valeur (122) donne

$$\frac{2}{\pi}=\frac{9}{8}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{80}{81}\cdots\times\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdots\right]^2. \tag{125}$$

---

1) En passant, mentionnons l'*équivalence* entre trois séries.

On a

$$\mathrm{L}\cdot\frac{1+x}{1-x}=\mathrm{L}\cdot\frac{n}{n-1}=-\,\mathrm{L}\cdot\frac{n-1}{n},$$

ou

$$2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right]=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{(n-1)^3}-\cdots$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots;$$

ou, à cause de $x=\frac{1}{2n-1}$:

$$\left.\begin{aligned}&2\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3(2n-1)^3}+\frac{1}{5(2n-1)^5}+\frac{1}{7(2n-1)^7}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2(n-1)^2}+\frac{1}{3(n-1)^3}-\frac{1}{4(n-1)^4}+\cdots\\&=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\frac{4}{4n^4}+\cdots\end{aligned}\right\}$$

2) Le premier tend vers $\frac{1}{2}$, et le second, vers $-\frac{1}{2}$.

III. Nous avons trouvé

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{11}{10} \cdots; \tag{115}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{11} \cdots\right]^2 = \frac{16}{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right]^2.$$

La formule (125) peut donc être remplacée par celle-ci:

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 8 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{121}{120} \cdots \tag{126}$$

IV. Nous avons trouvé, aussi,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 4 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdots \tag{44}$$

Donc: *les produits continus:*

$$8 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{121}{120} \cdots,$$

$$4 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdots$$

ont pour limite commune:

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = \frac{8}{\pi}\left[F_1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\right]^2. \text{ [1]}$$

---

1) Au moyen des *tables de la fonction gamma* (*Calcul intégral de Bertrand*), on trouve

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 8,753\ 76\ldots$$

Cela posé, la formule (126) donne, comme valeurs de plus en plus approchées:

8; 9; 8, 64; 8, 82; 8, 711; 8, 783 6; ...,

et la formule (44):

4; 12; 7, 2; 10, 08; 7, 84; 9, 582 2; 8, 108 0 ...

On voit que les premiers produits sont bien plus convergents que les seconds.

V. D'après la dernière relation,

$$\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdots\right]^2=\frac{2}{[F_1(\sqrt{\frac{1}{2}})]^2}.$$

Donc, au lieu de la formule (124), on peut adopter celle-ci:

$$F=\mathrm{L}\,.\left\{2\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2\left(\frac{24}{25}\right)^3\left(\frac{49}{48}\right)^4\left(\frac{80}{81}\right)^5\cdots\right]\right\}^2+\mathrm{L}\,.\,2-\mathrm{L}\,.\left[F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right]^2,$$

ou

$$F=3\,\mathrm{L}\,.\,2-2\,\mathrm{L}\,.\left\{F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{25}{24}\right)^3\left(\frac{48}{49}\right)^4\left(\frac{81}{80}\right)^5\cdots\right\}. \tag{127}$$

VI.

Développements de la constante G.

47. Dans le *Mémoire sur la transformation des séries*, et dans les *Mélanges mathématiques*, nous avons donné les formules:

$$G=\frac{19}{18}-32\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^2}, \tag{128}$$

$$G=\frac{2\,909}{3\,150}-768\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)^2(2n+7)}, \tag{129}$$

$$G=\frac{\pi}{16}\left[\frac{S_2}{2.4}+\frac{S_4}{4.5.16}+\frac{S_6}{6.7.16^2}+\frac{S_8}{8.9.16^3}+\ldots\right]-\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{L}\cdot\frac{\pi}{2}-1\right],\ ^{1)} \tag{130}$$

et quelques autres.

---

1) Celle-ci est une conséquence de la relation

$$G=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{L}\,.\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{L}\,.\,\mathrm{tg}\,x\,.\,dx. \tag{3}$$

Suivant l'usage, S_2, S_4, S_6, ... représentent, respectivement, les sommes

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

calculées par Euler et Legendre.

Pour trouver de nouveaux développements de G, il nous suffira d'appliquer, aux expressions contenues dans le premier chapitre, les procédées de calcul indiqués ci-dessus.

48. La formule (3), que nous venons de rappeler, peut être écrite ainsi:

$$G = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L}\,.\,\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\,dx.$$

Le développement du logarithme est

$$2\left[\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + \ldots\right].$$

D'ailleurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}.$$

Donc

$$G = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7} + \ldots\right]; \tag{131}$$

mais la série, bien que convergente[1]), l'est très peu.

49. Prenons encore la formule (3), mise sous la forme

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L}\,.\cot\frac{1}{2}\alpha\,d\alpha. \tag{132}$$

On a [2])

$$\mathrm{L}\,.\cot\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha + \frac{1}{2}X_1\cos 2\alpha + \frac{1}{3}X_2\cos 3\alpha + \frac{1}{4}X_3\cos 4\alpha + \ldots,$$

---

1) Le terme général est

$$u_n = \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}.$$

On a donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{2n}{2n+1},$$

$$(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} - n = \frac{2n(n+1)(2n-1) - n(2n+1)^2}{(2n+1)^2} = -\frac{n(2n+3)}{(2n+1)^2},$$

puis

$$lim.\left[(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} - n\right] = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, d'après un théorème connu, *la série est convergente* (*Traité élémentaire des séries*, p. 23).

2) *Sur les fonctions X_n, de Legendre* (second Mémoire, p. 51). Je rappelle que

$$x = \cos\alpha.$$

ou
$$\mathrm{L}\,.\cot\frac{\alpha}{2}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}X_{n-1}\cos n\alpha.$$

Par conséquent
$$G=\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}X_{n-1}\cos n\alpha\,d\alpha. \tag{133}$$

Ainsi, *la quantité G peut être rattachée aux polynômes* X_n. La manière la plus simple de calculer l'intégrale
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}X_{n-1}\cos n\alpha\,d\alpha$$

consiste, me semble-t-il, à remplacer X_{n-1} par son développement connu: [1])
$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{p=0}(-1)^p C_{n-1,\,p}\,.\,C_{2n-2p-2,\,n-1}\,.\cos^{n-2p-1}\alpha;$$

mais, néanmoins, les calculs se compliquent rapidement.

50. De la formule
$$G=\frac{\pi}{4}\int_{0}^{\infty}\frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{e^{x}+e^{-x}}\frac{dx}{x^2}, \tag{23}$$

on conclut (**45**, **46**):
$$G=\frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}\,.\left[\frac{8}{\pi}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^5\left(\frac{49}{48}\right)^7\left(\frac{80}{81}\right)^9\cdots\right], \tag{134}$$

$$G=\frac{3\pi}{4}\mathrm{L}\,.\,2-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{L}\,.\left\{F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{25}{24}\right)^3\left(\frac{48}{49}\right)^4\left(\frac{81}{80}\right)^9\cdots\right\}. \tag{135}$$

51. Dans le n° **45**, pour former une expression de l'intégrale
$$F=\int_{0}^{\infty}\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{e^{x}+e^{-x}}\frac{dx}{x^2}=\frac{4}{\pi}G,$$

nous avons multiplié le développement de $\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^2}$ par le développement de $\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}$. En procédant d'une manière un peu différente, nous pouvons obtenir diverses séries, plus ou moins intéressantes.

---

1) *Mémoire sur les fonctions* X_n (p. 11).

Reprenons l'égalité

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = 2\left[\frac{1}{\Gamma(3)} + \frac{x^2}{\Gamma(5)} + \frac{x^4}{\Gamma(7)} + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = 2\sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+3)}.$$

Il en résulte, immédiatement,

$$G = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty \frac{1}{\Gamma(2n+3)}\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{e^x + e^{-x}}\,dx.\ ^{1)} \tag{136}$$

Au moyen de la formule connue:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \mathrm{E}_{2n},\ ^{2)}$$

la relation (136) devient

$$G = \frac{\pi}{4}\sum_0^\infty \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma(2n+3)}\mathrm{E}_{2n}. \tag{137}$$

Ce développement de la constante G, procédant suivant les puissances du nombre π, est absolument inapplicable. On peut le remplacer par un autre.

En effet, il est visible et connu que

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \Gamma(2n+1)\left[\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \ldots\right];$$

donc

$$G = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\left[\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} \ldots\right]. \tag{138}$$

---

1) On a vu que

$$G = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x}}. \tag{4}$$

Donc *l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x}}$$

est développée en une série dont les termes sont des intégrales définies, d'apparence un peu plus compliquée que la première.

2) *Sur les Nombres de Bernoulli et d'Euler*, p. 10.

52. *Remarque.* Cette nouvelle formule présente, pour ainsi dire, la même particularité que la formule (136): *la série*

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots$$

est la somme d'une infinité de séries analogues à celle-ci. [1]).

53. Reprenons la formule

$$G = \frac{\pi^2}{8}\int_0^1 \frac{xdx}{\sin\frac{\pi}{2}x}. \tag{6}$$

On sait que

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) - \left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}\right) + \ldots;$$

d'où, par le changement de x en $\frac{x}{2}$:

$$\frac{x}{\sin\frac{\pi}{2}x} = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\left[\frac{x}{2n-x} - \frac{x}{2n+x}\right].$$

L'expression ci-dessus devient donc

$$G = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\int_0^1 \left[\frac{x}{2n-x} - \frac{x}{2n+x}\right] dx. \tag{139}$$

La quantité entre parenthèse égale

$$2\left[\frac{n}{2n-x} + \frac{n}{2n+x} - 1\right].$$

Par conséquent, si l'on fait

$$u_n = n\,\mathrm{L}\cdot\frac{2n+1}{2n-1} - 1, \tag{140}$$

on a

$$G = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n. \tag{141}$$

54. *Suite.* D'après la relation

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\cdot\frac{x+1}{x} - 1, \tag{62}$$

---

1) Par un calcul que je supprime, on transforme la dernière valeur de G, contenant une *série double*, en

$$G = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}\cdot\left[\frac{8}{\pi}\left(\frac{9}{8}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^5\left(\frac{49}{48}\right)^7\left(\frac{80}{81}\right)^9\cdots\right]. \tag{136}$$

il est visible que

$$u_n = \varpi\left(\frac{2n-1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{2n+1}{2}\right). \tag{142}$$

Donc, par un calcul déjà effectué (**29**):

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n = -\varpi\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left[\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{3}{4}\right) + \varpi\left(\frac{5}{2}\right) - \ldots\right];$$

puis, à cause de

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.2, \tag{50}$$

et de

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{3}{2}\right) + \varpi\left(\frac{5}{2}\right) - \ldots = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\operatorname{arctg}\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1}: \tag{83}$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{L}.2) + 2\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\operatorname{arctg}\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1}.$$

Au moyen de cette valeur, la formule (141) se transforme en

$$G = \frac{\pi}{4}\mathrm{L}.2 + \pi\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\operatorname{arctg}\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1}. \tag{143}$$

55. *Suite.* Pour simplifier cette nouvelle expression de G, posons

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1} = t,$$

ou

$$\frac{\pi}{2}x = \mathrm{L}.(1+t) - \mathrm{L}.(1-t).$$

Il résulte, de ce changement de variable:

$$dx = \frac{4}{\pi}\frac{dt}{1-t^2}, \quad e^{\pi x} - 1 = \frac{4t}{(1-t)^2};$$

puis

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\operatorname{arctg}\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}\frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt; \tag{144}$$

et, finalement,
$$G = \frac{\pi}{4}\mathrm{L}.2 + \int_0^1 \frac{1-t}{1+t}\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt. \tag{145}$$

56. *Remarques.* I. La comparaison de cette formule avec celle-ci:
$$G = \frac{\pi}{4}\mathrm{L}.2 + 2\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx, \tag{9}$$
donne
$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx; \tag{146}$$
ou, après quelques réductions:
$$\int_0^1 \frac{1-x-x^2-3x^3}{x(1+x)(1+x^2)} \operatorname{arctg} x\,dx = 0. \tag{147}$$

Ce résultat, qui est connu[1]), sert de vérification aux calculs précédents.[2])

II. L'intégration par parties change la formule (9) en
$$G = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}.2 + \left[x(\operatorname{artcg} x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\,dx,$$
ou
$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}.2 - G.\ ^{3)} \tag{148}$$

III. D'après les relations (89) et (90),
$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1} \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1} = \sum_1^\infty \mathrm{A}_n \int_0^\infty e^{-n\pi t} \operatorname{arctg} t\,dt;$$

---

1) *Mémoire sur la transformation ...*, p. 40.

2) Il y en a une bien plus simple: l'intégrale (145) se décompose en
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt - 2\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t}\,dt = G - 2\cdot\frac{\pi}{8}\mathrm{L}.2$$
(*Mémoire sur la transformation* ..., p. 54).

3) Dans les *Tables* de M. Bierens de Haan, je ne trouve pas cette intégrale; mais elle est une conséquence de celle-ci:
$$\int_0^1 (\operatorname{arc\,cot} x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{3\pi}{4}\,\mathrm{L}.2 - G,$$
donnée par le savant Géomètre.

puis, par la formule (143):

$$G = \frac{\pi}{4}\mathrm{L}\,.\,2 + \pi \sum_1^\infty \mathrm{A}_n \int_0^\infty e^{-n\pi x} \operatorname{arctg} x \, dx.\ ^{1)} \tag{149}$$

57. Pour trouver d'autres développements de G, il suffit de transformer le premier membre de l'égalité (148). A cet effet, observons que

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\right]\left[1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\right];$$

ou

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = x - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^5 - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)x^2 + \ldots;$$

et, par conséquent,

$$(\operatorname{arctg} x)^2 = x^2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{2} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{3} - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)\frac{x^8}{4} + \ldots\ ^{2)} \tag{150}$$

D'un autre côté:

$$1 = \int_0^1 d\alpha = \int_0^1 \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\,d\alpha, \quad 1 + \frac{1}{3} = \int_0^1 (1+\alpha^2)\,d\alpha = \int_0^1 \frac{1-\alpha^4}{1-\alpha^2}\,d\alpha, \ldots;$$

donc le second membre de l'égalité (150) se transforme en

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{1-\alpha^2}\left[(1-\alpha^2)x^4 - (1-\alpha^4)\frac{x^4}{2} + (1-\alpha^6)\frac{x^6}{3} - \ldots\right].$$

Si maintenant on multiplie par dx les deux membres, et que l'on intègre entre 0 et 1, on trouve

1) On ne doit pas oublier que A_n *égale l'excès de la somme des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu + 1$, *sur la somme de ceux qui ont la forme* $4\mu - 1$. (**31**). D'ailleurs, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-n\pi x} \operatorname{arctg} x \, dx$$

ne paraît pas exprimable sous forme finie (Bierens de Haan, *Tables*, seconde édition).

2) Ce développement, comparé à celui qui résulte du *carré* de la série

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

donne l'*identité*, presque évidente:

$$\frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right] = \frac{1}{1.(2n-1)} + \frac{1}{3.(2n-3)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).1}.$$

$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1-\alpha^2}\left[\frac{1}{1.3}(1-\alpha^2) - \frac{1}{2.5}(1-\alpha^4) + \frac{1}{3.7}(1-\alpha^6) - \ldots\right] \quad (151)$$

Pour simplifier le second membre, posons

$$S = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} - \frac{1}{4.8} + \ldots,$$

$$\Sigma = \frac{\alpha^2}{1.3} - \frac{\alpha^4}{2.5} + \frac{\alpha^6}{3.7} - \frac{\alpha^8}{4.8} + \ldots;$$

et, comme la première série est un cas particulier de la seconde, sommons d'abord celle-ci.

Il est visible que

$$\Sigma = 2\left[\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^4}{5} + \frac{\alpha^6}{6} - \frac{\alpha^6}{7} - \frac{\alpha^8}{8} + \frac{\alpha^8}{8} - \ldots\right],$$

ou

$$\Sigma = \frac{\alpha^2}{1} - \frac{\alpha^4}{2} + \frac{\alpha^6}{3} - \frac{\alpha^8}{4} + \ldots - 2\left[\frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^4}{5} + \frac{\alpha^6}{7} - \frac{\alpha^8}{9} + \ldots\right].$$

La première partie égale $\mathrm{L}.(1+\alpha^2)$; la seconde est le développement de $-\frac{2}{\alpha}(\alpha - \operatorname{arctg}\alpha)$. Donc

$$\Sigma = -2 + \mathrm{L}.(1+\alpha^2) + 2\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha},$$

$$S = -2 + \mathrm{L}.2 + \frac{\pi}{2},$$

$$S - \Sigma = \mathrm{L}.2 - \mathrm{L}.(1+\alpha^2) + \frac{\pi}{2} - 2\frac{\operatorname{artcg}\alpha}{\alpha}.$$

Au moyen de cette valeur, la relation (151) se transforme en

$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{L}.2 - \mathrm{L}.(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2}\,d\alpha + 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}}{1-\alpha^2}\,d\alpha; \quad (152)$$

mais celle-ci est encore réductible.

58. *Suite.* On a:

$$\mathrm{L}.2 - \mathrm{L}.(1+\alpha^2) = 1 - \alpha^2 - \frac{1}{2}(1-\alpha^4) + \frac{1}{3}(1-\alpha^6) - \frac{1}{4}(1-\alpha^8) + \ldots,$$

$$\frac{\mathrm{L}\ 2 - \mathrm{L}.(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2} = 1 - \frac{1}{2}(1+\alpha^2) + \frac{1}{3}(1+\alpha^2+\alpha^4) - \frac{1}{4}(1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6) + \ldots,$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{L}.2 - \mathrm{L}.(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\,d\alpha = 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \ldots;$$

ou (150):

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{L}.2 - \mathrm{L}.(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi^2}{16}. \tag{153}$$

Donc, au lieu de l'égalité (152),

$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{16} + 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}}{1-\alpha^2}\,d\alpha. \tag{154}$$

La comparaison avec la formule

$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}.2 - G, \tag{148}$$

donne

$$G = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}.2 - 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{1-x^2}\,dx. \tag{155}$$

59. *Remarque.* A cause de

$$G = -\frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}.2 + 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - x\operatorname{artcg} x}{1-x^2}\,dx, \tag{13}$$

on trouve, non-seulement

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx, \tag{1}$$

mais encore la relation

$$\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - x\operatorname{artg} x}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}.2. \tag{156}$$

60. *Intégrales définies.* I. Si l'on essaie de généraliser la formule

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{L}.2 - \mathrm{L}.(1+x^2)}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{16}, \tag{153}$$

on trouve, en opérant comme nous l'avons fait,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{L}.(1+\alpha^2) - \mathrm{L}.(1+\alpha^2x^2)}{1-x^2}\,dx = (\operatorname{arctg}\alpha)^2.\ ^{1)} \tag{157}$$

---

1) La *vérification* de cette égalité est bien facile: comme les deux membres s'annulent avec α, il suffit d'examiner si leurs dérivées sont identiques. C'est ce qui a lieu.

Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{L.4 - L.(1+3x^2)}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{9}, \quad \int_0^1 \frac{L.x}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{8},$$

etc.

II. Soient

$$\alpha = \operatorname{tg}\beta, \quad \alpha x = \operatorname{tg}\varphi:$$

la formule (157) devient

$$\int_0^\beta \frac{L.\frac{\cos\varphi}{\cos\beta}}{\sin(\beta+\varphi)\sin(\beta-\varphi)} = \frac{\beta^2}{\sin 2\beta}. \tag{158}$$

III. Soit encore

$$\cos\varphi = \frac{\cos\beta}{z};$$

et, par conséquent:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{z^2-\cos^2\beta}}{z}, \quad d\varphi = \frac{\cos\beta}{z\sqrt{z^2-\cos^2\beta}}\,dz, \quad L\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\beta} = -L.z,$$

$$\sin(\beta+\varphi)\sin(\beta-\varphi) = \sin^2\beta\cos^2\varphi - \cos^2\beta\sin^2\varphi = \frac{1-z^2}{z^2}\cos^2\beta, \text{ etc.}$$

On trouve

$$\int_{\cos\beta}^1 \frac{z\,L.z.dz}{(1-z^2)\sqrt{z^2-\cos^2\beta}} = -\frac{\beta^2}{2\sin\beta}. \tag{159}$$

Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{L.z\,dz}{1-z^2} = -\frac{\pi^2}{8};$$

formule connue.

61. Soit l'expression

$$G = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 dx. \tag{18}$$

On a, par une formule de Clausen, [1])

$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 = 2\left[\frac{1}{1.2} + \frac{2}{3.4}x^2 + \frac{2.4}{3.5.6}x^4 + \frac{2.4.6}{3.5.7.8}x^6 + \ldots\right].$$

---

1) *Traité élémentaire des séries*, p. 102.

Donc le développement de l'intégrale est

$$2\left[\frac{1}{1.2}+\frac{2}{3.4.3}+\frac{2.4}{3.5.6.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7.8.7}+\ldots\right];$$

et, en conséquence,

$$G=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{2}{3.4.3}+\frac{2.4}{3.5.6.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7.8.7}+\ldots\right]. \tag{160}$$

62. De la formule

$$G=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx\,dy}{1+\cos x\cos y}, \tag{26}$$

on conclut, immédiatement,

$$G=\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}(-1)^n\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\right]^2.$$

D'ailleurs, selon que n est *pair* ou *impair*, la valeur de l'intégrale est

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}$$

ou

$$\frac{2.4.6\ldots(n-1)}{3.5.7\ldots n}.$$

Par conséquent,

$$2G=\frac{\pi^2}{4}-1+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2-\left(\frac{2.4}{3.5}\right)^2+\ldots \tag{161}$$

A cause du facteur $\frac{\pi^2}{4}$, non commun à tous les termes de la série, ce développement est presque aussi incommode que l'un de ceux dont il a été fait mention ci-dessus (137).

Liège, 20 novembre 1882.