This page intentionally left blank.

Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques

par M. Eugène Catalan.

Dans un Mémoire publié en 1848 (*), M. Tortolini démontre, au moyen des coordonnées *elliptico-polaires* de Jacobi, le Théorème de Legendre, relatif aux fonctions complètes, à modules complémentaires. En rédigeant, pour mes Élèves, cette remarquable démonstration, il m'a semblé qu'on en peut rendre plus sensible l'interprétation géométrique, et qu'on peut aussi, en s'appuyant sur le principe qui a guidé le savant Géomètre romain, découvrir de nouveaux théorèmes, analogues à celui de Legendre. C'est ce que j'ai essayé de faire dans cette Note, qui se termine pas des remarques sur divers passages du *Traité des fonctions elliptiques*.

I.

Le Théorème de Legendre consiste en l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta(b,\varphi)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\,\Delta(c,\theta)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\Delta(c,\theta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,\Delta(b,\varphi)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta(b,\varphi)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\Delta(c,\theta)}=\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Si l'on pose

$$u=\sin\varphi\,,\qquad v=\sin\theta\,, \qquad (2)$$

on transforme aisément l'équation (1) en celle-ci :

$$\int_0^1\int_0^1\frac{(1-b^2u^2-c^2v^2)du\,dv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)(1-b^2u^2)(1-c^2v^2)}}=\frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Pour interpréter cette relation, je considère la sphère représentée par

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad (4),$$

et je suppose, comme M. Tortolini (**) :

$$x=u\sqrt{1-c^2v^2}\,,\qquad y=v\sqrt{1-b^2v^2}\,,\qquad z=\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)} \qquad (5).$$

Ces valeurs satisfont à l'équation (4), quels que soient les paramètres u, v. D'ailleurs, le $\frac{1}{8}$ de la surface sphérique a pour mesure $\frac{\pi}{2}$; donc

$$\iint\frac{dx\,dy}{z}=\int_0^1\int_0^1\frac{\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)du\,dv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}=\frac{\pi}{2}\,;$$

ou, par un calcul facile,

$$\int_0^1\int_0^1\frac{(1-b^2u^2-c^2v^2)du\,dv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)(1-b^2u^2)(1-c^2v^2)}}=\frac{\pi}{2}\,;$$

comme ci-dessus.

(*) *Sulla riduzione di alcuni integrali definiti ai trascendenti ellittici* (Giornale Arcadico, t. CXVI. *Agosto e Settembre* 1848).

(**) A la notation près.

On peut donc, ainsi que l'a trouvé M. Tortolini, parvenir au Théorème de Legendre en traçant sur la sphère les deux systèmes de courbes représentées par

$$u = const. \ , \qquad v = const. \ ,$$

et en prenant, pour élément de la surface sphérique, le quadrilatère qui a pour côtés deux courbes consécutives du premier système, et deux courbes consécutives du second. Voyons quelles sont ces courbes.

II.

Ou tire, des formules (5) :

$$\frac{b^2x^2}{1-c^2v^2}+\frac{y^2}{v^2}=1\ ,$$

ou, à cause de l'équation (4) :

$$\frac{c^2}{1-c^2v^2}\,x^2-\frac{1}{v^2}y^2+\frac{1}{1-v^2}\,z^2=0 \qquad \text{(A)} \ ;$$

puis, par un changement de lettres,

$$-\frac{1}{u^2}\,x^2+\frac{b^2}{1-b^2u^2}\,y^2+\frac{1}{1-u^2}\,z^2=0 \qquad \text{(B)}.$$

Les équations (A), (B) représentent deux cônes qui se coupent suivant quatre génératrices communes : le point où chacune de ces droites perce la sphère est déterminé par les formules (5).

Ces cônes sont orthogonaux. En effet, la condition ordinaire devient

$$-\frac{c^2}{u^2(1-c^2v^2)}\,x^2-\frac{b^2}{v^2(1-b^2u^2)}\,y^2+\frac{1}{(1-u^2)(1-v^2)}\,z^2=0\ ,$$

ou

$$-c^2-b^2+1=0\ ;$$

relation identique.

Les cônes (A), (B), orthogonaux l'un par rapport à l'autre, sont d'ailleurs orthogonaux relativement à la sphère; par conséquent, *les courbes suivant lesquelles ils la coupent sont orthogonales.*

Soient ds, $d\sigma$ les éléments des *coniques-sphériques* passant au point (x, y, z). On trouve

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2=\frac{1-b^2u^2-c^2v^2}{(1-u^2)(1-b^2u^2)}\ ,\qquad \left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2=\frac{1-b^2u^2-c^2v^2}{(1-v^2)(1-c^2v^2)}\ ;$$

donc, dA étant l'aire du *rectangle* déterminé par ces courbes et par les coniques infiniment voisines de celles-ci,

$$dA=\frac{(1-b^2u^2-c^2v^2)du\,dv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)(1-b^2u^2)(1-c^2v^2)}}\ ;$$

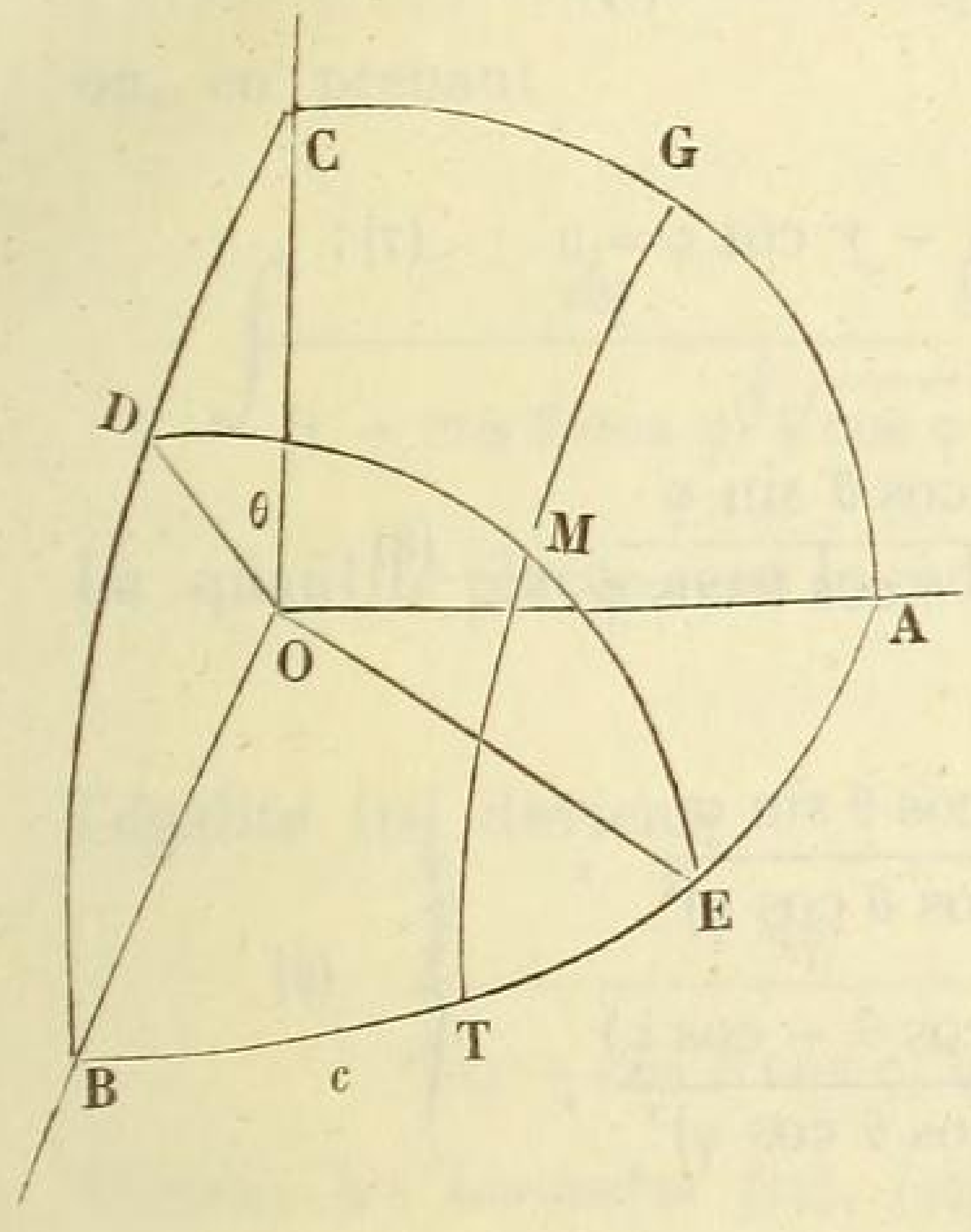
comme précédemment.

La conique–sphérique, intersection du cône (A) avec la sphère, a pour projection, sur le plan zx, l'ellipse représentée par

$$\frac{x^2}{1 - c^2 v^2} + \frac{z^2}{1 - v^2} = 1 . \qquad (A')$$

De même, la seconde conique a pour équation

$$\frac{y^2}{1 - b^2 u^2} + \frac{z^2}{1 - u^2} = 1 \qquad (B') .$$



Soient $BD = \gamma$, $BE = \alpha$ les demi–axes de la coniques–phérique DME représentée par l'équation (A'). On a

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - v^2} , \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - c^2 v^2} ,$$

ou

$$\cos \gamma = v = \sin \theta , \ \cos \alpha = cv = c \sin \theta ;$$

ainsi ,

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

$\theta = 0$ donne $v = 0$, $x^2 + z = 1$: l'ellipse DME se réduit à la circonference CGA.

Si l'on suppose $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou $v = 1$, on trouve $z = 0$; et la valeur de x paraît indéterminée. Mais, A, C désignant les demi–axes de l'ellipse (A'), on a

$$A^2 = 1 - c^2 v^2 , \quad C^2 = 1 - v^2 ;$$

d'où

$$A^2 - c^2 C^2 = b^2 ;$$

et, par conséquent, si $c = 0$, $A = b$. Ainsi, *la limite inférieure des coniques* DML *est un arc* Be *de la circonférence* BA.

Les mêmes remarques s'appliquent aux coniques–sphériques GMF, représentées par l'équation (B').

En résumé, *le Théorème de Legendre équivaut à la décomposition de la sphère en rectangles infiniment petits, au moyen de coniques sphériques orthogonales*. Si l'on *découpait* autrement la surface, on trouverait d'autres théorèmes, plus ou moins intéressants.

III.

Par exemple, considérons les coniques projetées, sur le plan xy , suivant les cercles *orthogonaux* représentés par

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + 1 = 0 \quad (C) , \qquad x^2 + y^2 + 2\beta y - 1 = 0 \quad (D). \quad (*).$$

(*) *Journal de Liouville*, tome XIX, p. 134.

Deux courbes consécutives appartenant aux système (C), et deux courbes consécutives appartenant au système (D), déterminent un quadrilatère sphérique infiniment petit. Nous allons évaluer cet élément de la surface, après quoi nous exprimerons que l'intégrale double égale $\frac{\pi}{2}$.

IV.

Pour simplifier les équations (C), (D), posons

$$\alpha = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \beta = \cot\varphi \qquad (6).$$

De là résulte

$$\frac{x}{\sin\theta} + y\cot\varphi = 1, \quad x^2+y^2 - \frac{x}{\sin\theta} + y\cot\varphi = 0 \qquad (7);$$

puis, par un calcul que nous supprimons :

$$x = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta\cos\varphi}, \quad y = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{1+\cos\theta\cos\varphi} \qquad (8).$$

On tire, des dernières formules:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{\cos\theta+\cos\varphi}{(1+\cos\theta\cos\varphi)^2}, & \frac{dx}{d\varphi} &= \frac{\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}{(1+\cos\theta\cos\varphi)^2}, \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\frac{\sin\theta\sin\varphi}{(1\cos\theta\cos\varphi)^2}, & \frac{dy}{d\varphi} &= \frac{\cos\theta(\cos\theta+\cos\varphi)}{(1+\cos\theta\cos\varphi)^2}; \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

puis

$$\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dy}{d\theta}\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\cos\theta}{(1+\cos\theta\cos\varphi)^2} \qquad (10).$$

L'élément de l'aire est

$$dA = \frac{dx\,dy}{z} = \frac{1}{z}\,\frac{\cos\theta\,d\theta\,d\varphi}{(1+\cos\theta\cos\varphi)^2};$$

mais

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{2\beta y} = \sqrt{\frac{2\cos\theta\cos\varphi}{1+\cos\theta\cos\varphi}};$$

donc

$$dA = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}}\,\frac{d\theta\,d\varphi}{(1+\cos\theta\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (11)$$

Si l'on fait varier θ et φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on a le $\frac{1}{8}$ de la surface; ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sqrt{\cos\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+\cos\theta\cos\varphi)\sqrt{\cos\varphi(1+\cos\theta\cos\varphi)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \qquad (E)$$

Telle est l'équation qui remplace la relation (3).

V.

Afin de réduire la première intégrale, je fais d'abord

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = p \operatorname{tg} \omega : \qquad (12)$$

il vient

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\cos\theta\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos\varphi}} = 2p\int \frac{(\cos^2\omega + p^2\sin^2\omega)d\omega}{\left[\cos^2\omega+p^2\sin^2\omega+\cos\theta(\cos^2\omega-p^2\sin^2\omega)\right]^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos^2\omega-p^2\sin^2\omega}};$$

ou, en prenant

$$p = \cot\tfrac{1}{2}\theta \qquad (13):$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\cos\theta\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta}\int \frac{(\cos^2\omega + \cot^2\frac{1}{2}\theta\sin^2\omega)d\omega}{\sqrt{\cos^2\omega - \cot^2\frac{1}{2}\theta\sin^2\omega}}. \qquad (14)$$

La quantité placée sous le radical égale $1 - \dfrac{\sin^2\omega}{\sin^2\frac{1}{2}\theta}$. Soit donc, en second lieu,

$$\sin\omega = \sin\tfrac{1}{2}\theta\sin\psi \qquad (15);$$

l'égalité (14) devient

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\cos\theta\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}\int \frac{1+\cos\theta\sin^2\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\theta\sin^2\psi}}. \qquad (16)$$

D'après les formules (12), (13), (15), on a, simultanément :

$$\varphi = 0, \quad \omega = 0, \quad \psi = 0;$$
$$\varphi = \tfrac{\pi}{2}, \quad \omega = \tfrac{1}{2}\theta, \quad \psi = \tfrac{\pi}{2}.$$

Ainsi, dans l'équation (16), les limites de la seconde intégrale sont 0 et $\frac{\pi}{2}$, lorsque la première intégrale est prise entre ces mêmes limites. Conséquemment, la relation (E) devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}\,d\theta}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos\theta\sin^2\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\theta\sin^2\psi}} = \pi;$$

ou, après quelques réductions évidentes,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}\,d\theta}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}\left[\cot^2\tfrac{1}{2}\theta\, F_1(\sin\tfrac{1}{2}\theta) - \frac{\cos\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta}E_1(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\right] = \pi \qquad (E').$$

VI.

Cette *réduite* de l'équation (E) peut être transformée à son tour. En effet, le premier membre (*) équivaut à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}\,d\theta}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}\,E_1(\sin\tfrac{1}{2}\theta) + \int_2^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}\,d\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta}\Big[F_1(\sin\tfrac{1}{2}\theta) - E_1(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\Big];$$

ou à

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dc\sqrt{1-2c^2}}{(1-c^2)^{\frac{3}{2}}}\,E_1(c) - 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dc\sqrt{1-2c^2}}{c^2\sqrt{1-c^2}}\,\big[E_1(c) - F_1(c)\big],$$

c représentant $\sin\frac{1}{2}\theta$.

La quantité entre parenthèses égale $c\,\dfrac{dE_1(c)}{dc}$ (**); de plus,

$$\frac{E_1(c)}{1-c^2} - \frac{1}{c}\,\frac{dE_1(c)}{dc} = -\frac{1}{c\sqrt{1-c^2}}\cdot\frac{d\big[\sqrt{1-c^2}E_1(c)\big]}{dc};$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{1-c^2}}{c(1-c^2)}\,d\big[\sqrt{1-c^2}E_1(c)\big] = -\frac{\pi}{2};$$

ou enfin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sin\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta}\,d\big[\cos\tfrac{1}{2}\theta\,E_1(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\big] = -\frac{\pi}{2}. \qquad (E'')$$

VII.

On sait que l'intégrale générale de l'équation

$$(1-c^2)\frac{d^2y}{dc^2} + \frac{1-c^2}{c}\,\frac{dy}{dc} + y = 0 \qquad (F)$$

est

$$y = \alpha E_1(c) + \beta\big[F_1(b) - E_1(b)\big] \qquad (G) \quad (***).$$

(*) On ne peut pas le remplacer par

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}\,d\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta}\,F_1(\sin\tfrac{1}{2}\theta) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}\,E_1(\sin\tfrac{1}{3}\theta),$$

parce que ces deux intégrales sont infinies.

(**) *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, p. 62.

(***) *Fonctions elliptiques*, tome I, p. 64.

Comme une intégrale particulière est $y_1 = E_1(c)$, on peut trouver l'intégrale générale sous une forme différente de (G), du moins en apparence. En effet, de l'équation (F), jointe à

$$(1-c^2)\frac{d^2 y_1}{dc^2} + \frac{1-c^2}{c}\frac{dy_1}{dc} + y_1 = 0,$$

on tire, par le procédé connu,

$$\frac{d\left(y_1 \frac{dy}{dc} - y\frac{dy_1}{dc}\right)}{y_1\frac{dy}{dc} - y\frac{dy_1}{dc}} + \frac{dc}{c} = 0;$$

équation dont l'intégrale est

$$c\left(y_1\frac{dy}{dc} - y\frac{dy_1}{dc}\right) = \lambda,$$

ou

$$d\frac{y}{y_1} = \frac{\lambda}{y_1^2}\frac{dc}{c}.$$

Par conséquent

$$y = E_1(c)\left[\lambda\int\frac{dc}{c[E_1(c)]^2} + \mu\right]. \qquad \text{(G')}$$

En comparant les valeurs (G), (G'), on trouve aisément

$$E_1(c)\left[\frac{dF_1(b)}{dc} - \frac{dE_1(b)}{dc}\right] - [F_1(b) - E_1(b)]\frac{dE_1}{dc} = \frac{\lambda}{\beta}\frac{1}{c}. \qquad (17)$$

Mais (*)

$$\frac{dF_1(b)}{dc} = -\frac{1}{b^2c}[E_1(b) - c^2F_1(b)],$$

$$\frac{dE_1(b)}{dc} = -\frac{c}{b^2}[E_1(b) - F_1(b)],$$

$$\frac{dE_1(c)}{dc} = \frac{1}{c}[E_1(c) - F_1(c)];$$

donc l'équation (17) devient :

$$F_1(b)\,F_1(c) - F_1(b)\,E_1(c) - E_1(b)\,F_1(c) = \frac{\lambda}{\beta};$$

ou, par le Théorème de Legendre,

$$\lambda = -\frac{\pi}{2}\beta.$$

Conséquemment, à cause des formules (G), (G'),

$$\alpha + \beta\frac{F_1(b) - E_1(b)}{E_1(c)} = \mu - \frac{\pi}{2}\beta\int\frac{dc}{c[E_1(c)]^2}. \qquad (18)$$

(*) *Fonctions elliptiques*, tome I, p. 61.

Représentons par $f(c)$ l'intégrale indéfinie, de manière que

$$\alpha + \beta \frac{F_1(b) - E_1(b)}{E_1(c)} = \mu - \frac{\pi}{2} \beta f(c) + const.$$

Lorsque $c = 1$, $b = 0$, $F_1(b) - E_1(b) = 0$, etc. ; et

$$\alpha = \mu - \frac{\pi}{2} \beta f(1) + const.$$

Par suite,

$$\frac{F_1(b) - E_1(b)}{E_1(c)} = \frac{\pi}{2} [f(1) - f(c)],$$

ou

$$\int_c^1 \frac{dx}{[E_1(x)]^2} = \frac{2}{\pi} \frac{F_1(b) - E_1(b)}{E_1(c)} \qquad \text{(H)}.$$

Il est à remarquer que les deux membres deviennent infinis pour $c = 0$. Du reste, pour vérifier cette relation, il suffit, comme nous venons de le faire implicitement, de différentier par rapport à c.

VIII.

On arrive à une autre intégrale définie elliptique quand on cherche l'intégrale double

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega \, d\theta \, d\omega \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta \sin^2\omega} \cdot \qquad (19)\ (^*)$$

On peut d'abord écrire

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega \, d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - \cos^2\omega \sin^2\theta},$$

ou

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} E_1(\cos\omega) \cos\omega \, d\omega \qquad (20).$$

En second lieu, si l'on renverse l'ordre de l'intégration, et que l'on fasse

$$\sin\omega = \cot\theta \operatorname{tg}\varphi,$$

on trouve

$$A = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \operatorname{l.tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right],$$

(*) Cette expression représente, à un facteur près, l'aire de la *surface cyclotomique à directrice circulaire*. (Voyez mon *Traité élémentaire de Geométrie descriptive*).

on, en remplaçant θ par $2x$:

$$A = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin 2x} \text{l. tg.}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx.$$

Or (*)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{l. tg.}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sin 2x} dx = \frac{\pi^2}{8}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \,\text{l.tg.}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx = \frac{\pi}{4};$$

donc

$$A = \frac{\pi^2}{8}. \tag{21}$$

Égalant les deux valeurs de A, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\omega)\cos\omega\, d\omega = \frac{\pi^2}{8},$$

ou

$$\int_0^1 E_1(c) \frac{c dc}{\sqrt{1 - c^2}} = \frac{\pi^2}{8} \tag{K}$$

Pour vérifier ce résultat curieux, il suffit de prendre le développement de $E_1(c)$, de multiplier chaque terme par $\frac{c dc}{\sqrt{1 - c^2}}$, et d'intégrer: on trouve

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2.\,3} - \frac{1.\,3}{2.\,4.\,6.\,7} - \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.\,8.\,9} - \ldots,$$

formule connue.

IX.

L'illustre créateur de la Théorie des Fonctions elliptiques, après avoir établi la relation

$$\Pi(-c^2\sin^2\theta) + \Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right) = F + \frac{\text{tg}\,\theta}{2\Delta(\theta)} \log\left[\frac{\Delta(\varphi)\,\text{tg}\,\theta + \Delta(\theta)\,\text{tg}\,\varphi}{\Delta(\varphi)\,\text{tg}\,\theta - \Delta(\theta)\,\text{tg}\,\varphi}\right], \tag{L}$$

fait observer que le second membre devient infini quand l'amplitude φ égale θ; puis il ajoute (**):

« Lorsqu'ensuite on suppose $\varphi > \theta$, le dénominateur devient négatif, et la va-
» leur de $\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$ *redevient finie par la destruction mutuelle des parties in-*
» *finies et de signes contraires*. Mais alors la formule a besoin d'être rectifiée pour

(*) *Bierens de Haan*, T. 315.
(**) *Fonctions elliptiques*, tome I, p. 71.

» ne pas offrir le logarithme d'une quantité négative, et *il faudra l'écrire ainsi*

$$\text{»}\quad \Pi(-c^2\sin^2\theta) + \Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right) = F + \frac{\operatorname{tg}\theta}{2\Delta(\theta)}\log\left[\frac{\Delta(\theta)\operatorname{tg}\varphi + \Delta(\varphi)\operatorname{tg}\theta}{\Delta(\theta)\operatorname{tg}\varphi - \Delta(\varphi)\operatorname{tg}\theta}\right] \quad (M):$$

» *elle aura lieu depuis* $\varphi = \theta$ *jusqu'à* $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

» Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, cette formule donne entre les fonctions complètes la relation

$$\text{»}\quad \Pi_1(-c^2\sin^2\theta) + \Pi_1\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right) = F_1 \qquad (N)\ \text{»}.$$

La fonction $\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$ devenant infinie pour $\varphi = \theta$, les propositions soulignées me paraissent inadmissibles : dans tous les cas, elles ne sont pas démontrées. Il y a plus : puisque, suivant Legendre, la limite inférieure des intégrales Π et F est θ, la relation (N), quand bien même elle serait vraie, ne résulterait pas de la formule (M).

Du reste, si l'on suppose $c = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, la relation (N) se réduit à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\pi}{2};$$

ce qui est absurde.

En reprenant le calcul qui conduit à la formule (L), je trouve que, dans le cas de $\varphi > 0$, elle doit être remplacée par celle-ci :

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - c^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)} + \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}\right)\Delta(\varphi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\theta}{\Delta(\theta)}\log\left[\frac{\Delta(\theta)\operatorname{tg}\varphi + \Delta(\varphi)\operatorname{tg}\theta}{\Delta(\theta)\operatorname{tg}\varphi_1 + \Delta(\varphi_1)\operatorname{tg}\theta} \cdot \frac{\Delta(\theta)\operatorname{tg}\varphi_1 - \Delta(\varphi_1)\operatorname{tg}\theta}{\Delta(\theta)\operatorname{tg}\varphi - \Delta(\varphi)\operatorname{tg}\theta}\right], \qquad (M')$$

dans laquelle φ_1 est *supérieur à* θ.

Liége, 10 mars 1867.

E. Catalan.