This page intentionally left blank.

ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE Iª DEL 2 DICEMBRE 1866.

PRESIDENZA DEL SIG. COM. N. PROF. CAVALIERI SAN BERTOLO

MEMORIE E COMUNICAZIONI
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

Note sur un problème d'analyse indéterminée par M. Eugène Catalan, professeur a l'Université de Liége.

PROBLÈME – *Trouver plusieurs cubes entiers, consécutifs, dont la somme soit un carré* (*).

I.

A cause de la relation

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2,$$

on a

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+y-1)^3 = \frac{y}{8}(2x+y-1)\left[4x^2 + 4(y-1)x + 2y(y-1)\right];$$

ou, en représentant par s la somme des y cubes, et en posant

$$2x + y - 1 = z \qquad (1):$$

$$16s = 2yz(y^2 + z^2 - 1) \qquad (2).$$

(*) Cette question m'a été suggérée par la lecture d'un beau Mémoire de M. Angelo Genocchi (*Note sur quelques sommations de cubes*). Bien que ce savant Géomètre y donne les solutions *rationnelles* de l'équation *générale*

$$x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+nr-r)^3 = y^2,$$

il m'a semblé intéressant de chercher les solutions *entières* de l'équation *particulière*

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+n-1)^3 = y^2.$$

D' après l'égalité (1), y et z sont de *parités différentes*. Par suite, $2yz$ et y^2+z^2-1 sont divisibles par 4. Donc s sera un carré si le second membre de l'équation (2) est un carré.

Soient

$$2yz=\alpha\,,\quad y^2+z^2+1=\beta\,,\quad y+z=\lambda\,,\quad z-y=\mu\,,\quad s=t^2\qquad(3)\,;$$

nous aurons

$$\alpha\beta=16t^2\,,\quad \alpha+\beta+1=\lambda^2\,,\quad \beta-\alpha+1=\mu^2\qquad(4).$$

Ainsi, la question se réduit à *trouver deux multiples de* 4, α, β, *tels que* $\alpha\beta$, $\alpha+\beta+1$, $\beta-\alpha+1$ *soient des carrés.*

II.

L'élimination de β, entre la première et la troisième des équations (4), conduit à

$$64t^2+(\mu^2-1)^2=(2\alpha+\mu^2-1)^2\qquad(5).$$

Les solutions entières de cette équation sont données par les deux systèmes de formules :

$$2\alpha+\mu^2-1=u^2+v^2\,,\quad \mu^2-1=u^2-v^2\,,\quad 4t=uv\qquad(6)\,,$$

$$2\alpha+\mu^2-1=u^2+v^2\,,\quad \mu^2-1=2uv\,,\quad 8t=u^2-v^2\qquad(6')\,;$$

d'où l'on tire, soit

$$\alpha=v^2\,,\qquad \beta^2=u^2\qquad(7)\,,$$

soit

$$2\alpha=(u-v)^2\,,\qquad 2\beta=(u+v)^2\qquad(7').$$

Ainsi α, β, *ou leurs doubles, sont des carrés.*

III.

Les équations (7) équivalent à

$$2yz=v^2\,,\qquad y^2+z^2-1=u^2\qquad(8).$$

Soit $y=\frac{p}{q}z$, $\frac{p}{q}$ étant irréductible. On déduit de là

$$y=p\gamma\,,\qquad z=q\gamma\qquad(9),$$

γ étant un nombre entier. De plus, y et z étant de *parités différentes*, il en est de même pour p et q ; en outre, γ *est impair*. Enfin, à cause de $2yz=v^2$, $2pq$ *est un carré;* ce pui prouve que, *des deux nombre* p, q, *l'un est un carré, et l'autre, le double d'un carré.*

Au moyen des valeurs (9), la seconde équation (8) devient

$$(p^2+q^2)\gamma^2-u^2=1\qquad(10).$$

Dans chaque cas particulier, l'équation (10) fera connaître les valeurs de γ et de u. On aura ensuite

$$y = p\gamma\,,\quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}\,,\quad s = 2pq\,\frac{\gamma^2 u^2}{16} \qquad (11).$$

IV.

Si l'on répète, sur les formules (7'), des calculs analogues aux précédents, on trouve

$$4yz = (u - v)^2\,,\qquad 2(y^2 + z^2 - 1) = (u + v)^2 = 4u'^2 \qquad (8')\,,$$

$$y = p\gamma\,,\qquad z = q\gamma \qquad (9')\,,$$

$$(p^2 + q^2)\,\gamma^2 - 2u'^2 = 1 \qquad (10')\,,$$

$$y = p\gamma\,,\quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}\,,\quad s = pq\,\frac{\gamma^2 u'^2}{4} \qquad (11'):$$

cette fois, *p et q sont des carrés, l'un pair, l'autre impair* (*).

V. Applications.

1° $p = 8$, $q = 9$. L'équation (10) devient

$$145\,\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Elle est vérifiée par $\gamma = 1$, $u = 12$; d'où $x = 1$. En laissant de côté cette solution connue, on en trouve une infinité au moyen de la relation

$$u + \gamma\sqrt{145} = (12 + \sqrt{145})^{2n+1}.$$

Par exemple, $n = 1$ donne

$$u = 6\,948\,,\quad \gamma = 577\;;$$

puis

$$y = 4\,616\,,\quad x = 289\,,\quad s = (3.\ 577.\ 6948)^2.$$

Ainsi

$$289^3 + 290^3 + \ldots + 4\,904^3 = (3.\ 577.\ 6\,948)^2.$$

2° $p = 2$, $q = 25$. L'équation (10) est

$$629\,\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Les valeurs les plus simples sont

$$\gamma = 313\,,\quad u = 7\,850 \quad (**);$$

d'où

$$y = 626\,,\quad x = 3\,600\,,\quad s = (5.\ 313.\ 3\,925)^2.$$

(*) Il ne m'a pas été possible de trouver une solution de l'équation (10'). Pourrait-on démontrer qu'elle n'en admet aucune ?

(**) La table X de Legendre (*Théorie des Nombres*, tome I) renferme une faute typographique: au lieu de 1850, on doit lire 7 850.

On a donc

$$3\ 600^3 + 3\ 601^3 + \ldots + 4\ 225^3 = (5.\ 313.\ 3\ 925)^2$$

3° Si, dans la relation

$$u + \gamma\sqrt{629} = (7\ 850 + 313\sqrt{629})^{2n+1},$$

on suppose $n = 1$, on trouve :

$$u = 7\ 850^3 + 3.\ 7\ 850.\ 313^2.\ 629 = 7\ 850(7\ 850^2 + 3.\ 313^2.\ 629),$$

$$\gamma = 3.\ 7\ 850^2.\ 313 + 313^3.\ 629 = 313(3.\ 7\ 850^2 + 313^2.\ 629).$$

Or :

$$7\ 850^2 = 61\ 622\ 500,\quad 313^2 = 97\ 969\ ,\quad 3.\ 313^2.\ 629 = 184\ 867\ 503\ ,\quad 313^2.\ 629 = 61\ 622\ 501;$$

donc

$$u = 7\ 850(61\ 622\ 500 + 184\ 867\ 503) = 7\ 850.\ 246\ 490\ 003$$

$$= 1\ 934\ 946\ 523\ 550\ ,$$

$$\gamma = 313(184\ 867\ 500 + 61\ 622\ 501) = 313.\ 246\ 490\ 001$$

$$= 77\ 151\ 370\ 313.$$

Si ces valeurs sont exactes, on doit avoir

$$629.\ 77\ 151\ 370\ 313^2 - 1\ 934\ 946\ 523\ 550^2 = 1.$$

En effet :

$$77\ 151\ 370\ 313^2 = 5\ 952\ 331\ 941\ 173\ 657\ 717\ 969\ ,$$

$$629.\ 77\ 151\ 370\ 313^2 = 3\ 744\ 018\ 048\ 998\ 230\ 704\ 602\ 501\ ,$$

$$1\ 934\ 946\ 523\ 550^2 = 3\ 744\ 018\ 048\ 998\ 230\ 704\ 602\ 500\ ;$$

ec.

Des valeurs précédentes de γ et de u, on tire

$$y = 2\gamma = 154\ 302\ 740\ 626\ ,\quad x = \frac{23\gamma + 1}{2} = 887\ 240\ 758\ 600\ ,$$

$$x + y - 1 = 1\ 041\ 543\ 499\ 225\ ,$$

$$s = \left[\frac{u\gamma}{2}\right]^2 = (967\ 473\ 261\ 775.\ 77\ 151\ 370\ 313)^2.$$

Ainsi

$$887\ 240\ 758\ 600^3 + 887\ 240\ 758\ 601^3 + \ldots + 1\ 041\ 543\ 499\ 225^3 =$$

$$(967\ 473\ 261\ 775.\ 77\ 151\ 370\ 313)^2.$$

Liége, 21 Octobre 1866.