This page intentionally left blank.

ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE III^a DEL 3 FEBBRAJO 1867. /i

PRESIDENZA DEL SIG. COM. N. PROF. CAVALIERI SAN BERTOLO

MEMORIE E COMUNICAZIONI

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

RECTIFICATION ET ADDITION

A LA

« NOTE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE »;

publiée dans les *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, Tome XX. — Année XX; Séance I^{ère} du 2 Décembre 1866.

PAR M. EUGÈNE CATALAN.

M. Lebesgue m'a fait observer que les formules (6) et (6') ne sont pas assez générales : en les écrivant, j'ai supposé, tacitement, les valeurs de t, μ^2-1 et $2\alpha+\mu^2-1$, premières entre elles deux à deux. Le même manque de généralité se remarque sur les formules (11) et (11'). Néanmoins, les résultats indiqués dans le Paragraphe V sont exacts, comme tous ceux que l'on déduirait des formules citées.

En cherchant à corriger la faute dont je viens de parler, je me suis aperçu que le Problème en question se ramène très simplement à la résolution, en nombres entiers, d'une équation de la forme

$$Ax^2-By^2=1.$$

Cette nouvelle solution du Problème est l'objet de la présente Note.

I.

Reprenons les équations

$$2x + y - 1 = z \quad (a), \qquad 2yz = \alpha \quad (b), \qquad y^2 + z^2 - 1 = \beta \quad (c),$$

$$\alpha\beta = 16t^2 \quad (d), \qquad s = t^2 \quad (e).$$

D'après (a), y *et* z *sont de parités différentes;* donc α, β *sont des multiples de* 4. Soient

$$\alpha = 4\theta u^2, \qquad \beta = 4\theta' v^2;$$

θ, θ' ne contenant aucun facteur carré; autrement dit :

$$\theta = abcde \ldots, \qquad \theta' = a'b'c'd'e' \ldots,$$

$a, b, c, d, e, \ldots$, d'une part, et $a', b', c', d', e', \ldots$, del'autre, étant des facteurs premiers *inégaux*. A cause de l'équation (d), $\theta\theta'$ doit être un carré; donc

$$a' = a, \qquad b' = b, \qquad c' = c, \ldots,$$

ou

$$\theta' = \theta;$$

et, par conséquent,

$$\alpha = 4\theta u^2, \qquad \beta = 4\theta v^2 \qquad (f).$$

Soient

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma \qquad (g),$$

p, q étant deux nombres donnés, l'un *pair*, l'autre *impair*, *premiers entre eux*. Les équations (b), (c) deviennent, à cause des valeurs (f) :

$$pq\,\gamma^2 = 2\theta u^2 \quad (h), \qquad (p^2 + q^2)\gamma^2 - 1 = 4\theta v^2 \quad (k).$$

Éliminant θ, on trouve

$$(p^2 + q^2)u^2 - 2pq\,v^2 = \frac{u^2}{\gamma^2};$$

donc u est divisible par γ :

$$u = \gamma u' \quad (l);$$

et la relation (h) devient

$$pq = 2\theta u'^2 \qquad (A).$$

II.

Dans chaque cas particulier, on décomposera donc $\frac{pq}{2}$ en deux facteurs u'^2, θ, dont l'un soit un carré, l'autre n'admettant aucun facteur carré; après quoi l'on cherchera les solutions entières de l'équation

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - 4\theta v^2 = 1 \qquad (B).$$

Si elle en admet, on emploiera les formules

$$\left.\begin{array}{c} x = \dfrac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad x + y - 1 = \dfrac{(q+p)\gamma - 1}{2}, \\ s = (u'v\theta\gamma)^2 \end{array}\right\} \quad (C)$$

III. APPLICATIONS.

1° $p = 3$, $q = 4$. L'équation (A) donne

$$\theta = 6, \qquad u' = 1;$$

en sorte que (B) devient:

$$(5\gamma)^2 - 6(2v)^2 = 1. \qquad (1)$$

La solution la plus simple est

$$\gamma = 1, \qquad v = 1;$$

d'où l'on déduit, par exemple,

$$\gamma = 97, \qquad v = 99;$$

puis

$$x = 49, \qquad x + y - 1 = 339, \qquad s = (6.97.99)^2.$$

Conséquemment

$$49^3 + 50^3 + 51^3 + \ldots + 339^3 = (6.97.99)^2;$$

Ce qui est exact.

2° $p = 5$, $q = 8$. On trouve $\theta = 5$, $u' = 2$, puis

$$89\gamma^2 - 5(2v)^2 = 1. \qquad (2)$$

Le développement de $\sqrt{\dfrac{89}{5}} = \dfrac{\sqrt{445}}{5} = \dfrac{R}{5}$ en fraction continue donne, comme fractions *complètes* :

$$\frac{R}{5}, \frac{R+20}{9}, \frac{R+16}{21}, \frac{R+5}{20}, \frac{R+15}{11}, \frac{R+18}{11}, \frac{R+15}{20},$$

$$\frac{R+5}{21}, \frac{R+16}{9}, \frac{R+20}{5}, \frac{R+20}{9}, \frac{R+16}{21}, \text{ etc.}$$

Par conséquent (*), l'équation (2) n'admet aucune solution entière.

3° $p = 5$, $q = 12$. On a $u' = 1$, $\theta = 30$; donc

$$(13\gamma)^2 - 120\,v^2 = 1. \qquad (3)$$

Cette équation est vérifiée par

$$13\gamma = 11, \qquad v = 1;$$

(*) *Théorie des Nombres*, tome I, p. 108.

mais, comme la valeur de y est fractionnaire, on doit recourir à la relation

$$(11 + \sqrt{120})^n = 13y + v\sqrt{120},$$

en disposant convenablement de n. Après quelques essais, l'on trouve que $n=9$ donne

$$y = 45\ 575\ 339\ 447, \qquad v = 54\ 085\ 723\ 209.$$

On conclut, de ces valeurs :

$$169\,y^2 = 351\ 031\ 854\ 604\ 867\ 350\ 921\ 721,$$

$$120\,v^2 = 351\ 031\ 854\ 604\ 867\ 350\ 921\ 720,$$

$$x = 159\ 513\ 698\ 065,$$

$$x + y - 1 = 387\ 390\ 395\ 299,$$

$$s = (30 .\ 45\ 575\ 339\ 447 .\ 54\ 085\ 723\ 209)^2.$$

Liége, 30 janvier 1867.