COMUNICAZIONI

BONCOMPAGNI, Principe D. B. – *Presentazione di due brani di lettere.*

EXTRAITS DE DEUX LETTRES ADRESSÉES PAR M. E. CATALAN

A D. B. BONCOMPAGNI

I.

Extrait d'une lettre en date de « Liége, 19 octobre 1880 ».

. . . . . Le dernier numéro du *Journal de Mathématiques élémentaires* contient, sous le nom de *E. Delacuvellerie*, *élève* au Collége d'Ath (Belgique), un théorème bien remarquable, me paraît-il, s'il est vrai. Le voici :

p étant un nombre premier, supérieur à 3, $4p^2+1$ *est la somme de trois carrés.*

J'observe que l'auteur devrait dire: « autre que 3 ». Car $p=2$ donne

$$4 \cdot 2^2 + 1 = 17 = 9 + 4 + 4.$$

II.

Extrait d' une lettre en date de « Liége, 14 novembre 1880 ».

En généralisant le petit théorème du jeune Delacuvellerie, et en supprimant les conditions inutiles (*), j'ai trouvé diverses propositions, très simples, et néanmoins assez intéressantes, me semble-t-il. En voici quelques-unes:

1° *Si* $a-b=\mathfrak{M}\,3$, a^2+b^2 *est la somme de trois carrés.* (**)

Exemple : $$14^2+5^2=11^2+8^2+6^2.$$

2° *Si* $a-b=\mathfrak{M}\,3$, $a^{2m}+b^{2m}$ *est la somme de trois carrés* (***).

Exemple : $$14^6+5^6=1871^2+998^2+1746^2,$$

(*) Par exemple, *il n'est pas nécessaire que* p *soit premier.*

(**) Dans tous ces énoncés, les carrés sont *différents de zéro*, contrairement à ce qui a lieu pour bon nombre de théorèmes connus.

(***) Je me demande si la décomposition de $a^{2m}+b^{2m}$, en une somme de trois carrés, ne pourrait pas servir au théorème de Fermat.

ou

$$7\ 529\ 536 + 15\ 625 = 3\ 500\ 641 + 996\ 004 + 3\ 048\ 516.$$

3°. *Soit* $z^2 = 2xy$. *Si* $a - b = \mathfrak{M}(x+y)$, $a^2 + b^2$ *est la somme de trois carrés.*

Exemple : $$x = 8,\ y = 9,\ z = 12,\ x + y = 17.$$

Si l'on prend:

$$a = 37,\ b = 3,$$

on a

$$37^2 + 3^2 = 21^2 + 19^2 + 24^2;$$

etc.

Toutes ces propriétés, et d'autres encore, résultent, soit de l'identité

$$a^2 + (a - 3c)^2 = (a - c)^2 + (a - 2c)^2 + (2c)^2,$$

soit de celles-ci :

$$a^2 + b^2 = (a - p'p''x)^2 + (a - p'p''y)^2 + (p'p''z)^2,$$

$$a^2 + b^2 = (a - p''px')^2 + (a - p''py')^2 + (p''pz')^2,$$

$$a^2 + b^2 = (a - pp'x'')^2 + (a - pp'y'')^2 + (pp'z'')^2,$$

dans lesquelles :

$$2xy = z^2, \qquad 2x'y' = z'^2, \qquad 2x''y'' = z''^2,$$

$$p = x + y, \qquad p' = x' + y', \qquad p'' = x'' + y'',$$

$$a - b = pp'p''.$$

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari. – Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – P. F. S. Provenzali. – Dott. M. Lanzi. – Comm. C. Descemet. – Cav. P. Sabatucci. – Cav. G. Olivieri. – P. G. Lais. – Prof. V. de Rossi Re. – D. B. Boncompagni. – Prof. M. S. De Rossi, Segretario.