

## VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA THÉORIE DE REYNOLDS & SOMMERFELD SUR LE FROTTEMENT « FLUIDE »

par CH. HANOCQ, Liège.

Nous avons été amenés comme professeur du cours de Construction des Machines à l'Université de Liège, à étudier expérimentalement la question des paliers de transmission. Nos essais poursuivis pendant plusieurs années en utilisant la méthode « par ralentissement » d'une part, et la méthode habituelle de la mesure du couple au coussinet d'autre part, nous ont conduit à établir qu'il existait *sans erreur possible*, une différence systématique entre les valeurs du coefficient frottement déterminée par l'une et par l'autre méthode.

Cette anomalie à première vue contraire au principe de l'action et de la réaction, nous a forcé à reprendre la théorie classique d'OSBORNE REYNOLDS complétée par SOMMERFELD en vue de rechercher d'une part le couple  $M$  appliqué à l'arbre et d'autre part le couple  $M_c$  appliqué au coussinet.

Nous avons ainsi trouvé que pour le demi-coussinet

$$M - M_c = Pe \sin \psi$$

en utilisant les notations de la fig. 1 ci-contre.

Cette relation est évidente si on réfléchit que la résultante des forces normales provenant de l'action de la pression sur le coussinet, est nécessairement une force égale à  $P$  passant par  $O'$ , et que partant le couple  $M$  par rapport à  $O$  est égal au couple  $M_c$  des forces tangentielles de frottement appliquées au coussinet augmenté du couple  $Pe \sin \psi$  dû à la force  $P$  appliquée en  $O'$ .

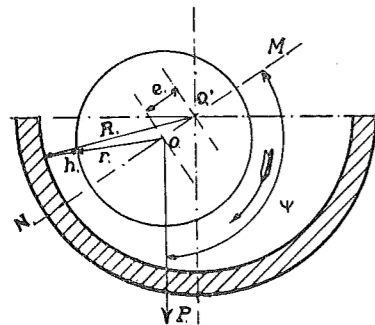


Fig. 1.

Il n'en est pas moins vrai que cette relation n'a jamais été mise en relief. Bien plus, GÜMBEL constatant une différence systématique entre les résultats expérimentaux fournis par les essais de LASCHE et de STRIBECK et les résultats tirés de la théorie de SOMMERFELD, GÜMBEL disons-nous, a proposé de modifier les limites d'intégration pour faire coïncider approximativement les deux courbes expérimentale et théorique, perdant de vue que le couple calculé par la théorie de SOMMERFELD est le couple appliqué à l'arbre, tandis que le couple mesuré par LASCHE et par STRIBECK est le couple appliqué au coussinet.

Il est inutile d'insister sur l'importance de cette remarque, non seulement au point de vue scientifique, mais au point de vue pratique, le coefficient de frottement vrai que nous désignerons par  $f$  pouvant s'élever à 3 et 4 fois le coefficient de frottement apparent  $fc$ , dans la région d'utilisation expérimentée par LASCHE et par STRIBECK. Cette erreur a eu comme conséquence immédiate de conduire à une évaluation erronée de la chaleur rayonnée dans l'unité de temps par  $\text{cm}^2$  de surface projetée du coussinet et de rendre douteuses un certain nombre de conclusions concernant les limites d'utilisation.

Comme il s'agit de mesures délicates exigeant pour l'évaluation de la puissance, un procédé permettant d'apprécier le 1/1,000 et même moins de cheval-vapeur, on comprend jusqu'à un certain point, pourquoi la vérité a mis si longtemps à se faire jour. LASCHE avait bien constaté au cours des remarquables essais qu'il a poursuivis pendant plusieurs années avec une persévérance peu commune et des moyens exceptionnels, LASCHE disons-nous, avait bien observé des discordances entre les

résultats fournis par la méthode de ralentissement et ceux donnés par la méthode du couple au coussinet, mais comme la première méthode n'avait été utilisée par lui que très accessoirement, il avait cru devoir attribuer les différences à des erreurs sur l'évaluation des résistances propres aux volants dans l'air et aux vibrations de l'arbre.

Cet exposé préliminaire nous a paru nécessaire pour situer la question que nous présentons ici; du point de vue mathématique nous n'avons fait que dégager une relation fondamentale de la théorie de REYNOLDS et SOMMERFELD et expliqué une anomalie apparente qui, jusqu'à présent n'avait pas été aperçue et qui avait jeté un trouble considérable dans l'étude expérimentale du problème pratique de la prédétermination de la température de régime d'un palier.

Pour faire cadrer les résultats fournis par la théorie d'une part et par l'expérimentation d'autre part, nous ajouterons que nous avons dû compléter la théorie présentée par REYNOLDS et SOMMERFELD en vue de tenir compte du demi-coussinet supérieur qui existe peut-on dire toujours et dont l'effet est de créer un couple supplémentaire de frottement, bien qu'il n'ait aucune influence sur la répartition des pressions dans le demi-coussinet inférieur.

### Relation fondamentale entre $M$ et $M_c$ pour le demi-coussinet inférieur — Couple supplémentaire $M_s$ du demi-coussinet supérieur.

Considérons le cas d'une arbre reposant sur un demi-coussinet représenté schématiquement par la fig. 1. Désignons par  $MN$  la ligne des centres à partir de laquelle nous compterons les angles dans le sens de la rotation indiqué par la flèche, par  $e$  la distance entre le centre de l'arbre et celui du coussinet et par  $h$  l'épaisseur variable du film d'huile compris entre l'arbre et le coussinet. Comme aux extrémités du coussinet règne la pression atmosphérique, nous pourrions écrire comme conditions aux limites

$$\dot{p} = 0 \quad \text{pour } \varphi = \psi + \frac{\pi}{2} \quad \text{et pour } \varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$$

$\varphi$  étant l'angle formé par un rayon quelconque avec la droite  $MN$  et  $\psi$  l'angle formé par la direction de la charge  $P$  par unité de longueur et la direction  $MN$ .

On sait que la théorie mathématique de REYNOLDS-SOMMERFELD conduit aux conditions suivantes pour l'équilibre de l'arbre sous l'action des pressions de l'huile  $\dot{p}$  et des forces de frottement  $q$  par unité de longueur

$$I \begin{cases} \frac{2 \sin \psi}{c^2 - \sin^2 \psi} - \frac{I_2}{I_3} \frac{2c \sin \psi}{(c^2 - \sin^2 \psi)^2} = - \frac{\cos \psi}{2\pi c^2} \frac{1}{\dot{p} \left(\frac{r}{a}\right)^2} \\ I_1 - \frac{I_2^2}{I_3} = \frac{\sin \psi}{6\pi c^2} \frac{1}{\dot{p} \left(\frac{r}{a}\right)^2} \end{cases}$$

dans lesquelles on désigne par  $c$  le rapport

$$c = \frac{a}{e} = \frac{R-r}{e},$$

par  $\mu$  la viscosité de l'huile, par  $V$  la vitesse linéaire du tourillon tournant à  $N$  tours par seconde, par  $\dot{p}$  les pressions par unité de surface projetée du coussinet, et par  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  les valeurs des intégrales

$$I_1 = \int_{\psi - \frac{\pi}{2}}^{\psi + \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi}; \quad I_2 = \int_{\psi - \frac{\pi}{2}}^{\psi + \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(c + \cos \varphi)^2}; \quad I_3 = \int_{\psi - \frac{\pi}{2}}^{\psi + \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(c + \cos \varphi)^3}$$

Le système (I) permet de déterminer les valeurs de  $c$  et de  $\psi$  c'est-à-dire l'excentrement et la direction de la ligne des centres pour les données du problème qui sont respectivement  $p, r, R, N, \mu$ . On voit ainsi que  $c$  et  $\psi$  sont fonctions du coefficient  $\frac{\mu N}{p} \left(\frac{r}{a}\right)^2$  que nous pourrions calculer au moyen des données. Pour les valeurs limites entre lesquelles ce dernier terme peut varier, on obtient

1) pour  $\frac{\mu N}{p} \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 0$   $c = 1$   $\psi = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire que l'arbre touche le coussinet et que l'excentrement est maximum: c'est le cas des faibles vitesses et des pressions très élevées;

2) pour  $\frac{\mu N}{p} \left(\frac{r}{a}\right)^2 = \infty$  soit pour des vitesses très élevées ou des pressions négligeables, on a  $c = \infty$ ,  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , l'arbre devenant concentrique au coussinet.

Pour rechercher la valeur du coefficient de frottement, remarquons que la théorie fournit la loi de répartition des vitesses du fluide dans une section transverse quelconque du film. La force tangentielle de frottement par unité de longueur entre deux couches d'huile infiniment voisines situées à la distance normale  $y$  de la surface de l'arbre peut donc se déduire de la relation

$$q_y = \mu \frac{dw}{dy}$$

$w$  étant la vitesse de l'élément correspondant à l'ordonnée  $y$ .

En faisant dans cette dernière expression  $y = 0$  ou  $y = h$ , on aura respectivement les valeurs de la force tangentielle  $q$  appliquée à l'arbre ou de celle appliquée au coussinet

$$q_a = \mu \left(\frac{dw}{dy}\right)_0 \quad \text{et} \quad q_c = \mu \left(\frac{dw}{dy}\right)_h$$

Pour déterminer le coefficient réel de frottement nous cherchons la valeur du moment résistant  $M$  appliqué à l'arbre par unité de longueur

$$M = -r \int_{\psi - \frac{\pi}{2}}^{\psi + \frac{\pi}{2}} q r d\varphi$$

$q$  étant mis pour  $\mu \left(\frac{dw}{dy}\right)_0$

D'après la loi de répartition des vitesses

$$q = -\mu V \frac{4h - 3H}{h^2}$$

$H$  désignant l'épaisseur du film à l'endroit pour lequel  $\frac{dp}{d\varphi} = 0$

En remarquant que  $h$  a pour valeur  $h = a + e \cos \varphi$  et que  $\frac{H}{e} = \frac{I_2}{I_3}$

$$M = 2\pi c a r \mu N \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left[ 4 \int_{\psi - \frac{\pi}{2}}^{\psi + \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi} - \frac{3H}{e} \int_{\psi - \frac{\pi}{2}}^{\psi + \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(c + \cos \varphi)^2} \right]$$

ou en utilisant les relations antérieures

$$M = 2\pi c a r \mu N \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left( 4 I_1 - 3 \frac{I_2^2}{I_3} \right)$$

Calculons maintenant le couple qu'il faut appliquer au coussinet supposé libre pour le maintenir en place. Nous aurons

$$M_c = -r \int_{\psi - \frac{\pi}{2}}^{\psi + \frac{\pi}{2}} q r d\varphi$$

à la condition de prendre pour  $q$

$$q = \mu \left(\frac{dw}{dy}\right)_h = \mu V \frac{2h - 3H}{h^2};$$

d'où

$$M_c = -2\pi c a r \mu N \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left( 2 I_1 - 3 \frac{I_2^2}{I_3} \right)$$

Le couple  $M_c$  appliqué au coussinet, exprimé en valeur absolue, se trouve donc être plus petit que celui qui empêche la rotation de l'arbre, et leur différence peut être évaluée à

$$M - M_c = 12\pi c a r \mu N \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left[ I_1 - \frac{I_2^2}{I_3} \right]$$

Or cette dernière relation peut s'écrire en vertu de la seconde équation (1)

$$M - M_c = P e \sin \psi.$$

Ainsi la différence entre les deux couples est proportionnelle à l'excentrement  $e \sin \psi$  de l'arbre par rapport au coussinet. Cette différence sera donc appréciable pour les faibles valeurs de  $\frac{\mu N}{p} \left(\frac{r}{a}\right)^2$

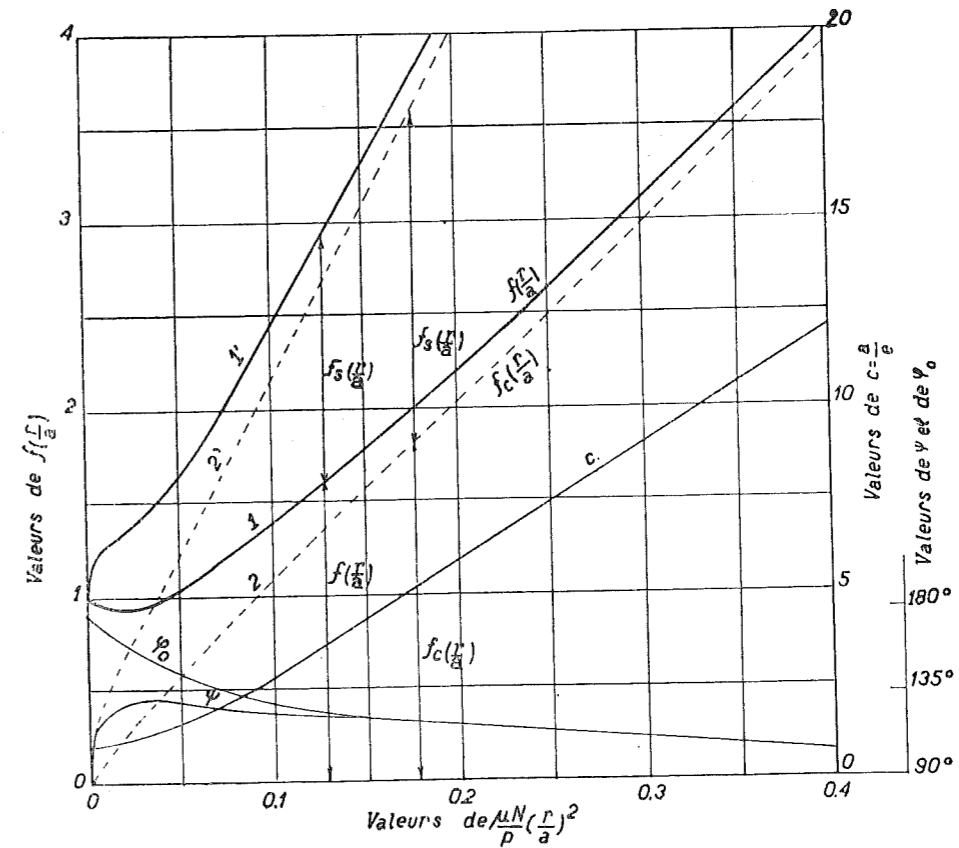


Fig. 2.

et disparaîtra complètement pour  $\frac{\mu N}{p} \left(\frac{r}{a}\right)^2 = \infty$  c'est à dire quand l'arbre deviendra concentrique au coussinet. Pour passer au cas réel il convient toutefois de tenir compte du frottement provenant de la présence du demi-coussinet supérieur qui ne modifie pas la répartition des pressions sur le coussinet inférieur mais qui détermine toutefois un glissement des couches élémentaires du fluide les une par rapport aux autres.

Si nous supposons que tout l'espace supérieur est rempli d'huile à une pression constante, nous aurons  $\frac{dp}{dx} = 0$  et la répartition des vitesses dans ce film sera linéaire, passant de 0 au coussinet à la valeur  $V$  le long de l'arbre. La force tangentielle qui en résultera sera

$$F_s = \int_{\pi}^{2\pi} \mu \frac{V}{h} r d\varphi = 2\pi c a \mu N \left(\frac{r}{a}\right)^2 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi} = 2\pi c a \mu N \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}$$

et le couple supplémentaire  $M_s$  aura pour valeur

$$M_s = F_s \times r = 2\pi c a r \mu N \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}$$

La fig. (2) donne les valeurs de  $f \frac{r}{a}$ ,  $f_c \frac{r}{a}$  et  $f_s \frac{r}{a}$  en fonction de la variable indépendante  $\frac{\mu N}{p} \left(\frac{r}{a}\right)^2$

Nous avons porté sur le même diagramme les valeurs de  $c$ ,  $\psi$  et  $\varphi_0$ , angle correspondant à la section où la pression passe par son maximum. Les courbes 1' et 2' représentent ainsi respectivement les valeurs de  $\left(f \frac{r}{a} + f_s \frac{r}{a}\right)$  et  $\left(f_c \frac{r}{a} + f_s \frac{r}{a}\right)$ , coefficient de frottement total, le premier pour l'arbre, le second pour le coussinet.

### Verification expérimentale.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction nous avons utilisé à cette fin la méthode par ralentissement et la méthode du couple appliqué au coussinet.

Le schéma de la fig. 3 indique la disposition de la transmission avec un des deux volants d'inertie et la chaise portée par deux paliers à billes, sollicitée par un effort de traction  $P$ , dis-

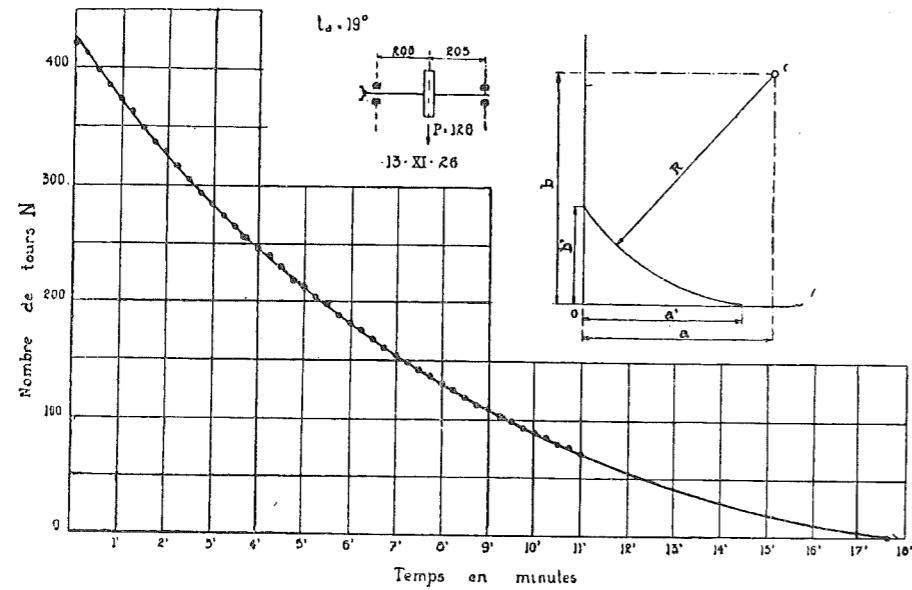


Fig. 3 et 4.

position utilisée dans les essais préliminaires qui nous ont fait connaître d'une manière très sûre le coefficient de frottement des paliers à billes utilisés.

En lançant la transmission à une vitesse  $N$  et en notant le nombre de tours à intervalles réguliers, il était possible d'établir la courbe de  $N$  en fonction de  $t$  (fig. 4) et d'en déduire  $\frac{dN}{dt}$  puis le couple résistant  $C$ . En remplaçant un des paliers à billes par un palier lisse et en déduisant du couple total celui dû aux paliers à billes et celui dû au frottement des volants dans l'air, on pouvait établir la valeur

$$M = Pfr$$

et de là déduire  $f$ .

Pour trouver  $M_c$  puis  $f_c$ , nous avons disposé le palier essayé de façon que le corps de celui-ci puisse tourner librement sur deux paliers à billes comme l'indique le plan fig. 5.

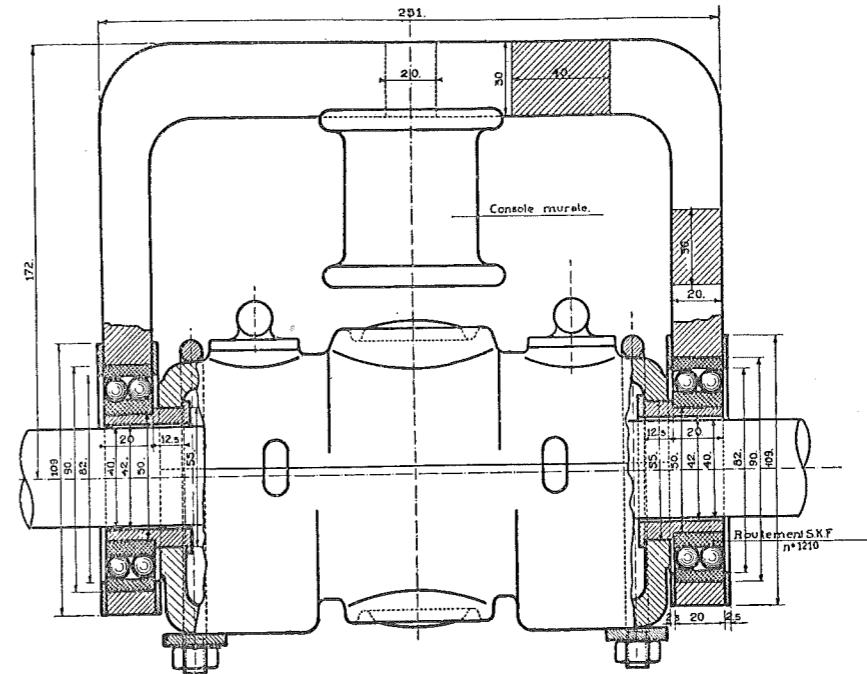


Fig. 5.

Les valeurs de  $f_c$  déduites de ces dernières expériences (exécutées simultanément avec les premières) sont portées en ordonnée dans le diagramme de la fig. 6 en fonction de  $\frac{\mu N}{p}$ .

Ces essais ont été effectués avec un palier de 40 mm. à bague de graissage fixe, présentant un jeu relatif  $\frac{a}{r} = \frac{1}{170}$  et une surface totale projetée de 55 cm<sup>2</sup>. La courbe en trait plein indique la courbe théorique de  $f_c$  correspondante.

A partir d'une abscisse  $10^8 \frac{\mu N}{p} = 350$ , il semblerait que les valeurs expérimentales s'écartent nettement des valeurs théoriques; mais il faut observer que tous les points situés à droite de cette abscisse correspondent à des expériences exécutées à une température inférieure à la température de régime, les points entourés d'un cercle correspondant seuls à des expériences effectuées en régime. L'explication de l'écart est dès lors facile: pour évaluer  $\mu$  dans la valeur  $\frac{\mu N}{p}$  nous avons adopté non la température du film d'huile mais la température de l'huile dans le palier; or si, en régime, il n'existe qu'un faible écart entre ces deux températures, en dehors du régime cette différence peut être assez considérable.

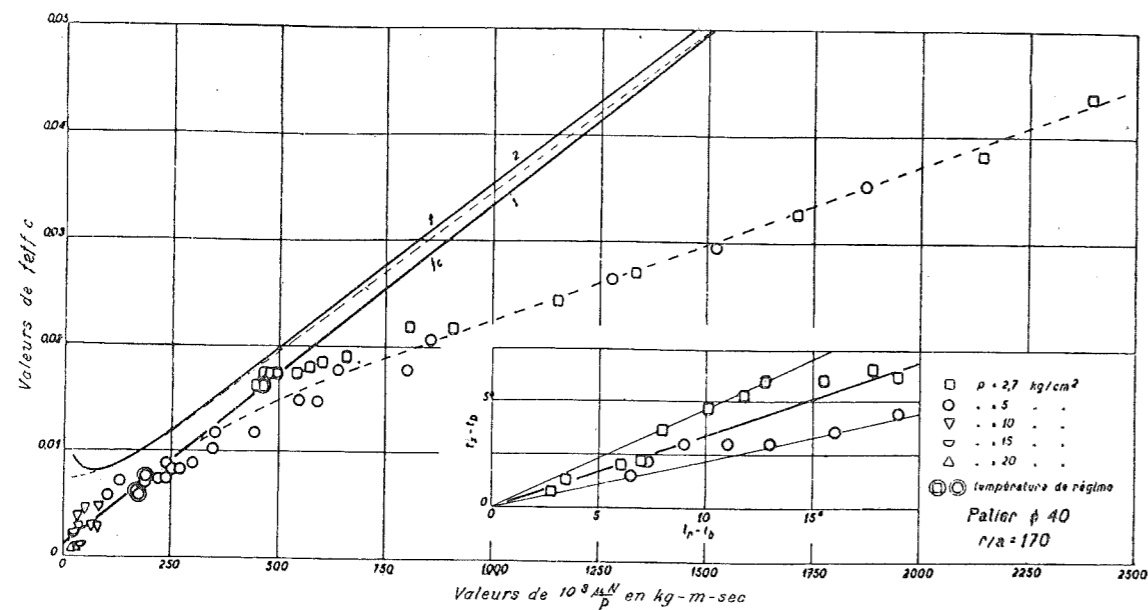


Fig. 6 et 7.

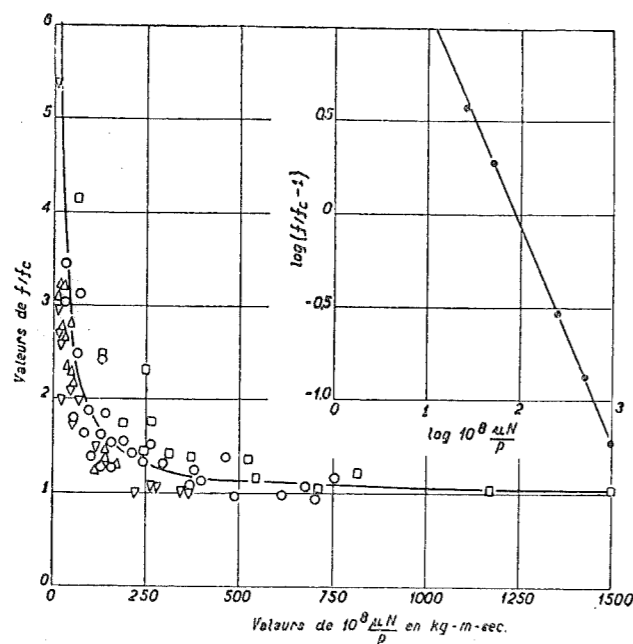


Fig. 8 et 9.

Pour nous rendre compte de la valeur de cette interprétation nous avons cherché quel devrait être l'écart des températures pour ramener tous les points sur la courbe théorique et nous avons trouvé les résultats indiqués sur la fig. 7: lorsqu'on constate un écart de  $15^\circ$  entre la température du bain d'huile et la température du régime pour les mêmes conditions de fonctionnement, il faudrait admettre qu'il existe une différence de température de  $5^\circ$  entre le film et le bain: il nous paraît que cet écart est tout à fait admissible. Les essais américains poursuivis au moyen d'une autre méthode ont d'ailleurs confirmé l'allure rectiligne du diagramme pour toute la région utilisée, s'étendant bien au delà des limites de nos essais, pour certaines expériences tout au moins.

Pour communiquer les résultats fournis par la méthode de ralentissement nous avons cru préférable de porter en fonction de  $\frac{\mu N}{p}$  le rapport  $f/f_c$ ,  $f_c$  étant calculé au moyen du diagramme précédent pour la température observée au palier, lors de l'expérience.

Les résultats sont fournis par le diagramme de la fig. 8. Pour le tracé de cette courbe, nous avons tenu compte de tous les points observés, n'en écartant aucun sous aucun prétexte, mais tenant compte de la densité des points nous avons rapproché la courbe de l'axe des abscisses dans la région des faibles valeurs de  $\frac{\mu N}{p}$ .

Mise en coordonnées logarithmiques, la courbe ainsi tracée a pu se traduire par une droite ainsi que le montre la fig. 9; nous en avons déduit l'équation

$$f = f_c \left[ \frac{178}{\left(10^8 \frac{\mu N}{p}\right)^{1,16}} + 1 \right]$$

Utilisant les valeurs de  $f_c$  trouvées expérimentalement et indiquées par la courbe 1 de la fig. 6, nous en avons déduit les valeurs de  $f$ , et tracé la courbe 2 de la fig. 6. On voit que cette courbe coïncide pratiquement avec la courbe théorique que nous avons indiquée en pointillé fig. 6.

Nous avons poursuivi ces essais avec un palier de même forme mais présentant un jeu  $\frac{a}{r} = \frac{1}{800}$  et cette fois nous avons obtenu pour  $f$  et  $f_c$  des valeurs pratiquement les mêmes, les courbes expérimentales ne coïncidant toutefois plus aussi parfaitement avec les courbes théoriques.

Nous nous proposons de reprendre ces essais avec une disposition nouvelle permettant de réaliser une plus grande précision dans les mesures et surtout avec des paliers présentant une perfection plus grande d'exécution, une erreur si faible soit-elle lorsque les jeux tombent à  $1/20$  de mm. ayant des conséquences importantes sur les conclusions.

### Conclusions.

Nous ne pouvons que répéter en conclusions que la théorie et l'expérience s'accordent parfaitement du moment où l'on fait une distinction entre  $M$  et  $M_c$ . On peut même affirmer qu'il n'est pas une question technique où cet accord se réalise avec une pareille approximation. Mais le problème

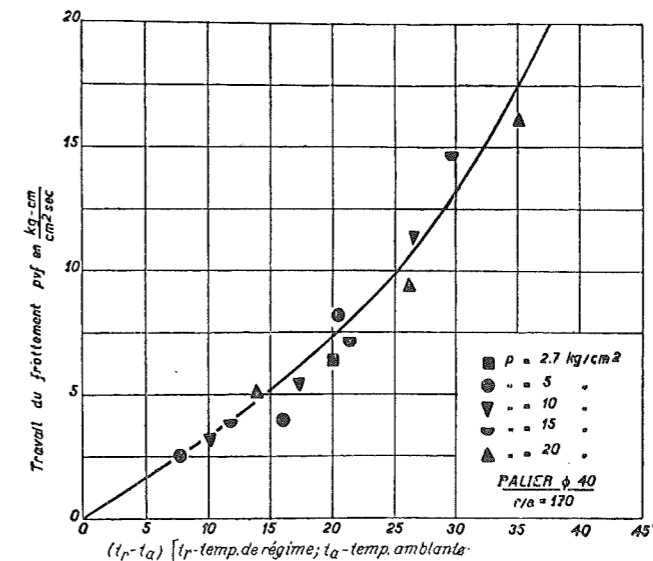


Fig. 10.

technique fondamental est celui de la prédétermination de la température de régime, ce qui suppose connue la loi de rayonnement du palier.

En traçant le diagramme de  $p f v$  en fonction de  $(t_r - t_a) v$  étant la vitesse périphérique de l'arbre, nous avons obtenu fig. 10 une courbe unique pour toutes les conditions d'utilisation, ce qui n'est évidemment pas le cas lorsqu'on porte  $p v f_c$  et cela se comprend puis que d'après ce que nous avons vu  $p f_c v$  n'est pas proportionnel à la quantité de chaleur rayonnée et que partant, il n'y a pas de relation entre les quantités portées en ordonnée et celles portées en abscisse.

Si on essaye de représenter par une équation fonction de  $t_r$  la courbe de la fig. 10, on trouve une correspondance satisfaisante en écrivant

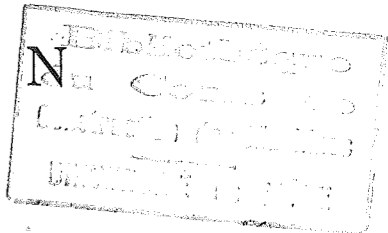
$$p v f = \frac{1}{3} (t_r - t_a) + 4 \times 10^{-6} (t_r - t_a)^4$$

On remarquera que l'on ne peut utiliser la différence des quatrèmes puissances des températures absolues  $T_r^4 - T_a^4$  qui aurait été plus rationnelle à première vue. La quantité de chaleur croît plus rapidement que ne l'indique une fonction en  $T_r^4 - T_a^4$ . Si on réfléchit un instant, on comprend qu'il doit en être ainsi puisqu'à mesure que la température du palier croît l'importance des surfaces rayonnantes augmente, l'arbre et le support s'échauffant sur une étendue toujours plus grande: comme nous rapportons la quantité de chaleur à une surface constante (la surface projetée du coussinet) il est évident que la quantité rayonnée doit croître plus rapidement que ne l'indique la théorie pour une surface constante. Et c'est là, à notre avis, une nouvelle preuve, si elle était nécessaire, de la valeur des considérations émises au cours de cet exposé, de la sûreté de la méthode expérimentale employée et de l'importance des conclusions émises dans l'introduction à cette étude.

1637

P 7.120C

Are 1683



VERHANDLUNGEN  
DES 3. INTERNATIONALEN KONGRESSES  
FÜR TECHNISCHE MECHANIK

PROCEEDINGS  
OF THE 3<sup>RD</sup> INTERNATIONAL CONGRESS  
FOR APPLIED MECHANICS

COMPTES RENDUS  
DU 3<sup>ÈME</sup> CONGRÈS INTERNATIONAL DE  
MÉCANIQUE APPLIQUÉE

TEIL I — VOL. I — VOL I

STOCKHOLM 24—29 AUGUST 1930

IM AUFTRAG DES ORGANISATIONSKOMITEES  
HERAUSGEGEBEN VON

C. W. OSEEN      WALODDI WEIBULL



AB. SVERIGES LITOGRAFISKA TRYCKERIER  
STOCKHOLM