SUR LA

SÉPARATRICE D'OMBRE ET LUMIÈRE

DU SERPENTIN

PAR

Ch. HANOCQ

Candidat-ingénieur à Liége

Le serpentin est, comme on le sait, la surface enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt une hélice tracée sur un cylindre de révolution.

Les caractéristiques, intersections de deux sphères infiniment voisines, sont des grands cercles situés dans des plans normaux à l'hélice.

Pour trouver la séparatrice d'ombre et lumière du serpentin, nous rechercherons, dans chaque position déterminée de la sphère génératrice, l'intersection de la séparatrice d'ombre et lumière de cette sphère avec la caractéristique correspondante ou, ce qui revient au même, nous déterminerons l'intersection du plan de cette séparatrice avec celui de la caractéristique et nous porterons sur cette droite, de part et d'autre du centre, une longueur égale au rayon ρ de la sphère mobile.

Nous trouverons ainsi, dans chaque position de la sphère, deux points de la séparatrice cherchée qui sont diamétralement opposés.

Soit (m, m') un point de l'hélice donnée; soit (RL, R'L') la direction des rayons lumineux (fig. 1).

Le plan de la séparatrice de la sphère est perpendiculaire aux rayons lumineux et passe par (m, m'); sa trace horizontale est Q. Le plan de la caractéristique est perpendiculaire à la tangente

à l'hélice au point (m, m'); sa trace horizontale est P. L'intersection de ces deux plans est la droite $(mt, m't')$; pour obtenir des points de la séparatrice sur le serpentin, il suffira de porter sur $(mt, m't')$, de part et d'autre de (m, m'), la longueur ρ.

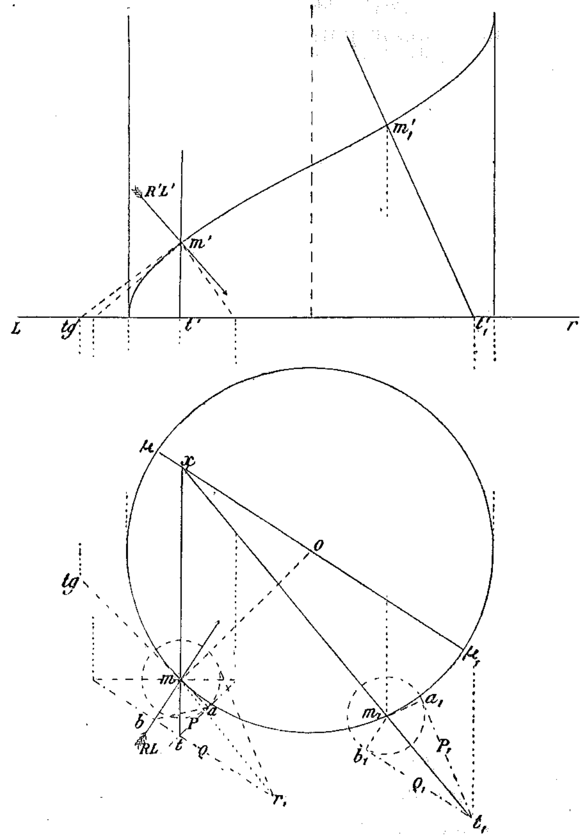

Fig. 1.

Nous pourrions répéter cette construction pour un autre point (m_1, m'_1) de l'hélice; mais remarquons que, si nous faisons participer le plan horizontal de projection au mouvement hélicoïdal qui amène (m, m') en coïncidence avec (m_1, m'_1), la trace P_1 du plan de la caractéristique sera à une distance $m_1 a_1 = ma$ du point m_1;

le plan de la caractéristique garde en effet une inclinaison constante sur le plan horizontal. Quant à la trace Q_1 du plan d'ombre de la sphère génératrice, elle est évidemment parallèle à Q et à une distance $m_1b = mb$ du point m_1. Donc l'intersection des deux plans est ici $(m_1t_1, m'_1t'_1)$.

On aurait pu l'obtenir plus facilement encore en traçant π_1

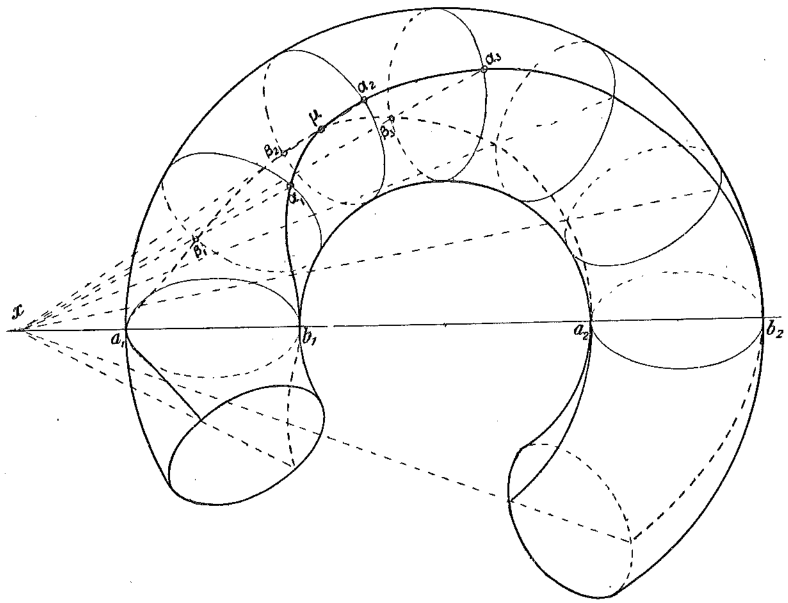

Fig. 2.

tangent au cercle de rayon ma et parallèle à P_1, c'est-à-dire à om_1 ; l'intersection r_1 avec Q_1 aurait donné mr_1 parallèle à m_1t_1.

Cette remarque, due à M. Legrand, permet de concentrer les constructions au point (m, m') et de déterminer facilement la projection verticale $m'_1t'_1$, ainsi que les points (x_1, x'_1), (y_1, y'_1) de la séparatrice du serpentin.

En effet, si nous déterminons les projections de la séparatrice d'ombre et lumière de la sphère de centre (m, m'), nous pourrons prendre les points d'intersection de mr avec la projection horizontale de cette séparatrice : soient X et Y ces deux points. Les

projections verticales seront X' et Y' sur la projection verticale $m'r'_1$ de mr_1. En menant par m'_1 une parallèle à mr'_1 et en portant de part et d'autre de (m_1, m'_1) les distances correspondantes $(mX, m'X')$, $(mY, m'Y')$ on aura les deux points (x_1, x'_1), (y_1, y'_1) de la séparatrice cherchée qui appartiennent à la sphère de centre (m_1, m'_1).

Nous allons démontrer une proposition importante qui facilite la construction de la séparatrice.

Théorème. — *Les projections horizontales des intersections des plans de la caractéristique et de la séparatrice de la sphère enveloppée, dans les différentes positions de celle-ci, convergent en un point x situé sur la perpendiculaire en o à la projection horizontale du rayon lumineux.*

En effet, menons ab et prolongeons tm jusqu'à la rencontre en x avec $o\mu$ perpendiculaire à RL. Le quadrilatère $matb$ étant inscriptible, on a :

$$\text{angle } mba = mta, \qquad \text{angle } mab = mtb.$$

Or, à cause des parallèles,

$$\text{angle } mta = xmo, \qquad \text{angle } mtb = oxm.$$

Donc les triangles mba et oxm sont équiangles et semblables, et l'on a :

$$\frac{ox}{ma} = \frac{om}{mb}.$$

D'où

$$ox = \frac{om \times ma}{mb} = \text{constante}.$$

Corollaire. — Cette propriété correspond à une propriété de la séparatrice dans l'espace qui peut s'énoncer comme suit :

Les diamètres de la sphère mobile, dont les extrémités appartiennent à la séparatrice du serpentin sont les génératrices d'une surface conoïde ayant pour plan directeur le plan perpendiculaire au rayon lumineux pour directrice rectiligne une verticale et pour directrice curviligne l'hélice.

DISCUSSION. — La formule

$$(1) \qquad ox = \frac{om \times ma}{mb}$$

permet de déterminer les particularités de la projection horizontale de la courbe séparatrice pour différentes inclinaisons du rayon lumineux.

En effet, on peut faire les hypothèses

$$mb > ma, \qquad mb = ma, \qquad mb < ma$$

qui correspondent respectivement à un rayon lumineux plus incliné, de même inclinaison ou moins incliné sur le plan horizontal que la tangente à l'hélice donnée.

Si $mb > ma$, on a $ox < om$ et le point x est à l'intérieur du cercle o. Dans cette hypothèse, xm peut occuper toutes les positions autour du point x et en particulier la position $x\mu$, $x\mu_1$ perpendiculaire à RL. Si nous remarquons que dans l'espace les droites $(x\mu, x'\mu')$, $(x\mu_1, x'_1\mu'_1)$ sont perpendiculaires au rayon lumineux, comme étant situées dans les plans des séparatrices d'ombre et lumière des sphères correspondantes, il nous faudra conclure que $(x\mu, x'\mu')$ et $(x\mu_1, x'_1\mu'_1)$ sont des horizontales et que par conséquent les points correspondants de la séparatrice sont sur le contour apparent. Cette conclusion est évidente si l'on observe que les projections horizontales des points de la séparatrice peuvent s'obtenir en les considérant comme intersection des droites telles que xm avec l'ellipse, projection horizontale de la caractéristique correspondante, cette courbe restant égale à elle-même.

Si $mb = \infty$, on a $ox = 0$; c'est le cas du rayon lumineux vertical. La séparatrice d'ombre et lumière devient le contour apparent en projection horizontale.

Si $mb = ma$, on a $ox = om$ et le point x se trouve sur la circonférence de centre o. La droite xm se confond avec la tangente en x lorsque m coïncide avec x. Dans cette hypothèse la caractéristique fait partie de la séparatrice, aux points de l'hélice où la tangente est parallèle aux rayons lumineux.

Si $mb < ma$, on a $ox > om$ et le point x est extérieur au cercle

de centre o. Les positions limites de xm sont $x\mu$ et $x\mu_1$ (fig. 2). Si nous considérons une position xmm_1 voisine de $x\mu$, nous aurons, en notant les points visibles de la séparatrice par α_1, α_2, α_3, et les points non visibles par β_1, β_2, β_3, deux courbes $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et $\beta_1\beta_2\beta_3$.

On voit de cette manière que les deux courbes se croisent en μ; pour la même raison que dans le premier cas, ces deux courbes passent sur le contour apparent en des points a_1, b_1, a_2, b_2, situés sur la droite ox.

REMARQUES. — I. On voit aisément que dans les trois cas la droite ox est un axe de symétrie de la projection horizontale.

II. Le tore pouvant être considéré comme un serpentin dont l'hélice est ramenée à une circonférence, on voit que les caractéristiques sont alors dans des plans verticaux et que l'on a dans la formule (1) $ma = 0$, donc $ox = 0$.

La directrice rectiligne de la surface conoïde coïncide ici avec l'axe du tore.

Cette remarque permet de donner une construction de la séparatrice d'ombre et lumière du tore, en particulier pour le cas du rayon lumineux parallèle au plan vertical.

En effet, les génératrices du conoïde, perpendiculaires aux rayons lumineux, seraient en projections verticales perpendiculaires à R'L'; il sera donc facile de les déterminer.

En les amenant par rotation dans la section méridienne, on obtiendra chaque fois deux points d'intersection avec la circonférence génératrice et par conséquent deux points de la séparatrice.

BRUXELLES, POLLEUNIS ET CEUTERICK, IMPRIMEURS, RUE DES URSULINES, 37.
MÊME MAISON A LOUVAIN, RUE DES ORPHELINS, 32.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.
CONST. DE FID. CATH., C. IV

VINGT-SEPTIÈME ANNÉE, 1902-1903

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1903

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
L G
BIBLIOTHÈQUE