

THÉORIE DE LA RÉSISTANCE DES PISTONS

PAR
M. CH. HANOCQ
INGÉNIEUR.

INTRODUCTION

La question de la résistance des pistons a été souvent étudiée et discutée, mais jusqu'à présent, aucune formule, établie *uniquement* sur les hypothèses de la résistance des matériaux, n'a été admise dans la pratique ; c'est qu'en effet, aucune de ces formules n'a conduit à des conclusions vérifiées par l'expérience.

La résolution de cette question offre donc un intérêt tout particulier, tant au point de vue pratique qu'au point de vue scientifique. Aujourd'hui, la tendance à augmenter la puissance et à accélérer la vitesse des moteurs oblige à réduire au minimum le poids des pièces à mouvement alternatif, et par conséquent le poids du piston. Il convient donc d'avoir non pas des formules de comparaison donnant des résultats satisfaisants dans des limites étroites, mais des formules dont la discussion conduise aux proportions rationnelles du piston.

Sans vouloir rappeler ici les différentes méthodes de calcul qui ont été proposées, nous croyons utile de dire quelques mots sur les deux plus récentes études parues, l'une, dans la « Revue Universelle des Mines » (année 1902), due à M. Pouleur, l'autre dans la « Revue de Mécanique » (années 1903-1904), où M. Codron étudie la question expérimentalement.

M. Pouleur discute d'abord les différentes formules proposées par MM. Otto Reymann et Schwarz et la méthode de calcul de M. Brune appliquée seulement au cas des plaques encastrees au pourtour. Dans un second chapitre, il étudie le cas d'une plaque, libre au pourtour, encastree au centre, et chargée uniformément ; il arrive à l'équation de la fibre moyenne déformée en écrivant que

« le travail des forces extérieures pendant la déformation est égal à la somme des travaux élastiques développés dans le corps du disque, par les tensions moléculaires ».

M. Pouleur arrive à cette conclusion que, au point de vue de la tension maximum, qui est évidemment la tension à l'encastrement, un piston se comporte comme s'il était constitué par une infinité de secteurs élémentaires n'ayant aucune liaison entre eux (1).

Nous montrerons plus loin l'erreur commise dans l'évaluation du travail des forces intérieures.

Des expériences de M. Codron, il résulte d'ailleurs que les tensions calculées au moyen de la formule de M. Pouleur ne sauraient correspondre aux tensions réelles, que les tensions *annulaires* dues à la liaison des différents secteurs élémentaires ont une influence prépondérante sur la résistance générale du piston.

M. Codron a proposé plusieurs formules, plus ou moins empiriques qui se vérifient dans la plupart des cas, mais ces formules ne sauraient donner une idée de la variation de la tension, dans les différentes parties, et par conséquent indiquer les proportions à donner à celles-ci. Ces formules peuvent servir lorsqu'on prend pour tension fictive la tension relevée sur un piston de même forme et de dimensions peu différentes.

Enfin les coefficients de sécurité auxquels M. Codron arrive dans la plupart de ses expériences ne sont pas réels, car à la rupture le piston réagit comme s'il avait une forme conique, et nous verrons plus loin que les pistons coniques présentent une plus grande résistance que les pistons plans de mêmes dimensions.

Nous montrerons dans la suite comment les formules que nous proposons rendent compte des modes de rupture obtenus par M. Codron, dans la plupart de ses expériences.

CHAPITRE I.

Pour prendre la question dans toute sa généralité, considérons (fig. 1) un solide de révolution, engendré par la section rectangu-

(1) La formule tient pourtant compte des contractions latérales, en ce sens que la valeur de la tension maximum est multipliée par $\frac{1}{1 + \nu^2}$ c'est-à-dire par le rapport 16/17.

laire $abcd$ tournant autour de l'axe oo_1 , ce solide étant placé sur un appui circulaire permettant une libre déformation.

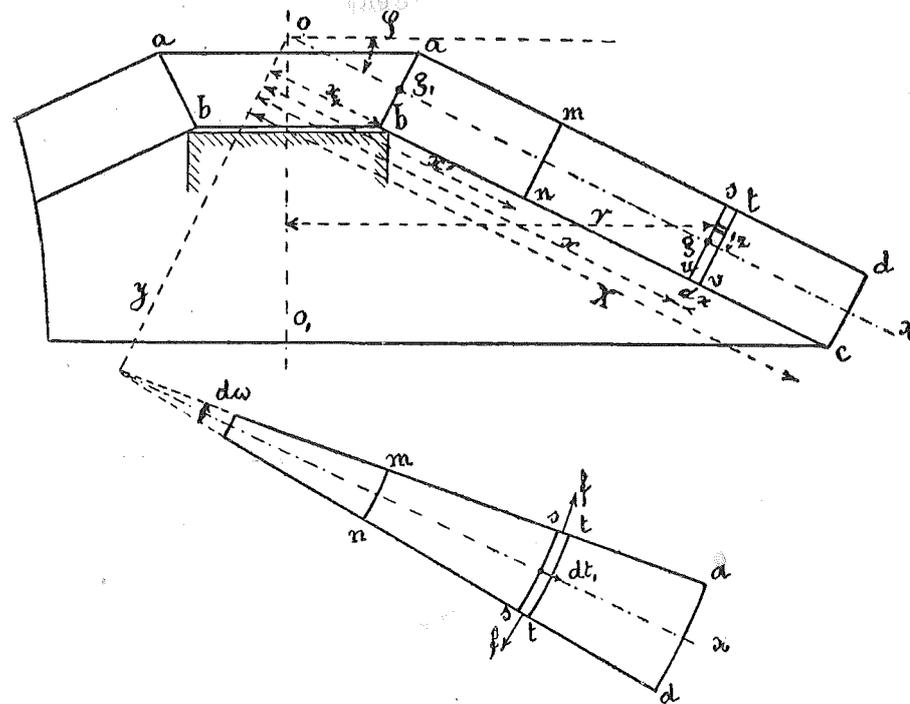


Fig. 1.

Nous supposons que ce solide soit soumis à une charge uniformément répartie de p kgs par unité de surface, cette charge étant appliquée normalement en chaque point; nous admettrons en outre, comme on le fait dans la théorie relative aux pièces travaillant par flexion, que toute section, primitivement plane et normale à la fibre moyenne, reste plane et normale à celle-ci, après la déformation.

Considérons un secteur élémentaire d'angle au centre dw , et rapportons sa section médiane à deux axes rectangulaires ox et oy , la fibre moyenne primitive et la perpendiculaire à celle-ci.

Une section quelconque su , faite à une distance x de l'origine des axes, normalement à la fibre moyenne, est venue après l'application des forces extérieures, en $s'u'$ (fig. 2); la section infiniment voisine tv est venue en $t'v'$ et fait avec $s'u'$ un angle

infinitement petit ψ . Menons $t''v''$ parallèle à $s'u'$ et considérons une fibre élémentaire d'épaisseur dz située à la distance z de la fibre moyenne ; on voit que cette fibre élémentaire de longueur dz s'est allongée d'une quantité

$$d\lambda = \frac{z}{\rho} dx,$$

ρ représentant le rayon de courbure à la distance x .

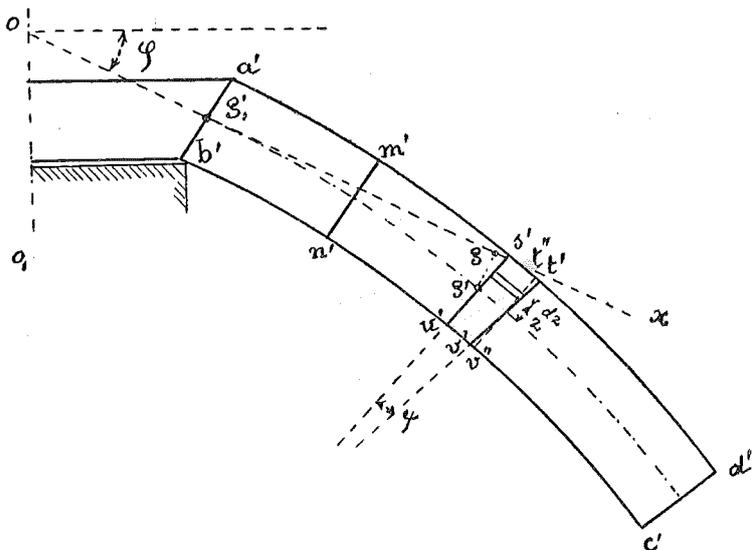


Fig. 2.

Cette fibre peut être considérée comme faisant partie d'un anneau de hauteur dz , d'épaisseur dx et de rayon r (fig. 1) où

$$r = x \cos \varphi + z \sin \varphi.$$

Par suite de cet allongement $d\lambda$, il existe un accroissement dt de tension *annulaire* lorsqu'on passe de la section $s'u'$ à la section $t'v'$ et en vertu de la relation fondamentale $dt = E di$

$$dt = E \frac{d\lambda}{r} = E \frac{z}{\rho} \frac{dx}{x \cos \varphi + z \sin \varphi}.$$

Pour connaître la tension t par unité de surface, à la distance x , il nous suffira d'intégrer entre x_1 et x , et d'y ajouter la tension

initiale résultant de ce que la section ab est venue en $a'b'$. En représentant par y_1' le coefficient angulaire de la tangente à la distance x_1 en g_1 nous aurons :

$$t = E z \frac{y_1'}{x_1 \cos \varphi + z \sin \varphi} + \int_{x_1}^x E \frac{z}{\rho} \frac{dx}{x \cos \varphi + z \sin \varphi}. \quad (1)$$

A cette tension annulaire t fait équilibre une tension *radiale* t_1 . Si nous appelons dt_1 l'accroissement de tension radiale en passant de su à tv , nous aurons (fig. 1) la relation d'équilibre entre les deux forces en jeu :

$$(x d\omega dz) dt_1 = 2f \frac{d\omega}{2} = t (dx dz) d\omega,$$

D'où

$$dt_1 = t \frac{dx}{x}$$

et

$$t_1 = \int_X^x t \frac{dx}{x}. \quad (2)$$

Ces relations étant établies, cherchons l'expression du moment fléchissant Mf dû aux forces extérieures dans une section quelconque mn à la distance x' , en remarquant que les forces intérieures de *liaison* telles que t_1 , agissent comme des forces extérieures.

Cherchons le moment dû à la pression p par unité de surface, supposée normale et uniformément répartie ; si nous appelons dm_1 le moment élémentaire relatif à l'élément $stuv$, dont la surface est $x d\omega dx$, nous aurons :

$$dm_1 = p x d\omega dx (x - x').$$

Le moment total correspondant peut donc s'écrire :

$$m_1 = \int_X^{x'} p d\omega x (x - x') dx.$$

Appelons dm_2 le moment élémentaire dû aux tensions radiales t_1 agissant sur l'élément $su tv$: nous aurons :

$$dm_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (x d\omega dz) dt_1 z.$$

ou, en remplaçant dt_1 par la valeur (2) trouvée précédemment :

$$dm_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z d\omega dz dx \left[E z \frac{y_1'}{x_1 \cos \varphi + z \sin \varphi} + \int_{x_1}^x E \frac{z}{\rho} \frac{dx}{x \cos \varphi + z \sin \varphi} \right]$$

ce qui donne, si on néglige $z \sin \varphi$ par rapport à $x \cos \varphi$:

$$dm_2 = \frac{E h^5}{12} d\omega \left[\frac{y_1'}{x_1} + \int_{x_1}^x \frac{1}{\rho} \frac{dx}{x} \right] \frac{dx}{\cos \varphi}.$$

Le moment résultant m_2 est donc égal à :

$$m_2 = \frac{E h^5}{12} d\omega \int_X^{x'} \frac{dx}{\cos \varphi} \left[\frac{y_1'}{x_1} + \int_{x_1}^x \frac{1}{\rho} \frac{dx}{x} \right].$$

Dans le cas général que nous traitons, il est encore un autre effet de la déformation. Si nous considérons un élément quelconque (fig. 1), à la distance x , par exemple, nous voyons que le centre de gravité g de la section su situé à la distance $x \cos \varphi$ de l'axe $o o_1$ est venu, après la déformation, en g' , situé à la distance $(x \cos \varphi - y \sin \varphi)$ du même axe (fig. 2). Si on suppose la tension annulaire τ qui en résulte comme uniforme sur toute la hauteur de l'élément $su tv$:

$$\tau = E i = E \frac{y \sin \varphi}{x \cos \varphi}$$

et si on représente par τ_1 , la tension radiale par unité de surface qui lui fait équilibre, on aura, en vertu de la relation (2) :

$$d\tau_1 = \tau \frac{dx}{x \cos \varphi} = E \frac{y \sin \varphi}{x^2 \cos^2 \varphi} dx.$$

La composante $d\tau_1 \sin \varphi$, normale à l'axe des x , intervient pour équilibrer le moment des forces extérieures ; si nous appelons dm_3 le moment élémentaire relatif à la section mn , nous aurons :

$$dm_3 = (h x \cos \varphi d\omega) d\tau_1 \sin \varphi (x - x')$$

et

$$m_3 = E h d\omega \int_X^{x'} \frac{y}{x} (x - x') \operatorname{tg}^2 \varphi dx.$$

Il est facile de voir que

$$Mf = m_1 - m_2 - m_3$$

Mf étant le moment des forces extérieures dans la section mn .

Ce moment doit être égal au moment résistant Mr dû à la flexion, moment qui a pour expression :

$$Mr = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E \frac{z}{\rho} x' d\omega z dz = \frac{E h^5}{12} d\omega \frac{x'}{\rho}.$$

En remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par sa valeur approchée $\frac{d^2 y}{dx^2}$, et x' par x dans la relation :

$$Mf = Mr \quad (3)$$

nous aurons l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée.

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{\cos \varphi} \int_X^{x'} dx \left[\int_{x_2}^x \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{x} + \frac{y_1'}{x_1} \right] - \frac{12 \operatorname{tg}^2 \varphi}{h^2} \int_X^{x'} \frac{y}{x} (x - x') dx = - \frac{2p}{E h^3} \int_X^{x'} x (x - x') dx. \quad (1)$$

Cette équation est du quatrième ordre ; sa résolution n'offrirait

guère d'intérêt, car la détermination des quatre constantes rendrait l'application des formules qu'on pourrait en tirer, pratiquement impossible.

Nous verrons comment, par contre, cette équation conduit à des formules simples, dans le cas où $\varphi = 0$.

CHAPITRE II.

1. — Resolution de l'équation dans le cas où $\varphi = 0$.

L'équation (I) se présente dans ce cas sous la forme d'une équation facilement réductible à une équation homogène du second ordre; nous avons, en effet,

$$\begin{aligned} x \frac{d^2 y}{dx^2} - \int_X^x dx \left(\int_{x_1}^x \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{x} + \frac{y_1'}{x_1} \right) \\ = \frac{2p}{E h^3} (2 X^3 - 3 X^2 x + x^3). \quad (I') \end{aligned}$$

Mais, pour rendre plus facile la détermination des constantes et simplifier les formules, nous admettrons que

$$\int_{x_1}^x \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{x} + \frac{y_1'}{x_1} = \frac{dy}{dx} \frac{1}{x},$$

ce qui revient à prendre pour la valeur de la tension annulaire t , la valeur adoptée par M. Pouleur :

$$t = E z \frac{dy}{dx} \frac{1}{x}.$$

Nous montrerons plus loin, en résolvant l'équation (I') pour le cas simple d'un disque encastré au centre et libre à la périphérie, quelle erreur on commet en faisant cette hypothèse.

L'équation que nous nous proposons de résoudre pour le moment est donc :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \int_X^x \frac{dy}{dx} \frac{dx}{x} = \frac{2p}{E h^3} (2 X^3 - 3 X^2 x + x^3). \quad (I'')$$

Remarque. — Cette équation se ramènerait à celle obtenue précédemment par M. Pouleur, en faisant l'hypothèse inadmissible :

$$\int_X^x \frac{dy}{dx} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{dx} \int_X^x \frac{dx}{x}.$$

Cette erreur provient de ce que dans l'évaluation du travail dû aux tensions annulaires, M. Pouleur suppose « que la pièce primitivement plane, déformée entre A et B (fig. 3) et alignée suivant

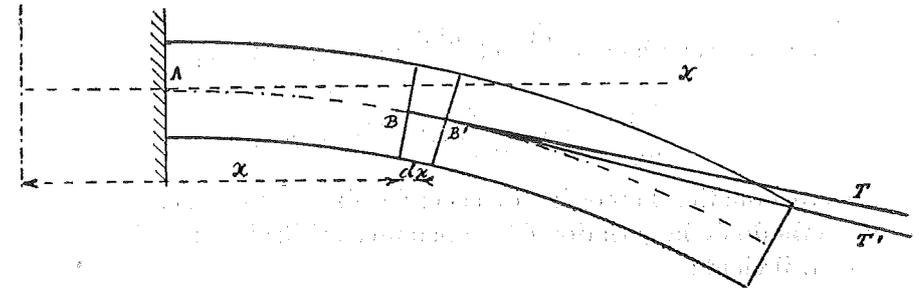


Fig. 3.

la tangente en B, vienne suivant la tangente en B' ». Cette hypothèse conduit à intégrer :

$$T \times \Delta = E \frac{z^2}{x} dx \sin \alpha d\alpha dz$$

entre X et x , en laissant constant $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$.

On comprend ainsi l'importance et la difficulté de se rendre compte, dans l'application du principe énoncé par M. Pouleur, de la manière dont se produisent les déformations. M. Codron, en discutant les conclusions de M. Pouleur, signalait d'ailleurs l'in vraisemblance de l'hypothèse ci-dessus et lui attribuait la cause de l'erreur, sans toutefois préciser.

Différentions l'équation (I'') et posons :

$$\frac{dy}{dx} = v \quad x = X e^t ;$$

nous aurons nécessairement :

$$x \frac{d^5 y}{dx^5} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{6p}{E h^5} (x^2 - X^2) \quad (I''')$$

$$x \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v = \frac{6p}{E h^5} (x^2 - X^2).$$

Or,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{1}{X} e^{-t} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dx} \right) : \frac{dx}{dt} = \frac{1}{X^2} e^{-2t} \left(\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{dv}{dt} \right).$$

Donc, en remplaçant $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{d^2 v}{dx^2}$ par ces valeurs,

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - v = \frac{6p}{E h^5} X^5 (e^{3t} - e^t).$$

Cette équation homogène du second ordre peut être résolue par la méthode de la variation des constantes arbitraires ; en l'appliquant, il vient :

$$v = \left[c_1 + \frac{1}{2} \int \frac{6p}{E h^5} X^5 (e^{-3t} - e^t) e^{-t} dt \right] e^t + \left[c_2 - \frac{1}{2} \int \frac{6p}{E h^5} X^5 (e^{3t} - e^t) e^t dt \right] e^{-t}$$

puisque les racines de l'équation caractéristique sont égales, dans ce cas-ci, à ± 1 .

Nous pouvons simplifier en remarquant que :

$$\int (e^{3t} - e^t) e^{-t} dt = \frac{e^{3t}}{2} - t$$

$$\int (e^{3t} - e^t) e^t dt = \frac{e^{4t}}{4} - \frac{e^{2t}}{2}.$$

Il vient ainsi l'expression :

$$v = \frac{3p X^5}{E h^5} \left[c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{e^{3t}}{4} + \frac{e^t}{2} - e^t t \right]$$

où c_1 , et c_2 sont deux constantes.

Comme :

$$e^t = \frac{x}{X} \quad t = l \frac{x}{X}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3p X^5}{E h^5} \left[c_1 \left(\frac{x}{X} \right) + c_2 \left(\frac{x}{X} \right)^{-1} + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{X} \right)^5 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{X} \right) - \frac{x}{X} l \left(\frac{x}{X} \right) \right].$$

De cette valeur, nous pouvons tirer celle de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ par différenciation :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3p X^5}{E h^5} \left[c_1 \left(\frac{x}{X} \right) - c_2 \left(\frac{x}{X} \right)^{-1} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{X} \right)^5 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{X} \right) - \left(\frac{x}{X} \right) l \left(\frac{x}{X} \right) \right] \frac{1}{x}.$$

2. — Cas des pistons plans à un seul disque.

On peut considérer deux types de pistons plans à un seul disque, l'un complètement symétrique par rapport à la fibre moyenne représentée fig. 4, l'autre dissymétrique par rapport à celle-ci (fig. 5).

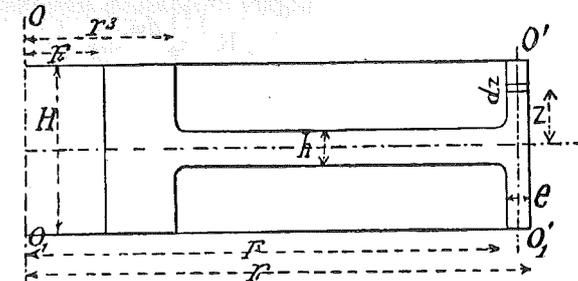


Fig. 4.

Recherchons dans l'un et l'autre cas, comment l'équation (I'') doit être modifiée, pour tenir compte de l'influence de la couronne sur la déformation.

Considérons (fig. 4) une fibre d'épaisseur dz , à la distance z de la fibre moyenne, et supposons que la tension annulaire soit uniforme dans toute l'épaisseur de la couronne ; cette hypothèse est admis-

sible vu les dimensions pratiques données à celle-ci. Si nous supposons en outre que sous l'action de la déformation l'axe $o_1 o_1'$ décrive un angle α , de manière à rester perpendiculaire à la fibre moyenne déformée, nous avons pour expression de la tension annulaire t , par unité de surface :

$$t = E z \frac{\operatorname{tg} \alpha}{R} = E z \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right) R}{R}$$

Et comme nous avons trouvé que :

$$dt_1 = t \frac{dx}{x},$$

dt_1 représentant l'accroissement de tension radiale par unité de surface, nous pouvons écrire :

$$t_1 = E z \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right) R}{R} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dx}{x} = E \frac{x}{R} \left(\frac{dy}{dx}\right) R l \frac{r_1}{r_2}$$

Si nous appelons θ la tension développée dans la fibre d'épaisseur dz et dM le moment correspondant, par rapport à la fibre moyenne :

$$\theta = E z dz \left(\frac{dy}{dx}\right) R l \frac{r_1}{r_2} d\omega,$$

$$dM = E z^2 dz \left(\frac{dy}{dx}\right) R l \frac{r_1}{r_2} d\omega.$$

En intégrant entre $-\frac{H}{2}$ et $+\frac{H}{2}$, nous aurons le moment total

$$M = E \left(\frac{dy}{dx}\right) R l \frac{r_1}{r_2} \frac{H^3}{12} d\omega.$$

Remarque : Nous pouvons écrire :

$$l \frac{r_1}{r_2} = l \frac{r_2 + e}{r_2} = l \left(1 + \frac{e}{r_2}\right),$$

e représentant l'épaisseur de la couronne, on voit que, approximativement,

$$l \frac{r_1}{r_2} = \frac{e}{R}$$

et qu'ainsi

$$M = E \left(\frac{dy}{dx}\right) R \frac{e}{R} \frac{H^3}{12} d\omega.$$

Dans le cas représenté (fig. 5), nous trouvons

$$M = E \left(\frac{dy}{dx}\right) R \frac{e}{R} \frac{H^3}{3} d\omega,$$

c'est-à-dire un moment quatre fois plus grand. On voit qu'il y a avantage à adopter la forme dissymétrique de la fig. (5), au point de vue de la résistance du piston.

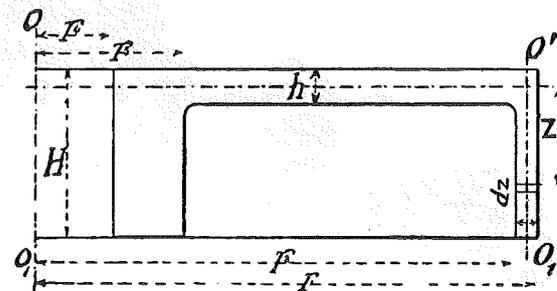


Fig. 5.

Voyons comment se modifie l'équation trouvée

$$Mf = m_1 - m_2 - m_3 = Mr.$$

Il est clair que le moment M est de sens contraire au moment de la charge uniformément appliquée, et que ce moment doit être soustrait du moment Mf des forces extérieures, les forces de liaison agissant comme des forces extérieures. Nous aurons donc dans le cas présent :

$$Mf = m_1 - m_2 - m_3 - M = Mr$$

ou explicitement, après réduction :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \int_R^x \frac{dy}{dx} \frac{dx}{x} = \frac{2p}{E h^3} (2 R^3 - 3 R^2 x + x^3) - a \left(\frac{dy}{dx}\right) R \left(\frac{H}{h}\right)^3 \frac{e}{R},$$

a étant égal à 1 ou à 4 suivant qu'il s'agit d'un piston complé-

tement symétrique ou complètement disymétrique, par rapport à la fibre moyenne.

Par différentiation, on arrive toujours à l'équation (1''') que nous venons de résoudre.

Pour déterminer les constantes, remarquons que pour $x = R$,

$$R \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_R = -a \left(\frac{dy}{dx} \right)_R \left(\frac{H}{h} \right)^5 \frac{e}{R} \quad (1)$$

et que pour $x = r_3$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{r_3} = y_1' \quad (2)$$

par hypothèse.

Les formules, donnant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2 y}{dx^2}$, peuvent s'écrire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 p R^5}{E h^5} \left(c_1 \frac{r}{R} + c_2 \frac{R}{r} + \beta \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3 p R^5}{E h^5} \left(c_1 \frac{r}{R} - c_2 \frac{R}{r} + \alpha \right) \frac{1}{r}$$

où

$$\alpha = \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^5 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right) - \frac{r}{R} l \frac{r}{R} \quad (1')$$

$$\beta = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^5 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right) - \frac{r}{R} l \frac{r}{R}. \quad (2')$$

Pour faciliter les calculs, nous avons consigné les valeurs de α et β dans le tableau ci-contre, pour différentes valeurs du rapport r/R .

Avec ces notations, les relations pour la détermination des constantes deviennent :

$$c_1 - c_2 + \frac{1}{4} = - \left(c_1 + c_2 + \frac{3}{4} \right) a \left(\frac{H}{h} \right)^5 \frac{e}{R} \quad (1'')$$

$$c_1 \frac{r}{R} + c_2 \frac{R}{r} + \beta = 0, \quad (2'')$$

où r représente la valeur de x pour laquelle la tangente à la fibre

moyenne déformée est parallèle à l'axe des X , par conséquent telle que :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_r = 0.$$

$\frac{r}{R}$	$-\log \frac{r}{R}$	$-l \frac{r}{R}$	α	β
0,100	1,00000	2,30258	0,1810	0,28051
0,125	0,90394	2,08086	0,1990	0,32308
0,150	0,82381	1,89470	0,2117	0,36009
0,175	0,75473	1,73587	0,2205	0,39265
0,200	0,69897	1,60940	0,2278	0,43380
0,225	0,64781	1,49192	0,2317	0,45960
0,250	0,60206	1,3850	0,2329	0,47515
0,275	0,56067	1,2907	0,2330	0,49763
0,300	0,52288	1,2030	0,2311	0,51790
0,350	0,45593	1,0496	0,2242	0,5528
0,400	0,39794	0,9163	0,2144	0,5824
0,500	0,30103	0,6931	0,1894	0,6325
0,600	0,22185	0,5128	0,1696	0,6516
0,700	0,15480	0,3577	0,1494	0,6834
0,800	0,09691	0,2231	0,1624	0,7064
0,900	0,04576	0,1044	0,1900	0,7250
1,000	0,0000	0,0000	0,2500	0,7500

Expressions des tensions. — Appelons T la tension maximum due à la flexion dans une section quelconque, t la tension annulaire correspondante ; nous aurons les relations :

$$T = E \frac{h}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{2} p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \frac{R}{r} \left[c_1 \frac{r}{R} - c_2 \frac{R}{r} + \alpha \right]$$

$$t = E \frac{h}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{x} = \frac{3}{2} p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \frac{R}{r} \left[c_1 \frac{r}{R} + c_2 \frac{R}{r} + \beta \right],$$

les valeurs de c_1 et c_2 étant déterminées par les équations (1') et (2').

Remarque. — On voit que les valeurs de T et t dépendent d'un facteur fonction r/R , facteur constant par conséquent, pour tous les pistons géométriquement semblables.

Nous pouvons donc poser dans ce cas :

$$T = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times k_1$$

$$t = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times k_2,$$

k_1 et k_2 étant des constantes, ce qui conduit à la conclusion suivante :

Pour une même pression, tous les pistons géométriquement semblables ont même coefficient de sécurité.

L'épaisseur du disque doit varier comme \sqrt{p} dans le cas où l'on compare des pistons soumis à des pressions différentes.

Exemple 1. — Prenons comme premier exemple d'application des formules, le cas du piston représenté (fig. 6) en fer

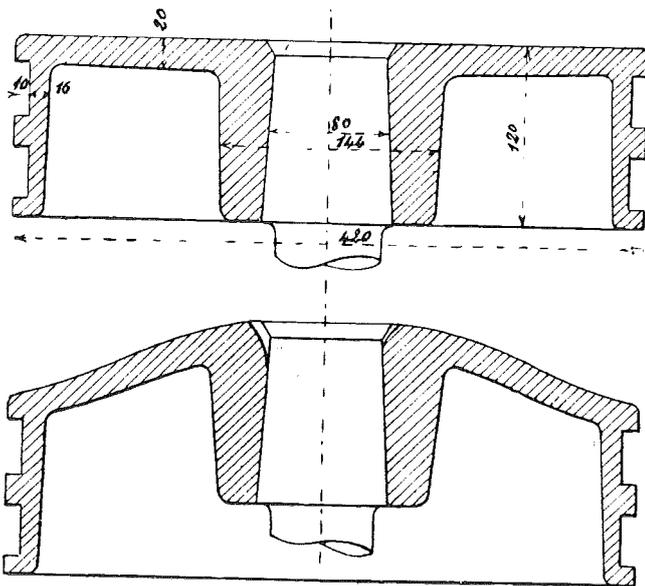


Fig. 6.

cémenté, ayant fonctionné dix ans sous une pression de 10 kgs par centimètre carré et pesant 47 kgs; ce piston est un de ceux qui ont été soumis aux essais par M. Codron.

La fig. 6 représente le même piston déformé sous une charge de 580,000 kgs, soit 420 kgs par centimètre carré.

Cette charge peut être considérée comme la charge de rupture; elle correspond à un coefficient de sécurité de 420/10 soit 42. Il convient pourtant de remarquer que ce nombre ne donne dans ce cas aucune idée de la charge correspondant à une déformation permanente, qui est évidemment la seule à envisager.

En effet, à mesure que la déformation s'accroît, le piston réagit de plus en plus à la manière d'un piston conique, et nous verrons plus loin que ceux-ci présentent une résistance plus grande, les dimensions étant les mêmes.

Prenons pour les calculs les dimensions :

$$R = 210 \quad c = 20 \quad H = 120 \quad h = 20 \quad H_1 = 120$$

Nous avons représenté par r la valeur de x pour laquelle la tangente à la fibre moyenne est parallèle à l'axe des x ; cette valeur de r dépend des dimensions de la douille. Nous montrerons en prenant dans les calculs successivement r égal au rayon extérieur, moyen et intérieur, l'importance qu'a chacune de ces hypothèses sur les valeurs des tensions T et t .

Remarque. — Nous aurions pu répéter pour la douille les mêmes considérations que celles que nous avons développées à propos de la recherche du moment dû à la couronne; mais ici, l'hypothèse que la tension annulaire est constante dans l'épaisseur de la douille, n'est pas admissible. Au reste, il importe assez peu, au point de vue de l'application des formules, de prendre r égal au rayon moyen ou au rayon intérieur, du moment où on fait la même hypothèse dans le calcul des tensions relatives aux pistons existants, avec lesquels on veut comparer.

Nous proposons de prendre pour r le rayon moyen de la douille; c'est l'hypothèse la plus admissible.

Prenons $r = 60$.

Nous trouvons :

$$4 \left(\frac{H}{h} \right)^3 \frac{e}{R} = 83 \quad c_2 = -0,085 \quad c_1 = -0,730,$$

ce qui donne pour la tension à la douille, $\frac{r}{R}$ étant égal à 0,357,

$$T = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times 0,88 = 97 p.$$

Pour $r = 75$

$$c_2 = -0,119 \quad c_1 = -0,628$$

et on trouve pour tension à la douille

$$T = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times 1,4 = 154 p.$$

Si au contraire, nous prenons pour r la valeur du rayon intérieur 45,

$$c_2 = -0,055 \quad c_1 = -0,694$$

et

$$T = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times 0,544 = 60 p.$$

Remarque I. — On voit d'après ces calculs que la tension T résultant de la flexion va diminuant rapidement à mesure qu'on suppose moins parfait l'encastrement à la douille. Par contre la tension annulaire t va en augmentant rapidement à mesure que croît l'angle de déformation de la douille.

C'est ainsi que dans l'hypothèse où $r = 45$

$$t = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times 0,65 = 71 p,$$

alors que dans l'hypothèse où $r = 75$, c'est-à-dire dans l'hypothèse de l'encastrement parfait à la douille

$$t = 0.$$

Cette remarque permet d'expliquer le mode de rupture obtenu par M. Codron. En effet, la déformation de la douille telle qu'elle s'est produite (fig. 6) montre que la valeur de r , pour laquelle la tangente est horizontale, est inférieure à 45, rayon intérieur de la douille. D'après le calcul, t est donc supérieur à T et la rupture doit se produire aux environs de la douille *suivant un rayon* : c'est ce que l'on constate.

Ainsi, si l'essai avait été effectué, le piston tourné dans l'autre sens, on aurait obtenu nécessairement une moins grande déformation de la douille et par conséquent une rupture par flexion suivant un cercle et sous une charge certainement inférieure à 500 000 kgs.

Remarque II. — Nous acceptons comme tension réelle maximum :

$$T = 97 p = 970 \text{ kgs/centim}^2$$

valeur obtenue pour r égal au rayon moyen de la douille ; cette valeur est encore relativement élevée pour des efforts répétés de sens contraires bien qu'elle soit le $\frac{1}{4}$ seulement de la tension obtenue en appliquant la formule de M. Pouleur. Mais il faut remarquer qu'il s'agit bien ici de résistance à la flexion et M. Codron trouve pour la limite de cette résistance 12 300 kgs par centim². Dans ces conditions, la valeur de T ci-dessus correspondrait à un coefficient de sécurité de

$$\frac{1}{3} \frac{12300}{970} = 4,25,$$

le facteur $\frac{1}{3}$ tenant compte de ce qu'il s'agit d'efforts répétés de sens contraires.

Nous pouvons faire encore remarquer que nous n'avons pas tenu compte des *contractions latérales* qui introduisent dans la formule de M. Pouleur le terme $\frac{1}{1 + \eta^2} = 16/17$, que nous avons dû prendre pour valeur de $\frac{1}{\rho}$, la valeur approchée $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Enfin, à cause de la liaison particulière des éléments, il ne saurait se développer dans ce cas, des efforts secondaires, tel que le flambement pour la partie comprimée.

Remarque III. — Le calcul montre qu'il n'y a pas d'intérêt à augmenter les dimensions de la couronne. En effet, si nous passons à la limite, nous trouvons pour

$$4 \left(\frac{H}{h} \right)^3 \frac{e}{R} = \infty$$

$$c_2 = -0,1185 \quad c_1 = -0,6315$$

$$T = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times 1,37 = 150 p$$

alors que dans la même hypothèse où $r = 75$ et pour

$$4 \left(\frac{H}{h} \right)^3 \frac{e}{R} = 83$$

$$T = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times 1,4 = 154 p.$$

Si nous calculons dans l'hypothèse où il n'y a pas de couronne, nous trouvons

$$4 \left(\frac{H}{h} \right)^5 \frac{e}{R} = 0 \quad c_2 = -0,148 \quad c_1 = -0,398$$

$$T = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times 0,495 = 208 p.$$

Nous voyons que la couronne réduit la tension à l'encastrement dans le rapport de 150/208, c'est-à-dire dans le rapport de 3/4.

Si nous cherchons la valeur de T au moyen de la formule de M. Pouleur, qui ne tient pas compte des tensions annulaires, nous trouvons :

$$T = 387 p.$$

Exemple II. — Considérons un second type de piston à simple toile représenté fig. 7 ; il pèse 31 kgs et a fonctionné sous une

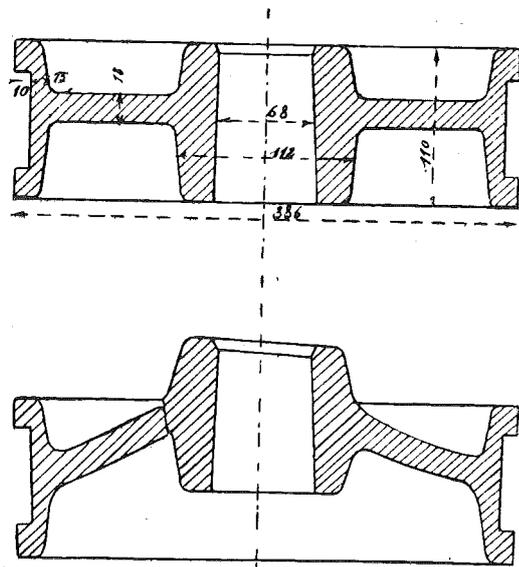


Fig. 7.

pression normale de 15 kgs par cm^2 . C'est un piston en acier coulé. Il s'est rompu aux essais sous une charge de 401900 kgs. La fig. 7 montre le mode de rupture ; on voit que la douille ne s'est pas déformée comme dans le premier cas, le métal étant ici moins ductile ; il en est résulté *une rupture circulaire par flexion*.

En prenant les valeurs

$$H = 110 \quad h = 18 \quad c = 20 \quad R = 168 \quad r = 45$$

nous trouvons :

$$\left(\frac{H}{h} \right)^2 \frac{e}{R} = 27 \quad c_2 = -0,0862 \quad c_1 = -0,6527$$

et pour tension à la douille :

$$T = p \left(\frac{R}{h} \right)^2 0,81 = 98 p = 1470 \text{ kil./cm}^2.$$

On voit que le coefficient de sécurité est moins élevé que dans le cas précédent.

3. — Cas des pistons plans à deux disques.

Ce genre de piston se prête beaucoup moins bien à un calcul rigoureux, basé sur une formule analytique ; il est en effet impossible de faire intervenir dans le calcul l'influence des nervures radiales que l'on ménage ordinairement dans ce genre de piston.

Si, dans la déformation, les deux disques restaient parfaitement parallèles, les formules précédentes pourraient s'appliquer également ici, à la condition de remplacer :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \text{ par } 2 \int_{-\frac{h'}{2}}^{+\frac{h''}{2}} z^2 dz = \frac{h''^3 - h'^3}{6}$$

C'est là l'hypothèse faite par M. Pouleur et par M. Codron, dans les formules qu'ils ont proposées ; mais on comprend que malgré les nervures radiales qui réunissent les deux disques, il ne saurait être question d'envisager cette hypothèse comme se rapprochant des conditions pratiques de déformation ; elle conduit nécessairement à des tensions et à des dimensions trop faibles lorsque la hauteur totale h'' est un peu grande.

Dans le cas où il n'y a pas de nervures, on pourrait établir une formule exacte, en considérant le piston comme constitué par deux disques ayant une couronne commune, l'un étant soumis à une charge uniformément répartie, l'autre à une charge appliquée à la

périphérie, par l'intermédiaire de la couronne. En effet, représentons par P la charge inconnue par unité de longueur, répartie à la circonférence extérieure, nous pouvons établir les équations précédentes dans le cas où

$$m_1 = (P X d\omega) X = P X^2 d\omega$$

nous aurons ainsi $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)' \left(\frac{d y}{d x}\right)'$ et y' en fonction de P . Pour

éliminer P il suffira d'écrire que la valeur de y pour le disque supérieur est égale à la valeur de y' pour le disque inférieur, x étant égal à X . Cette méthode conduirait naturellement à des calculs compliqués; nous proposons de regarder les deux disques comme équilibrant chacun la moitié de la charge; cette hypothèse fournira des formules donnant des tensions trop élevées, mais ces formules auront l'avantage de conduire à des résultats de comparaison beaucoup plus exacts. C'est ainsi qu'en considérant les deux disques comme restant rigoureusement parallèles dans la déformation, on trouve des valeurs des tensions qui dépendent peu de l'épaisseur des disques, et qui deviennent très faibles pour de grandes hauteurs de piston, ce qui est absolument inadmissible.

Remarque. — I. — Si l'on admet que les deux disques supportent chacun la moitié de la charge, on voit aisément que les pistons à deux disques seront plus lourds pour un même coefficient de sécurité; en effet, en doublant l'épaisseur d'un piston à un seul disque, on quadruple sa résistance.

Remarque 2. — Il est important de remarquer que les nervures n'augmentent pas nécessairement le coefficient de sécurité; elles empêchent la déformation de se produire, et l'importance des réactions, dues aux tensions annulaires, est ainsi diminuée. Par contre, les nervures qui supportent, dans ces conditions, presque toute la charge, ont une tendance à se rompre horizontalement, sous l'influence de l'effort rasant.

C'est ainsi que, dans les essais effectués par M. Codron, la rupture des nervures se produit avant la rupture complète du piston.

Il semble donc qu'il y aurait avantage à reporter le poids de ces nervures sur l'épaisseur des disques et à proportionner largement

les congés de raccord avec la douille. On éviterait en même temps la complication due à l'emploi en fonderie de plusieurs noyaux distincts.

Exemple. — Prenons comme exemple un des pistons en fer misé, soumis aux essais par M. Codron; ce piston est représenté (fig. 8); il a fonctionné sous une pression de 12 kgs par centi-

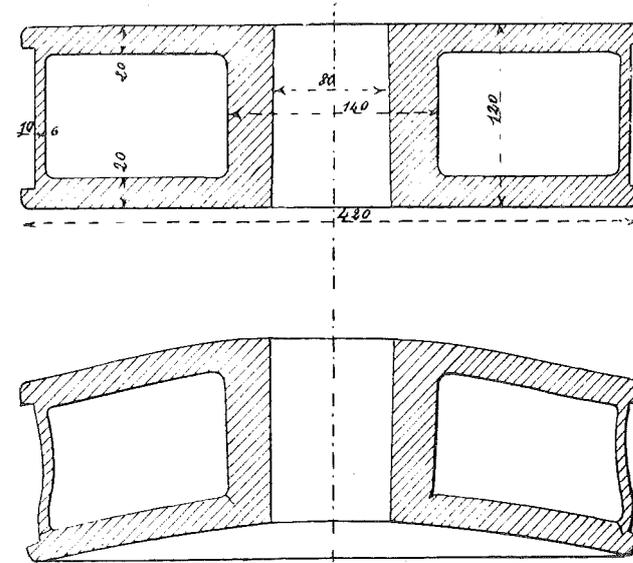


Fig. 8.

mètre carré et pèse 58 kgs; il s'est rompu sous une charge de 251,000 kgs et sous une flèche de 29 m/m.

Le calcul donne, en prenant $r = 54$

$$4 \left(\frac{H}{h}\right)^3 \frac{c}{R} = 24 \quad c_2 = -0,08 \quad c_1 = -0,663$$

$$T_{\max} = p \left(\frac{R}{h}\right)^2 0,673 = 85 \text{ kil.}$$

T_{\max} étant la valeur de la tension à la douille.

Remarque 1. — Le coefficient de sécurité semble donc à peu près le même qu'avec le piston en fer de même diamètre représenté (fig. 6). Cependant celui-ci s'est rompu sous un effort double. Ce fait peut s'expliquer en remarquant que la charge de

rupture à la flexion, déterminée sur une éprouvette du même métal, a été de 7,150 kgs contre 12,300 kgs observée dans le cas précédent; que de plus à la rupture, la couronne s'est affaissée, et qu'ainsi la réaction de celle-ci est devenue pour ainsi dire nulle.

Si l'épaisseur de la couronne avait été suffisante pour transmettre l'effort du disque supérieur sur le disque inférieur, la charge finale eût été certainement beaucoup plus élevée; en tenant compte du rapport des charges de rupture à la flexion, la formule montre que l'effort limite aurait dû atteindre :

$$580,000 \times \frac{0,88}{0,67} \times \frac{7150}{12\,300} \text{ soit } 440,000 \text{ kil.}$$

ce qui est parfaitement admissible.

On voit par là toute l'importance qu'il y a à bien proportionner les différentes parties du piston.

Remarque II. — Il est intéressant d'observer que le disque inférieur s'est rompu par flexion, tandis que le disque supérieur s'est rompu dans le sens des rayons. La théorie permet d'expliquer ce fait très facilement; en effet, à la partie inférieure, l'angle de la déformation de la douille est à peu près nul et la valeur de T est supérieure à celle de t ; le contraire a lieu à la partie supérieure.

4. — Cas des pistons coniques.

Nous avons montré le peu d'intérêt que présenterait au point de vue pratique, la résolution de l'équation générale trouvée au chapitre I de cette étude. La résolution permettrait pourtant de comparer les tensions pour différentes valeurs de φ . Mais on peut comprendre l'importance du terme m_3 , en remarquant que le maximum de

$$\tau = E \frac{y}{x} \operatorname{tg} \varphi$$

correspond au bord extérieur du piston et qu'ainsi m_3 peut devenir très important lorsque φ est un peu grand.

L'équation trouvée semble donc donner raison à la pratique qui a consacré l'emploi des pistons coniques.

Pour les petits angles, on pourrait s'en tenir aux formules établies dans l'hypothèse où $\varphi = 0$, le coefficient de sécurité ne pouvant qu'en être augmenté.

Remarque I. — L'équation trouvée au chapitre I n'étant pas homogène en x , on peut prévoir que la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ne se présentera plus sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p \left(\frac{X}{h} \right)^2 K_1$$

Remarque II. — Nous avons vu que la couronne peut réduire la tension à la douille, dans le rapport limite $3/4$. Il est certain que dans les pistons coniques, la couronne joue un rôle beaucoup plus important que dans les pistons plans; c'est ce qui explique en partie les valeurs élevées obtenues par M. Codron, pour les charges de rupture.

CHAPITRE III.

Diagrammes relatifs à un disque plan encastré au centre et libre à la périphérie

L'équation, que nous avons résolue au chapitre II, ne découle pas directement de celle établie d'une manière tout à fait générale au chapitre I; nous avons en effet posé :

$$\int_X^x dx \left(\int_{x_1}^x \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{x} + \frac{y_1'}{x_1} \right) = \int_X^x \frac{dy}{dx} \frac{dx}{x}$$

Nous allons voir en résolvant l'équation (I') quelle erreur on commet en faisant cette hypothèse.

Différentions l'équation (I'); nous aurons successivement :

$$x \frac{d^5 y}{dx^5} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \int_{x_1}^x \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{x} - \frac{y_1'}{x_1} = \frac{6p}{E h^5} (x^2 - X^2) \quad (1)$$

$$x \frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{12p}{E h^5} x$$

Posons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = v \text{ et } x = X e^t;$$

nous aurons

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} - v = \frac{E h^5}{12 p} X^2 e^{2t}$$

Les racines de l'équation caractéristique

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

sont

$$\alpha_1 = \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} = 0,366 \quad \alpha_2 = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2} = -1,366$$

La méthode des coefficients variables conduit à la formule

$$v = \left(c_1 + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \int \frac{12 p}{E h^3} X^2 e^{2t} e^{-\alpha_1 t} dt \right) e^{\alpha_1 t} + \left(c_2 - \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \int \frac{E h^3}{12 p} X^2 e^{2t} e^{-\alpha_2 t} dt \right) e^{\alpha_2 t}$$

ou en simplifiant :

$$v = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\frac{e^{2t}}{2 - \alpha_1} - \frac{e^{2t}}{2 - \alpha_2} \right) \frac{12 p}{E h^3} X^2$$

ou encore, en fonction de x ,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{12 p}{E h^3} X^2 \left[c_1' \left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_1} + c_2' \left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_2} + \frac{1}{(2 - \alpha_1)(2 - \alpha_2)} \left(\frac{x}{X} \right)^2 \right]$$

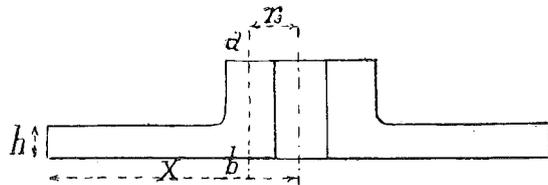


Fig. 9.

Pour déterminer les constantes, remarquons que d'après l'équation (I) pour $x = X$ (fig. 10)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

et d'après l'équation différentiée (I)

$$x_1 \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_1 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 \frac{1}{x_1} = \frac{6 p}{E h^3} (x_1^2 - X^2)$$

Or

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{12 p}{E h^3} X^2 \left[\alpha_1 c_1' \left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_1} + \alpha_2 c_2' \left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_2} + \frac{2}{(2 - \alpha_1)(2 - \alpha_2)} \left(\frac{x}{X} \right)^2 \right] \frac{1}{x}$$

Donc, on a explicitement les deux relations :

$$c_1' + c_2' + \frac{1}{(2 - \alpha_1)(2 - \alpha_2)} = 0$$

$$(1 + \alpha_1) c_1' \left(\frac{x_1}{X} \right)^{\alpha_1} + (1 + \alpha_2) c_2' \left(\frac{x_1}{X} \right)^{\alpha_2} + \frac{3}{(2 - \alpha_1)(2 - \alpha_2)} \left(\frac{x_1}{X} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{X} \right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{y_1'}{x_1} \frac{E h^3}{12 p} \frac{1}{X^2}$$

Ces deux relations permettent de déterminer c_1' et c_2' .

Nous pourrions calculer $\frac{dy}{dx}$ et y par l'intégration successive de $\frac{d^3 y}{dx^3}$ et de $\frac{dy}{dx}$, les constantes étant déterminées par les relations :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad y = 0$$

pour $x = x_1$.

Si nous considérons le cas de l'encastrement parfait ou $y_1' = 0$ pour $x = x_1$, les formules pour la détermination des constantes deviennent :

$$c_1' + c_2' = -0,18$$

$$1,36 \left(\frac{x_1}{X} \right)^{\alpha_1} c_1' - 0,36 \left(\frac{x_1}{X} \right)^{\alpha_2} c_2' = 0,04 \left(\frac{x_1}{X} \right)^2 - 0,50$$

et nous trouvons pour $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 p}{E h^3} X^2 \left\{ c_1' \frac{1}{\alpha_1 + 1} \left[\left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{x_1}{X} \right)^{\alpha_1} \frac{x_1}{x} \right] + c_2' \frac{1}{\alpha_2 + 1} \left[\left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_2} - \left(\frac{x_1}{X} \right)^{\alpha_2} \frac{x_1}{x} \right] + \frac{1}{3(2 - \alpha_1)(2 - \alpha_2)} \left[\left(\frac{x}{X} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{X} \right)^2 \frac{x_1}{x} \right] x \right\}$$

Si nous représentons comme précédemment par T la tension maximum due à la flexion, dans une section quelconque, par t la tension annulaire, nous aurons :

$$T = E \frac{h}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = 6 p \left(\frac{X}{h} \right)^2 \left[c_1' \left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_1} + c_2' \left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_2} + 0,18 \left(\frac{x}{X} \right)^2 \right]$$

$$t = E \frac{h}{2} \frac{dy}{dx} \frac{1}{2} = 6p \left(\frac{X}{h}\right)^2 \left\{ c_1' \times 0,73 \left[\left(\frac{x}{X}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{x_1}{X}\right)^{\alpha_2} \frac{x_1}{x} \right] - c_2' \right. \\ \left. \times 2,8 \left[\left(\frac{x}{X}\right)^{\alpha_2} - \left(\frac{x_1}{X}\right)^{\alpha_2} \frac{x_1}{x} \right] + 0,06 \left[\left(\frac{x}{X}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{X}\right)^2 \left(\frac{x_1}{x}\right) \right] \right\}$$

Pour faciliter les calculs, dressons le tableau des valeurs de $\left(\frac{x}{X}\right)^{\alpha_1}$ et $\left(\frac{x}{X}\right)^{\alpha_2}$, pour les différentes valeurs du rapport $\frac{x}{X}$.

$\frac{x}{X}$	$\left(\frac{x}{X}\right)^{\alpha_1}$	$\left(\frac{x}{X}\right)^{\alpha_2}$
0,100	0,437	23
0,125	0,473	16,9
0,150	0,505	13,1
0,175	0,535	10,63
0,200	0,561	8,92
0,250	0,607	6,59
0,300	0,658	5,14
0,400	0,719	3,47
0,500	0,779	2,57
0,600	0,851	1,96
0,700	0,880	1,62
0,800	0,923	1,35
0,900	0,963	1,15
1,000	1,000	1,00

Exemple. — Prenons comme exemple la plaque circulaire en fonte, représentée (fig. 10). Ce disque a été soumis aux essais par M. Codron; la rupture s'est faite comme l'indique la figure sous une charge de 8,000 kgs uniformément répartie, soit 44 kgs par centimètre carré.

Supposons que la tangente à la fibre moyenne soit horizontale dans la section moyenne de la douille; nous aurons pour x_1

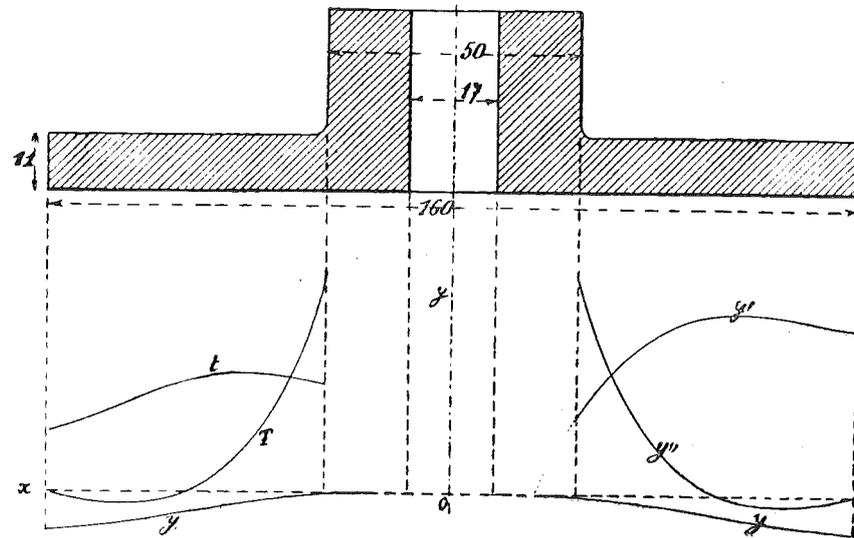


Fig. 10.

$$x_1 = \frac{50 + 17}{2} \times \frac{1}{2} = 17$$

$$\frac{x_1}{X} = 0,21 \left(\frac{x_1}{X}\right)^{\alpha_1} = 0,568 \left(\frac{x_1}{X}\right)^{\alpha_2} = 8,46.$$

Les valeurs de c_1' et c_2' correspondantes sont égales à
— 0,274 et 0,094

Cela donne pour T_{\max} correspondant à $x = 25$ ou $x/X = 0,31$
 $T_{\max} 6p \left(\frac{X}{h}\right)^2 [-0,274 \times 0,664 + 0,094 \times 4,97 + 0,18 \times 0,096]$

$$\text{ou } T_{\max} = 6p \left(\frac{X}{h}\right)^2 \times 0,0843 = 27p = 1188 \text{ kgs/cm}^2.$$

Si nous considérons la valeur de t pour $x = X$ nous aurons :

$$t = 6p \left(\frac{X}{h}\right)^2 \times 0,0843 = 29p = 1188 \text{ kgs/cm}^2.$$

Remarque I. — Avec les formules précédemment établies, nous aurions obtenu, dans les mêmes conditions :

$$c_1 = -0,329 \quad c_2 = -0,079$$

$$T = 6p \left(\frac{X}{h}\right)^2 \times 0,3071 = 97p \quad t = 6p \left(\frac{X}{h}\right)^2 \times 0,0607 = 21p.$$

On voit que ces valeurs sont peu différentes des précédentes.

Remarque II. — Si nous avons supposé que $\frac{dy}{dx} = 0$, pour $x = 25$, nous aurions trouvé :

$$c_1 = -0,301 \quad c_2' = 0,125$$

$$T_{\max} = 6p \left(\frac{X}{h}\right)^2 \times 0,439 = 139p$$

$$t = 6p \left(\frac{X}{h}\right)^2 \times 0,0559 = 18p$$

On voit que dans le cas d'un encastrement parfait à la douille, la valeur de T maximum est augmentée dans le rapport de 139/96, soit donc de 45 %.

Par contre, la valeur de t diminue.

L'examen des diagrammes des différentes valeurs de T et de t , que nous avons tracés (fig. 11), montre que dans l'hypothèse où $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 0$ pour $x_1 = 17$, c'est-à-dire pour la section moyenne de la douille, la valeur de t reste inférieure à T . Pourtant dans l'expérience de M. Codron, la rupture s'est faite suivant un rayon, ce qui semblerait montrer que t était supérieure à T au moment de la rupture. Cette remarque conduit à admettre qu'au moment de la rupture $\frac{dy}{dx} > 0$ pour $x_1 = 17$, car à mesure que $\frac{dy}{dx}$ augmente, t grandit rapidement tandis que T diminue.

Remarque III. — L'examen des diagrammes montre qu'il y a un point d'inflexion dans la fibre moyenne déformée et que ce point d'inflexion se produit à la distance

$$x = 0,690 X$$

avec les proportions renseignées fig. 11.

Ce point d'inflexion se rapproche encore de la douille lorsqu'il y a une couronne et l'on comprend ainsi comment la tension T va diminuant; en effet, si le point d'inflexion coïncidait avec la douille il n'y aurait plus de flexion, et, par conséquent, on aurait $T = 0$.

Le diagramme montre encore que, dans le cas où il n'y a pas de couronne, le maximum de la tension t correspond à peu près à

$$x = 0,481 X$$

et non pas à $x = X$, comme on aurait pu le supposer.

APPENDICE

Note sur la résistance des couvercles plans

Nous croyons utile de montrer que la théorie précédente peut s'appliquer au cas, déjà traité par M. Brune, d'un disque plan ou conique encasté au pourtour et libre au centre; bien que la méthode soit essentiellement différente de celle de M. Brune, les valeurs des tensions sont les mêmes, comme nous allons le voir.

Nous ne traiterons que le cas d'un disque plan, avec encastement parfait au pourtour.

Considérons (fig. 11) la section médiane d'un tel disque supposé

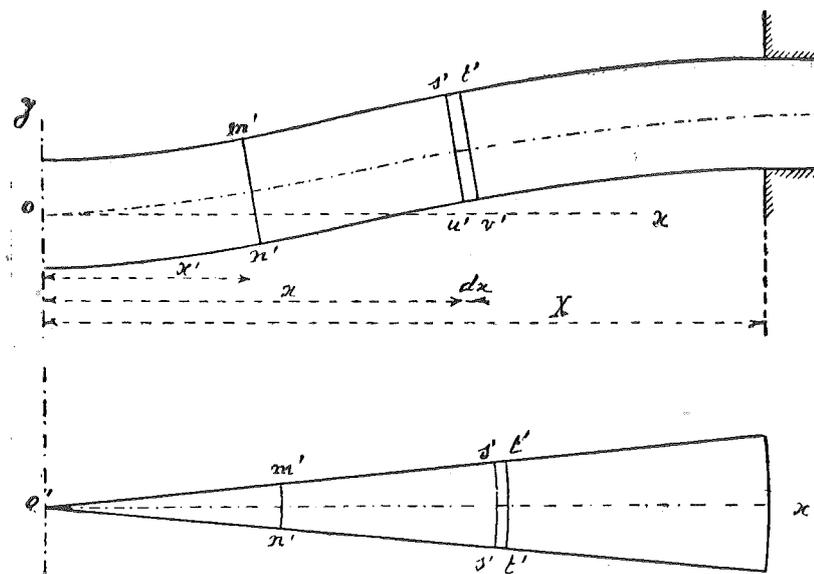


Fig. 11.

déformé sous l'application d'une charge uniformément répartie de p kgs par unité de surface.

Rapportons cette section à deux axes rectangulaires ox et oy , l'un normal à la fibre moyenne primitive, l'autre passant par le centre o , et perpendiculaire à celui-ci.

En employant les mêmes notations que précédemment et en raisonnant de la même manière, nous aurons pour m_1 , moment des forces extérieures :

$$m_1 = \int_0^x p d\omega x (x' - x) dx = p \frac{x^3}{6} d\omega$$

Pour m_2 moment dû aux forces de liaison, nous aurons :

$$m_2 = \frac{E h^3}{12} d\omega \int_0^x \frac{dy}{dx} \frac{dx}{x}$$

si nous admettons pour t la valeur $E z \frac{dy}{dx} \frac{1}{x}$.

Quant au moment résistant M_r dû à la flexion :

$$M_r = \frac{E h^3}{12} d\omega x' \frac{d^2 y}{dx^2}$$

En égalant, on a

$$M_r = - (m_1 - m_2)$$

ou explicitement en remplaçant x' par x ,

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \int_0^x \frac{dy}{dx} \frac{dx}{x} = - \frac{2 p}{E h^3} x^3$$

Pour résoudre cette équation, différencions par rapport à x et posons $\frac{dy}{dx} = v$ $x = X e^t$; il vient successivement :

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = - \frac{6 p}{E h^3} x^3 \quad (I)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - v = \frac{6 p X^3}{E h^3} e^{3t}$$

En appliquant comme précédemment la méthode de la variation des constantes arbitraires :

$$v = \left(c_1 - \frac{1}{2} \int \frac{6 p}{E h^3} X^3 e^{2t} dt \right) e^t + \left(c_2 + \frac{1}{2} \int \frac{6 p}{E h^3} X^3 e^{4t} dt \right) e^{-t}$$

puisque les racines de l'équation caractéristique sont ± 1 .

En remplaçant v par $\frac{dy}{dx}$ et e^t par x/X , il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 p X^3}{E h^3} \left[c_1 \left(\frac{x}{X} \right) + c_2 \left(\frac{x}{X} \right)^{-1} - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{X} \right)^3 \right]$$

En différenciant, on trouve la valeur de

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{6 p X^3}{E h^3} \left[c_1 \left(\frac{x}{X} \right) - c_2 \left(\frac{x}{X} \right)^{-1} - \frac{3}{8} \left(\frac{x}{X} \right)^3 \right] \frac{1}{x}$$

Pour déterminer les constantes, remarquons que pour $x = X$ $\frac{dy}{dx} = 0$ par hypothèse, et que d'après l'équation (I) $\frac{d^2 y}{dx^2}$ doit être une quantité finie pour $x = 0$.

La première condition exige que :

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{8}$$

La seconde que :

$$c_2 = 0$$

Il résulte de là que

$$c_2 = 0 \quad c_1 = \frac{1}{8}$$

D'où les valeurs :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{8} \frac{6 p X^3}{E h^3} \left[\frac{x}{X} - 3 \left(\frac{x}{X} \right)^3 \right] \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8} \frac{6 p X^3}{E h^3} \left[\frac{x}{X} - \left(\frac{x}{X} \right)^3 \right]$$

$$y = \frac{1}{8} \frac{6 p X^3}{E h^3} \left[\frac{x}{X} - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{X} \right)^3 \right] x$$

Discussion des formules — Nous pouvons, au moyen des trois équations ci-dessus, déduire la valeur de la tension maximum, la position du point d'inflexion de la fibre moyenne déformée, la flèche maximum.

Le point d'inflexion de la fibre moyenne déformée correspond à la valeur de x pour laquelle $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{x}{X} \right)^2 \frac{1}{3} = \text{ou } x = X \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,574$$

La tension est donnée par la relation :

$$T = E \frac{h}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{8} p \left(\frac{X}{h} \right)^2 \left[\frac{x}{X} - 3 \left(\frac{x}{X} \right)^3 \right] \left(\frac{X}{x} \right)$$

et la tension maximum est égale à :

$$T_{\max} = - \frac{3}{4} p \left(\frac{X}{h} \right)^2$$

La flèche maximum est donnée par la valeur de y correspondant à $x = X$; on a donc :

$$y = \frac{9}{64} \frac{p}{E} \left(\frac{X}{h} \right)^3 X.$$

Remarque I. — De la valeur de T_{\max} , on déduit .

$$h = 0,867 X \sqrt{\frac{p}{T_{\max}}}$$

M. Brune avait trouvé précédemment

$$h = 0,87 X \sqrt{\frac{p}{T_{\max}}}$$

$$T_{\max} = E \frac{h}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = p \left(\frac{X}{h} \right)^2$$

Remarque II. — La valeur de T obtenue est égale aux $3/4$ de la tension calculée en ne tenant pas compte des tensions annulaires; on a, en effet, dans ce cas :

$$T_{\max} = E \frac{h}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = p \left(\frac{X}{h} \right)^2$$

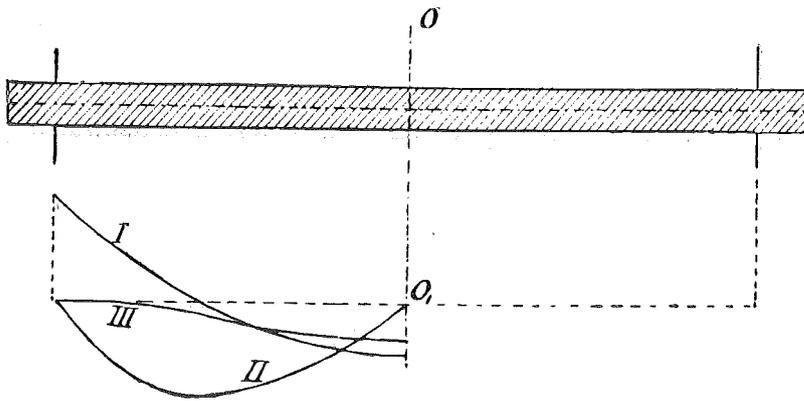


Fig. 12.

Nous avons tracé (fig. 12) les courbes I, II et III représentant respectivement : I) les valeurs du rayon de courbure et par conséquent de la tension T , due à la flexion, à un facteur constant près, II) les valeurs du coefficient angulaire de la tangente, III) la fibre moyenne déformée.

Exemple. — Prenons les valeurs suivantes :

$$p = 9 \text{ kil./cm}_2 \quad E = 2,000,000 \quad X = 50 \text{ cm.}$$

Si nous adoptons pour T_{\max} 1 000 kgs/cm²

$$h = 0,87 \times 50 \sqrt{\frac{9}{1000}} = 4 \text{ cm, 1}$$

$$y = \frac{9}{64} \times \frac{9}{2000000} \left(\frac{50}{4,1} \right)^5 \times 50 = 0,7 \text{ m/m.}$$

Remarque. — Dans tout ce qui précède nous avons adopté pour t , valeur de la tension annulaire, l'expression $E z \frac{dy}{dx} \frac{1}{x}$ qui n'est, comme nous l'avons vu, qu'une valeur approchée. Si nous recommençons les calculs en prenant :

$$t = E z \int_0^{x'} \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{x},$$

nous obtenons pour équation différentielle de la fibre moyenne

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \int_0^x dx \int_0^x \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{x} = - \frac{2p}{Eh^3} x^3.$$

En résolvant comme précédemment

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{2p}{Eh^3} X^2 \left[c_1' \left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_1} + c_2' \left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_2} + \frac{1}{(2-\alpha_1)(2-\alpha_2)} \left(\frac{x}{X} \right)^2 \right]$$

où α_1 et α_2 sont les racines de l'équation caractéristique

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0.$$

Pour déterminer les constantes, on remarque que pour $x = 0$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$, que pour $x = X$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

Ces conditions conduisent aux valeurs :

$$c_2' = 0 \quad c_1' = - \frac{\alpha_1 + 1}{3(2-\alpha_1)(2-\alpha_2)} = - \frac{1 + \sqrt{5}}{30}$$

De là :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{12p}{Eh^3} X^2 \left[- \frac{1 + \sqrt{5}}{30} \left(\frac{x}{X} \right)^{\alpha_1} + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{X} \right)^2 \right]$$

et

$$T_{\max} = \frac{6 p X^2}{h^2} \left[-\frac{1 + \sqrt{5}}{30} + \frac{1}{5} \right] = 0,568 p \left(\frac{X}{h} \right)^2$$

Si nous tirons la valeur de h de cette dernière relation :

$$h = 0,753 X \sqrt{\frac{p}{T_{\max}}}$$

et nous voyons qu'elle est plus petite que la valeur trouvée plus haut. Si on cherche la valeur de x pour laquelle $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, on trouve :

$$x = 0,672 X.$$

CONCLUSIONS.

En terminant cette étude, qui pourrait paraître toucher par certains côtés à la spéculation scientifique, il nous semble nécessaire de résumer rapidement les principaux résultats de la théorie.

a) Pour une même pression, tous les pistons plans ayant même coefficient de sécurité, sont géométriquement semblables ; si p est la pression, l'épaisseur du disque doit varier comme \sqrt{p} .

b) Ne pas exagérer les dimensions de la couronne surtout, pour les pistons plans à un seul disque.

c) Conserver une épaisseur constante ou légèrement décroissante, et proportionner largement le congé de raccord avec la douille.

d) Préférer la forme du piston à simple disque au piston à double disque, au point de vue de la légèreté.

e) Ne pas employer de nervures dans les pistons à double disque, mais reporter en partie le poids de celles-ci sur le corps même du piston.

f) Préférer, au point de vue de la résistance, la forme conique, et dans ce cas, ne pas craindre d'augmenter un peu les dimensions de la couronne.

g) Admettre dans le calcul des tensions de 10 à 15 kgs par m^2 pour le fer ou l'acier, en supposant l'encastrement parfait dans la section médiane de la douille.

Nous ferons remarquer pour finir que l'expérience, en pareille matière, est impuissante à conduire à la découverte de lois générales ; c'est à la théorie de les formuler, à la pratique de les sanctionner.

N: 1905/36 (A)

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MINES
DE LA MÉTALLURGIE, DE LA MÉCANIQUE
ET DE LA GÉOLOGIE APPLIQUÉES

LIÈGE

25 JUIN AU 1^{er} JUILLET 1905

SECTION DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

LA MEUSE * * * * *
SOCIÉTÉ ANONYME * *
8-10, BOUL. SAUVENIÈRE
LIÈGE * * 1905 * * *

TOME I

ENCORE

23 JUL. 1986