

U 3.262 B

LES

POMPES CENTRIFUGES

A HAUTE PRESSION

OUVRAGE COMPRENANT

la Description, la Théorie et le Calcul des dimensions
principales des Pompes centrifuges à haute pression,

PAR

Ch. HANOCQ,

Ingénieur mécanicien, Ingénieur électricien,
Assistant, Répétiteur du Cours de Physique industrielle à l'Université de Liège.

PRIX : FR. 4-50

PARIS

H. DUNOD ET E. PINAT

LIBRAIRES-ÉDITEURS

Quai des Grands-Augustins, 49

LIÈGE

CHARLES DESOER

IMPRIMEUR-ÉDITEUR

21, rue Sainte-Véronique.

1909

*Exemplaire corrigé
CH*

*Hommage à l'Association
des Ingénieurs électriciens*

U326213

Hanocq

LES

POMPES CENTRIFUGES

A HAUTE PRESSION

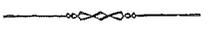
OUVRAGE COMPRENANT

la Description, la Théorie et le Calcul des dimensions principales des Pompes centrifuges à haute pression,

PAR

Ch. HANOCQ,

Ingénieur mécanicien, Ingénieur électricien,
Assistant, Répétiteur du Cours de Physique industrielle à l'Université de Liège.



LIÈGE

CHARLES DESOER, IMPRIMEUR

1909



ASSOCIATION
des Ingénieurs électriciens
1909

PRÉFACE.

Depuis l'application des pompes centrifuges à l'épuisement des mines, cette classe des turbo-machines a pris une importance nouvelle. D'un emploi très limité au début, et dans des conditions telles que le rendement restait une question secondaire, les pompes centrifuges sont aujourd'hui l'objet dans l'industrie des mêmes études et des mêmes soins de construction que les turbines et les ventilateurs.

Le fonctionnement de ces appareils très simples est évidemment compris de tous. Cependant, pour peu qu'on y réfléchisse, on est amené à se poser toute une série de questions qui, sans une théorie bien précise et bien complète, restent sans réponse.

L'ouvrage présent qui est extrait en partie d'articles publiés dans la *Revue Universelle des Mines* (tome XXV, 4^e série, page 214), s'adresse particulièrement aux ingénieurs construisant ou utilisant des pompes centrifuges à haute pression.

Nous avons d'abord classé et décrit les principaux types de pompes centrifuges, puis nous en avons donné la théorie complète. Pour faire saisir la portée de cette théorie, nous l'avons appliquée à la détermination des dimensions d'une pompe à grand débit et à faible hauteur, et d'une autre à grande hauteur et à faible débit.

Nous avons terminé l'ouvrage, en étudiant le tracé de l'aubage des roues et des diffuseurs, et en donnant des indications générales sur la construction et sur le rendement des pompes à grande hauteur de refoulement.

Liège, le 3 septembre 1909.

L'AUTEUR.

TABLE

des principales notations adoptées dans cet ouvrage.

ω	vitesse relative, en mètres par seconde.
u	vitesse d'entraînement, en mètres par seconde.
c	vitesse absolue, en mètres par seconde.
ω	vitesse angulaire, en mètres par seconde.
N	nombre de tours par minute.
N	<i>avec indice</i> , puissance en chevaux-vapeur
R, r	rayon de rotation en mètres.
D, d	diamètre en mètres.
l	largeur d'une roue.
σ	section quelconque d'un des canaux d'une roue.
σ'	section normale de ce canal.
s	longueur mesurée suivant l'axe, d'un des canaux.
m	{ périmètre de la section normale d'un des canaux. rapport entre le rayon de l'ouïe et le rayon extérieur d'une roue.
p	pression absolue en kg par mètre carré.
v	volume spécifique, en mètres cubes.
δ	poids en kg du mètre cube.
H, h	hauteur d'élévation en mètres.
Q	débit en mètres cubes par seconde.
f, F	fuite en mètres cubes par seconde.
T	<i>avec indice</i> , travail en kgm.
g	9 ^m 81.
α	l'angle que fait la direction de la vitesse absolue avec la vitesse de rotation u .
β	l'angle que fait la direction de la vitesse relative avec la vitesse de rotation u .
μ	coefficient de frottement.
φ, ψ	coefficients fonction de μ .
n	rapport des vitesses absolues, ou des vitesses relatives, d'entrée et de sortie de la roue.
η	rendement.
k	coefficient de proportionnalité.

ERRATA

Page 7, 25^e ligne, *il est utile* au lieu de *il est nécessaire*.

» 35, 16^e » *fig. 7* au lieu de *fig. 6*.

» 62, 6^e » *en dessous de 3/10 mm* au lieu de *en dessus de 1,2 mm*.

» 73, formule XXIV, α^2 au lieu de 2^2 et pour dernier terme $k'k$ au lieu de $k'k$.

LES POMPES CENTRIFUGES A HAUTE PRESSION

Introduction.

Depuis quelques années, les installations de centrales électriques dans les usines et les charbonnages se multiplient en raison des facilités que l'électricité offre au transport de l'énergie à distance, et de la diminution des frais d'exploitation qui résultent de la concentration, en un seul endroit, de toute la force motrice, concentration qui permet l'emploi d'unités plus importantes et partant plus économiques, qui facilite la surveillance et l'entretien, etc.

Dans le but de centraliser davantage, on a même vu se créer des usines n'ayant d'autre but que de produire l'énergie électrique et de vendre à la grande industrie, des kilowatts.

Une conséquence de cette modification profonde dans l'exploitation industrielle, a été la nécessité d'approprier

tous les appareils récepteurs, à la vitesse souvent excessive des moteurs électriques.

Le vieux mécanisme de transformation du mouvement continu en mouvement alternatif, la bielle et la manivelle, n'a pu s'accommoder de ces grandes vitesses qui entraînaient des effets d'inertie importants.

On s'est donc trouvé dans la nécessité ou de réduire, par l'intermédiaire d'un engrenage ou d'une courroie, le nombre des tours des moteurs, ce qui entraînait une perte d'énergie et une augmentation des frais d'entretien, ou de chercher à éliminer la bielle et la manivelle dans les appareils comportant ce mécanisme.

Un cas typique a été l'évolution des pompes à piston pour les grandes hauteurs de refoulement. On a d'abord cherché à accroître leur vitesse de rotation pour la porter à 150 et 200 tours; le moteur à cette vitesse, restait encombrant et coûteux; la pompe était de construction difficile et l'entretien devait être très soigné.

Pour réduire les dimensions du moteur, on a substitué à l'attaque directe, l'attaque par engrenage ou par courroie, d'où une diminution de rendement et une sujétion de plus au point de vue des arrêts possibles.

En présence de ces inconvénients, la solution offerte par les appareils à mouvement continu comme les pompes centrifuges, offrait un intérêt considérable et, malgré les difficultés qui se présentaient et qui laissaient peu d'espoir d'arriver à un résultat satisfaisant, notamment au point de vue du rendement, cette solution fut tentée par les constructeurs.

Refouler d'un seul jet à 500 et 600 m de hauteur au moyen d'une pompe centrifuge, cela paraissait irréalisable il y a une dizaine d'années.

A l'heure actuelle, le problème est résolu, le rendement pouvant être considéré comme satisfaisant, si pas comme équivalent à celui des pompes à piston. Si le rendement

est d'ailleurs un peu plus faible, les pompes centrifuges ont pour elles la sécurité, la facilité d'installation qui les font adopter de plus en plus.

Elles sont employées pour l'épuisement des mines, l'alimentation des châteaux d'eau, l'alimentation des chaudières, etc.

C'est la maison *Sulzer* qui, la première, a résolu le problème d'une manière satisfaisante. Les difficultés à surmonter étaient surtout d'ordre pratique; mais il faut ajouter que les théories incomplètes qui avaient été faites et qui suffisaient pour le calcul des pompes ordinaires, étaient de nature à induire en erreur. Le manque d'expériences, de renseignements pratiques au sujet des coefficients, amenaient bien des auteurs à conclure qu'il était impossible de dépasser une hauteur de refoulement de 20 à 25 m par roue.

Chaque constructeur possède évidemment une méthode pour la détermination des dimensions des pompes dans des conditions déterminées; cette méthode est souvent expérimentale, c'est-à-dire qu'elle est basée sur la connaissance des courbes caractéristiques relevées par des essais sur une pompe à peu près semblable.

Nous allons exposer une théorie qui, en permettant de tenir compte de toutes les pertes, est basée sur la connaissance des coefficients de frottement de l'eau dans les canaux, de l'eau contre les roues, et de l'arbre dans ses paliers, ces coefficients étant déduits d'expériences.

L'avantage de cette théorie sur la méthode expérimentale sera évident: les conclusions ne dépendront pas des dimensions particulières de la pompe étudiée, et il sera possible, en faisant varier dans les calculs les valeurs des différents éléments, de déterminer l'influence de chacun d'eux sur le rendement et la hauteur de refoulement.

Avant d'aborder cette étude, nous classerons les différents types de pompes centrifuges et nous en donnerons une description rapide.

CHAPITRE I.

Classification et fonctionnement des différents types de pompes centrifuges.

Les pompes centrifuges ne forment qu'une des deux catégories des pompes à réaction. Celles-ci sont constituées, d'une manière générale, par des canaux disposés soit perpendiculairement, soit parallèlement à l'axe d'une roue, ces canaux étant parcourus par le fluide sous l'action des forces d'inertie.

Lorsque les canaux sont disposés parallèlement à l'axe, on donne à la pompe le nom de pompe axiale; dans le cas où les canaux sont disposés perpendiculairement à l'axe, on a affaire aux pompes centrifuges proprement dites. Nous ne parlerons que de ces dernières, parce que ce sont les seules qui sont employées.

Parmi les différents systèmes de pompes centrifuges, on peut distinguer :

1° les pompes pour grand débit et faible hauteur;

2° les pompes pour faible débit et grande hauteur

a) à une seule roue; b) à plusieurs roues travaillant en série.

Chacun de ces systèmes peut être réalisé avec l'axe disposé horizontalement ou verticalement.

Les canaux peuvent être disposés symétriquement de part et d'autre d'un plan perpendiculaire à l'axe, le fluide pénétrant alors dans les roues, à la fois par les deux côtés; dans ce cas, on dit que la pompe est à *deux ouïes*.

Lorsque le fluide ne pénètre dans les canaux que d'un seul côté, on dit que la roue est à *simple ouïe*.

Toutes ces distinctions n'ont d'importance qu'au point de vue construction. Au point de vue fonctionnement, en effet, il n'y a entre les deux systèmes qu'une différence : celle qui résulte de la présence ou de l'absence d'un *diffuseur* dont nous parlerons plus loin.

I. — Pompe centrifuge pour grand débit et faible hauteur.

La fig. 1, Pl. 1, donne le type primitif de la pompe tel qu'il a été présenté par *Appold* en 1867, et tel qu'on le réalise encore aujourd'hui lorsqu'on demande au système d'être simple, robuste, peu encombrant, peu coûteux, comme par exemple, pour les fouilles de fondations. Le rendement pour ces sortes d'applications est, en effet, un élément secondaire dans l'appréciation de la valeur du système.

Le fluide pénètre par deux ouïes et, sous l'action de la force centrifuge, est projeté du centre à la périphérie, à travers les canaux constitués par des aubes et deux joues venues de fonderie avec le moyeu.

Le fluide, à la sortie de la roue, est recueilli dans un canal *c* sur lequel vient se brancher la conduite de refoulement.

II. — Pompe centrifuge pour faible débit et grande hauteur.

a) *A une roue*. — Nous donnons fig. 2, Pl. 1, le tracé au $\frac{1}{5}$ d'une pompe que nous avons étudiée, et qui représente le type perfectionné des pompes centrifuges actuelles destinées aux grandes hauteurs de refoulement.

La pompe ne possède qu'une ouïe, ce qui n'est pas essentiel, mais qui, cependant, est le cas général dans les pompes de cette catégorie.

Le fluide est ici dirigé normalement au plan de la roue, pour réaliser, autant que possible, les conditions théoriques de fonctionnement qui supposent un mouvement uniforme et parallèle de tous les filets liquides.

On a cherché, en outre, dans le but d'éviter des remous, à supprimer les changements brusques de section à l'ouïe et à la sortie de la roue. Pour équilibrer les pressions s'exerçant sur la roue, on a divisé les deux faces de

celle-ci en deux parties par deux joints à la même hauteur; par des ouvertures pratiquées en *e*, on a réalisé des pressions égales de part et d'autre de la roue en dessous et au-dessus du joint.

La différence essentielle entre ce type et le précédent, est que le fluide, à sa sortie de la roue, est reçu dans un récupérateur, appelé ordinairement *diffuseur*, destiné à ramener la vitesse du fluide qui est très considérable, à une valeur plus petite et, par conséquent, à transformer en énergie potentielle de pression l'énergie cinétique du fluide.

Le diffuseur à aubes *d* est suivi d'un canal en volute, destiné à augmenter la récupération en abaissant encore la vitesse par l'accroissement progressif de la section de passage.

Dans les pompes de la catégorie I, il arrive souvent que le canal *c* de la fig. 1 est remplacé par celui de la fig. 2, dont l'ouverture en ajutage et la forme en volute ont pour effet d'augmenter le rendement. Il y a cependant lieu de remarquer que dans ce cas, la pompe est plus encombrante et de construction plus coûteuse.

Nous n'insistons pas sur les détails de construction; l'arbre est porté par deux paliers; le palier de butée, seul dessiné, permet de régler la position de la roue; enfin les bourrages sont suivis de buselures ne possédant qu'un jeu très faible de 2 ou 3 dixièmes de millimètre avec l'arbre.

Des conduits *t* permettent, en outre, d'amener l'eau sous pression dans les bourrages par l'intermédiaire de robinets et cela, afin d'éviter des rentrées d'air très nuisibles au bon fonctionnement.

b) *A plusieurs roues.* — Lorsqu'on ne peut pas atteindre une hauteur de refoulement suffisante avec une seule roue, on associe plusieurs pompes en tension, c'est-à-dire que l'on dispose les choses de telle façon que la première pompe refoule dans la seconde, et ainsi de suite.

Pratiquement, les roues sont fixées sur un arbre comme l'indique la fig. 3, Pl. 1, et le fluide qui sort du diffuseur de la première roue, identique à celui de la fig. 2, est dirigé par des aubes fixées à la paroi *D*, vers l'ouïe de la deuxième roue. Ces aubes sont nécessaires pour éviter des tourbillonnements importants qui auraient pour conséquence la transformation en chaleur d'une partie de l'énergie récupérée dans le diffuseur.

On peut associer sur un même arbre jusqu'à 8 roues.

Les différents systèmes de pompes multicellulaires se distinguent les uns des autres :

1° par la manière dont l'équilibrage des pressions sur les roues est obtenu;

2° par la manière dont le démontage peut s'effectuer.

Au sujet de l'équilibrage, on peut dire qu'il ne reste plus en présence que deux systèmes : celui qui consiste à équilibrer chaque roue en disposant deux joints à la même hauteur, comme dans le cas de la fig. 2, et celui qui consiste à supprimer les ouvertures *e* et le joint opposé à l'ouïe, en équilibrant la somme des pressions s'exerçant sur chacune des roues, par l'action de la pression de l'eau sortant de la dernière roue, sur un piston *A* de surface convenablement calculée, disposé entre celle-ci et la boîte à bourrage (fig. 3).

Quel que soit le système adopté, il est nécessaire de ménager un dispositif spécial qui diffère avec chaque constructeur, et qu'on pourrait désigner sous le nom de piston compensateur, dont l'effet est de corriger automatiquement l'équilibrage jusqu'à le rendre à peu près parfait.

En ce qui concerne la manière dont le démontage peut s'effectuer, le système généralement adopté est celui indiqué fig. 3 (type de la firme Schwartzkopf), dans lequel les différents éléments sont successivement introduits dans une enveloppe d'une seule pièce. L'étanchéité des joints

existant entre celle-ci et les diffuseurs, est obtenue par l'introduction, à frottements doux, de bagues en bronze. Le démontage de ce système est assez compliqué.

Certains constructeurs adoptent une enveloppe en deux pièces avec joint horizontal, ce qui permet d'enlever l'arbre avec ses roues; mais cette construction est beaucoup plus difficile et plus coûteuse.

Enfin, dans le système *Jaeger*, la pompe est constituée par autant d'anneaux qu'il y a de roues, chacun de ces anneaux portant le diffuseur et les ailettes destinées à ramener le fluide de la sortie du diffuseur à l'ouïe de la roue suivante.

Cette description rapide des différents types de pompes centrifuges étant faite, nous allons établir les lois fondamentales sur lesquelles repose la théorie et le calcul des pompes centrifuges.

Mais avant, nous définirons nettement le problème à résoudre, qui peut s'énoncer comme suit : déterminer les dimensions d'une pompe pouvant refouler Q m³ par seconde, à la hauteur de H m, de manière à obtenir le maximum de rendement possible.

Pour trouver la solution de ce problème, nous ferons remarquer que l'on peut procéder en sens inverse et déterminer le débit et la hauteur de refoulement qui correspondent au rendement maximum pour une roue donnée, fonctionnant à un nombre de tours également donné. Que ce rendement maximum existe, c'est ce qu'il sera facile de comprendre en observant qu'il y a une hauteur de refoulement pour laquelle le débit donné par la roue tournant à une certaine vitesse est nul, et que, pour une hauteur nulle, le débit est évidemment maximum. Il résulte, en effet, de cette remarque que, pour ces deux limites, le rendement est nul et que, entre ces limites, il doit exister un maximum.

Cela étant, nous chercherons à tracer les diagrammes

du rendement en fonction du débit, pour différents types de roues avec aubes soit recourbées en arrière, soit radiales, soit recourbées en avant.

Pour tenir compte de toutes les pertes, nous étudierons séparément le rendement en ne faisant intervenir que l'influence des frottements du fluide dans la roue et dans le diffuseur; nous donnerons à l'expression trouvée le nom de *rendement indiqué*.

Évaluant les pertes par frottement de la roue contre le fluide et de l'arbre dans les paliers et les boîtes à bourrage, nous déterminerons le *rendement organique* de la pompe.

Multipliant l'un par l'autre, nous obtiendrons le *rendement effectif*.

Il nous restera alors à examiner le rôle et l'importance des fuites au point de vue du rendement total et à donner un exemple d'application de la méthode proposée, à l'étude d'un avant-projet de pompe centrifuge.

CHAPITRE II.

Théorie des pompes centrifuges.

§ 1. — Formules générales.

Rapportons à deux axes rectangulaires ox et oz le plan médian de la roue d'une pompe centrifuge, et soit $abcd$ un des canaux formés par deux aubes consécutives (fig. 4, Pl. 1).

La démonstration des formules fondamentales de la théorie des pompes centrifuges exige que l'on puisse supposer :

1° Qu'une tranche de fluide comprise entre deux surfaces concentriques ab , $a'b'$, se déplace dans le canal parallèlement à elle-même, de manière à rester limitée dans tout son parcours, par deux surfaces concentriques (hypothèse des tranches parallèles);

2° Que les vitesses des différents éléments d'une tranche $mnpq$ soient égales à celle du centre de gravité G de cette tranche ;

3° Que les différentes forces qui sollicitent les éléments d'une tranche, aient leur résultante passant par le centre de gravité de cette tranche.

Ces hypothèses permettent de ramener l'étude du mouvement d'une tranche $ab, a'b'$ à l'étude du mouvement de son centre de gravité G_0 où l'on suppose concentrés tous ses éléments ; mais ces hypothèses ne sont réalisées que dans le cas limite où l'on suppose les aubes ac et bd infiniment rapprochées.

Dans toutes les considérations qui vont suivre, nous désignerons par :

- ω la vitesse relative du centre de gravité G , dirigée suivant l'axe du canal ;
- u la vitesse d'entraînement ou vitesse de rotation autour de l'axe O , du point G ;
- c la vitesse absolue correspondante ;
- ω la vitesse angulaire ;
- r le rayon OG ;
- N le nombre de tours par minute de la roue ;
- p la pression dans la section mq ;
- σ la section en G du canal, parallèle à la section d'entrée ;
- σ' la section normale en G ;
- m le périmètre de cette section normale ou bien, au § 4, le rapport entre le rayon initial r_0 et le rayon final r_1 ;
- dJ la résistance élémentaire opposée par les frottements, au déplacement de la tranche infiniment mince $mnpq$;
- dX la réaction opposée par l'aube db ;
- $d\pi$ le poids de la tranche ;
- v le volume spécifique du fluide évoluant ;
- δ le poids du mètre cube correspondant ;
- Q le débit ;

- α l'angle que fait la direction de la vitesse absolue avec la vitesse de rotation u ;
- β l'angle que fait la direction de la vitesse relative avec la vitesse de rotation u , compté dans le même sens que α ;
- θ l'angle que fait la direction du rayon r , passant par le centre de gravité G avec la direction de la vitesse ω ;
- μ le coefficient de frottement du fluide contre les parois ;
- n le rapport entre les vitesses relatives à l'entrée et à la sortie ;
- k un coefficient de proportionnalité.

Nous affecterons les notations dont les valeurs varient avec la section :

- 1° De l'indice 0 pour la section d'entrée de la roue ;
- 2° De l'indice 1 pour la section de sortie de la roue ;
- 3° De l'indice 2 pour la section de sortie du diffuseur.

Formule I. — Cherchons d'abord une relation entre les forces appliquées à la tranche $mnpq$ et la vitesse absolue c .

Pour cela servons-nous de l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\Sigma \bar{f} = m \bar{\varphi}.$$

En projetant le système des forces sur la direction de la vitesse absolue c , nous aurons, en vertu de cette équation fondamentale :

$$\Sigma \text{proj. } f = m \frac{dc}{dt}$$

ou explicitement, en employant les notations adoptées ci-dessus :

$$[\sigma p - \sigma(p + dp)] \cos(cp) - d\pi \cos(c d\pi) - dJ \cos cdJ + \\ + dX \cos(c dX) = \frac{d\pi}{g} \frac{dc}{dt}.$$

Désignons par ds' la portion de la trajectoire du mouvement absolu, limitée par les deux arcs mq et np ; divisons les deux membres de l'équation précédente par $d\pi$ et multiplions-les par ds' ; nous aurons :

$$-\sigma dp \frac{ds' \cos(cp)}{d\pi} - ds' \cos(cd\pi) - \frac{dJ}{d\pi} ds' \cos(c dJ) + \frac{dX}{d\pi} ds' \cos(cdX) = \frac{1}{g} ds' \frac{dc}{dt}. \quad (1)$$

Si nous supposons que l'axe oz est vertical, $d\pi$ sera parallèle à l'axe oz et nous pourrons écrire :

$$ds' \cos(cd\pi) = dz.$$

D'autre part, $dJ ds' \cos(c dJ)$ et $dX ds' \cos(cdX)$ représentent respectivement le travail élémentaire pour un déplacement ds' , de la résistance due aux frottements et de la réaction de l'aubage. En divisant par $d\pi$ ces deux expressions, nous obtiendrons respectivement la valeur du travail des frottements et celle du travail fourni par la roue, par kg de fluide, dans un déplacement infiniment petit ds' ; nous pourrons donc remplacer le troisième et le quatrième terme de l'équation (1) par dT_f et dT_i .

Pour ce qui concerne le premier terme, nous pourrons le transformer, en remarquant :

$$1^\circ \text{ Que } ds' \cos(cp) = dr,$$

dr représentant l'épaisseur de la tranche $mnpq$ dans la direction r ;

$$2^\circ \text{ Que } \sigma dr \delta = \frac{\sigma dr}{v} = d\pi; \quad (2)$$

nous aurons alors :

$$-\sigma dp - dz - dT_f + dT_i = \frac{1}{g} ds' \frac{dc}{dt}. \quad (3)$$

Si le régime uniforme est établi dans le canal, après un certain temps dt , toujours le même, la tranche $mnpq$

sera remplacée par la tranche qui la précède; le centre de gravité aura parcouru le chemin ds' à un infiniment petit du second ordre près; sa vitesse c sera donc égale à $\frac{ds'}{dt}$ et on pourra écrire la relation :

$$ds' \frac{dc}{dt} = \frac{ds'}{dt} dc = c dc = d\left(\frac{c^2}{2}\right),$$

qui, introduite dans l'équation (3) donnera, après intégration entre le point d'entrée que nous désignerons par 0 et le point de sortie que nous désignerons par 1,

$$\sigma(p_0 - p_1) - (z_1 - z_0) - T_f + T_i = \frac{1}{2g} (c^2_1 - c^2_0). \quad (I)$$

Dans cette équation z_1 représente la hauteur du centre de gravité G_1 du canal fictif formé par les positions successives dans l'espace, de la tranche $mnpq$; T_f et T_i , le travail dû aux frottements et le travail fourni par la roue, pour chaque kg de fluide qui traverse celle-ci.

Formule II. — Cherchons, maintenant, une relation entre les forces appliquées à la tranche $mnpq$, la vitesse relative ω et la vitesse de rotation u . Servons-nous encore de la même relation fondamentale :

$$\Sigma \bar{f} = m \bar{\varphi},$$

dans laquelle nous remplaçons $\bar{\varphi}$ par sa valeur

$$\bar{\varphi}_r + \bar{\varphi}_c + \bar{\varphi}_e,$$

c'est-à-dire par la somme vectorielle de l'accélération dans le mouvement relatif, de l'accélération dans le mouvement d'entraînement et de l'accélération complémentaire φ_e .

Si nous projetons le système des forces sur la direction de la vitesse relative ω , nous aurons cette fois :

$$\Sigma \text{proj. } f = m \frac{d\omega}{dt} - m \frac{u^2}{r} \cos \theta.$$

En effet, la projection de φ_c sur la direction ω est évidemment égale à $\frac{d\omega}{dt}$; le mouvement d'entraînement étant supposé uniforme, l'accélération dans le mouvement d'entraînement φ_c se ramène à $\frac{u^2}{r}$, et si nous appelons θ l'angle que fait la direction du rayon r , passant par G, avec la direction de la vitesse ω , la projection de φ_c sur la direction ω sera égale à $\frac{u^2}{r} \cos \theta$; quant à la projection de φ_c , elle est nulle, puisque l'accélération complémentaire est toujours perpendiculaire à ω .

En écrivant explicitement le premier membre de l'équation ci-dessus, nous aurons, dJ étant dirigé suivant l'axe du canal, par conséquent suivant ω :

$$[\sigma p - \sigma(p + dp)] \cos(\omega p) - d\pi \cos(\omega d\pi) - dJ + dX \cos(\omega dX) = \frac{d\pi}{g} \frac{d\omega}{dt} - \frac{d\pi}{g} \frac{u^2}{r} \cos \theta.$$

Désignons par ds la portion de la trajectoire du mouvement relatif, limitée par les arcs mq et np ; divisons les deux membres de l'équation précédente par $d\pi$ et multiplions-les par ds . Nous aurons :

$$-\sigma dp \frac{ds \cos(\omega p)}{d\pi} - ds \cos(\omega d\pi) - \frac{dJ}{d\pi} ds + \frac{dX}{d\pi} ds \cos(\omega dX) = \frac{1}{g} ds \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{g} \frac{u^2}{r} ds \cos \theta. \quad (4)$$

L'axe oz étant supposé vertical,

$$ds \cos(\omega d\pi) = dz.$$

dX étant perpendiculaire à l'aubage et, par conséquent à la direction ω , le terme $\frac{dX}{d\pi} ds \cos(\omega dX)$ est nul. Le terme $\frac{dJ}{d\pi} ds$ représente comme précédemment le travail

élémentaire de frottement par kg de fluide dépensé; nous pourrons donc le remplacer dans la suite par dT_f . En ce qui concerne le premier terme, nous pourrons observer comme précédemment que

$$ds \cos(\omega p) = dr,$$

$$\text{et que} \quad d\pi = \frac{\sigma dr}{v};$$

nous aurons alors :

$$-\sigma dp - dz - dT_f = \frac{1}{g} \frac{d\omega}{dt} ds - \frac{1}{g} \frac{u^2}{r} ds \cos \theta. \quad (5)$$

En supposant le régime établi et en raisonnant comme dans le cas précédent :

$$ds \frac{d\omega}{dt} = \frac{ds}{dt} d\omega = \omega d\omega = d\left(\frac{\omega^2}{2}\right);$$

d'autre part, ω étant la vitesse angulaire et θ étant l'angle que fait le rayon r passant par G, avec la direction ω , nous aurons :

$$\frac{u^2}{r} = \omega^2 r, \quad ds \cos \theta = dr,$$

et par conséquent :

$$\frac{u^2}{r} ds \cos \theta = \omega^2 r dr = d\frac{\omega^2 r^2}{2} = d\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

En substituant ces valeurs de $ds \frac{d\omega}{dt}$ et de $\frac{u^2}{r} ds \cos \theta$ dans l'équation (5), et en intégrant entre le point d'entrée et le point de sortie, il viendra :

$$\sigma(p_0 - p_1) - (z_1 - z_0) - T_f = \frac{1}{2g}(\omega_1^2 - \omega_0^2) - \frac{1}{2g}(u_1^2 - u_0^2) \quad (II)$$

Dans cette équation z_1 représente la hauteur du centre de gravité G_1 de la section de sortie du canal $abcd$, T_f le travail dû aux frottements par kg de fluide traversant la roue.

Formule III. — En soustrayant, membre à membre, les équations (I) et (II), nous pouvons obtenir une troisième relation où n'entre plus le travail de frottement T_f et les pressions p_0 et p_1 .

$$T_i = \frac{1}{2g}(c_1^2 - c_0^2) - \frac{1}{2g}(\omega_1^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2g}(u_1^2 - u_0^2) + (z_1' - z_1). \quad (\text{III})$$

Cette relation peut être transformée en remarquant que, dans les triangles des vitesses à l'entrée en G_0 et à la sortie en G_1 (fig. 4) :

$$\omega_0^2 = c_0^2 + u_0^2 + 2u_0c_0 \cos \alpha_0, \quad (6)$$

$$\omega_1^2 = c_1^2 + u_1^2 + 2u_1c_1 \cos \alpha_1. \quad (7)$$

En soustrayant la seconde de la première, et en remplaçant dans l'équation (III), il vient, en effet :

$$T_i = -\frac{1}{g}(u_1c_1 \cos \alpha_1 - u_0c_0 \cos \alpha_0) + (z_1' - z_1). \quad (\text{III})$$

Remarque. — Dans le cas des pompes centrifuges qui nous occupe actuellement, le liquide pénètre sur tout le pourtour de la roue; tous les canaux étant identiques, les équations précédentes peuvent se simplifier. En effet, si on considère deux canaux diamétralement opposés les termes

$$(z_1' - z_0), \quad (z_1 - z_0), \quad (z_1' - z_1),$$

seront égaux et de signes contraires, et les équations appliquées au mouvement du liquide non plus dans un des canaux, mais dans la roue, ne contiendront plus ces termes.

La méthode que nous donnons ici pour la démonstration des formules fondamentales, a l'avantage de ne nécessiter que le rappel de deux théorèmes de la mécanique

$$\Sigma \bar{f} = m \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_r + \bar{\varphi}_e + \bar{\varphi}_c.$$

Elle permet, en outre, de bien préciser les hypothèses que leur démonstration entraîne et que nous avons indiquées au début de ce chapitre.

§ 2. — Application de la formule I à l'écoulement dans un tuyau.

Si nous supposons la roue de la fig. 4 immobile, nous aurons $T_i = 0$. Le canal fictif $abc'd'$ coïncidera avec le canal réel $abcd$, et la formule I dans laquelle nous ferons $T_i = 0$, $z_1' = z_1$ s'appliquera à l'écoulement dans un canal fixe.

Représentons par h la hauteur d'élévation du liquide égale à $(z_1 - z_0)$, il viendra :

$$v(p_1 - p_0) + h + T_f + \frac{1}{2g}(c_1^2 - c_0^2) = 0. \quad (\text{IV})$$

Cette équation est connue sous le nom de *équation de Bernoulli*.

§ 3. — Calcul du terme T_f relatif aux frottements.

Cherchons à évaluer T_f ; d'après ce que nous avons vu, T_f est le travail dû aux frottements par kg de liquide passant dans le canal $abcd$; il a pour expression

$$T_f = \int_0^1 \frac{dJ}{d\pi} ds.$$

Représentons par m le périmètre de la section normale en G ; le périmètre de la section mouillée sera $\frac{m}{\cos \theta}$, puisque la section $mnpq$ est perpendiculaire au rayon OG et que nous avons représenté par θ l'angle du rayon OG avec la direction ω (fig. 4).

Or, on admet que la résistance dJ provenant des frottements du fluide contre la paroi d'un canal rectiligne, est proportionnelle à la surface mouillée, au poids spécifique δ et au carré de la vitesse c .

Si nous n'envisageons que le cas d'un canal rectiligne ou d'un canal à faible courbure, nous pourrions donc écrire :

$$T_f = \int_0^1 \mu \frac{m dr}{\cos \theta} \frac{\delta}{d\pi} c^2 ds, \quad (8)$$

μ étant un coefficient qui dépend de la nature du liquide et de l'état de la surface du canal.

Observons que $d\pi = \sigma dr \delta$, σ représentant la section normale au rayon OG. Si nous désignons par σ' la section normale à l'axe du canal, nous aurons donc

$$d\pi = \frac{\sigma'}{\cos \theta} dr \delta,$$

et par conséquent, en remplaçant $d\pi$ dans l'équation (8), par cette valeur,

$$T_f = \mu \int_0^1 \frac{m}{\sigma'} c^2 ds. \quad (V)$$

L'intégration peut s'effectuer dans le cas simple où il s'agit d'un canal rectiligne de *section constante*; la vitesse pour un fluide incompressible, est alors constante, et on peut écrire :

$$T_f = \mu \left(\frac{m}{\sigma'} \right) c^2 s. \quad (VI)$$

Cette formule donne la *perte de charge* dans une conduite rectiligne de longueur s , de périmètre m et de section σ' , c étant la vitesse du fluide qui le traverse.

Dans le cas général où $\frac{m}{\sigma'}$ et c varient, on peut calculer pour des sections très rapprochées, les valeurs de $\left(\frac{m}{\sigma'} \right) c^2$ et, par intégration graphique de la courbe ayant pour abscisses les valeurs de s , et pour ordonnées les valeurs de $\left(\frac{m}{\sigma'} \right) c^2$, obtenir la valeur de T_f .

Remarque. — Cherchons un moyen approché de déterminer algébriquement la valeur de T_f lorsque la vitesse varie, afin de pouvoir éliminer ce terme dans les formules fondamentales I et II.

Nous pouvons admettre, parce qu'il y a lieu de chercher autant que possible à réaliser cette hypothèse, que la vitesse varie uniformément depuis l'entrée jusqu'à la sortie de la roue. La vitesse c en un point de l'axe du canal est, dans ce cas, égale à la vitesse à l'entrée c_0 , augmentée d'une quantité proportionnelle à la distance s du point considéré au point d'entrée, c'est-à-dire que

$$c = c_0 + ks.$$

Si l'on observe maintenant qu'il s'agit ici d'évaluer le frottement T_f pour des canaux courbes, que la vitesse c dans une section normale à l'axe de ces canaux, n'est pas la même en tous les points, que d'autre part les formules dans lesquelles on doit introduire la valeur T_f , ne s'appliquent rigoureusement qu'à des canaux irréalisables de section infiniment petite, on comprendra que l'on reste dans les limites de l'approximation, en posant :

$$\int_0^1 \frac{m}{\sigma'} c^2 ds = \left(\frac{m}{\sigma'} \right) \int_0^1 c^2 ds,$$

$\left(\frac{m}{\sigma'} \right)$ représentant la valeur moyenne des rapports du périmètre à la section, pour les sections d'entrée et de sortie du canal.

Grâce à cette hypothèse nous pourrions poser :

$$T_f = \mu \left(\frac{m}{\sigma'} \right) \int_0^1 (c_0 + ks)^2 ds = \mu \left(\frac{m}{\sigma'} \right) \left[c_0^2 + ks_1 c_0 + \frac{k^2 s_1^2}{3} \right] s_1$$

s_1 représentant la longueur du canal suivant l'axe.

Appelons c_1 la vitesse à la sortie ;

$$c_1 - c_0 = ks_1$$

et par conséquent :

$$T_f = \mu \left(\frac{m}{\sigma'} \right) \left[c_0^2 + c_0 (c_1 - c_0) + \frac{(c_1 - c_0)^2}{3} \right] s_1.$$

Représentons par n le rapport $\frac{c_0}{c_1}$ et posons :

$$\frac{2g}{3} \mu \left(\frac{m}{\sigma'} \right) s_1 = (1 - \varphi^2); \quad (\text{VII})$$

nous aurons :

$$T_f = (1 - \varphi^2) \left[\frac{1}{2g} c^2_0 \left(2 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2g} (c^2_1 - c^2_0) \right] \quad (\text{VIII})$$

Lorsque la roue de la pompe est supposée en mouvement, les vitesses de déplacement du fluide dans les canaux prennent alors le nom de vitesses relatives, et nous avons désigné la vitesse relative d'une manière générale par ω . D'autre part, lorsque le fluide pénètre dans la roue en mouvement, une partie de l'énergie cinétique est transformée en chaleur par chocs et tourbillonnements, et il en résulte une perte proportionnelle à $\frac{\omega^2_0}{2g}$. La valeur de T_f peut donc s'exprimer dans le cas d'une roue en mouvement par :

$$T_f = (1 - \varphi^2) \left[\frac{1}{2g} \omega^2_0 \left(2 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2g} (\omega^2_1 - \omega^2_0) \right] + \frac{k}{2g} \omega^2_0, \quad (9)$$

k représentant la perte en % résultant des chocs à l'entrée de la roue, n le rapport $\frac{\omega_0}{\omega_1}$.

Posons pour simplifier la transcription des équations :

$$(1 - \varphi^2) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + k = (1 - \psi^2); \quad (\text{IX})$$

nous aurons :

$$T_f = (1 - \psi^2) \frac{\omega^2_0}{2g} + (1 - \varphi^2) \frac{1}{2g} (\omega^2_1 - \omega^2_0). \quad (\text{X})$$

La valeur T_f mise sous cette forme montre que les pertes par frottements dans la roue d'une pompe centrifuge, sont fonction de deux coefficients qui sont liés entre eux dans une certaine mesure (équation IX), et qui affectent l'un, l'énergie disponible à l'entrée, l'autre l'énergie cinétique acquise dans la roue.

Ces coefficients φ et ψ ont ainsi la même signification que ceux employés dans la théorie des turbines à vapeur.

§ 4. — Rendement indiqué des pompes centrifuges.

Dans ce qui va suivre, nous supposons qu'il existe un distributeur à l'entrée de la roue de la pompe centrifuge et un diffuseur à la sortie; nous supposons encore que les angles β_1 et β_0 des aubes de la roue (fig. 4) restent invariables, tandis que les angles α_0 et α_1 du distributeur et du diffuseur, varient avec le débit Q de la pompe.

En désignant ce débit en mètres cubes par Q , on doit, en effet, avoir la relation :

$$\begin{aligned} 2 \pi r_0 l_0 c_0 \sin \alpha_0 &= Q, \\ 2 \pi r_1 l_1 c_1 \sin \alpha_1 &= Q, \end{aligned}$$

$c_0 \sin \alpha_0$ et $c_1 \sin \alpha_1$ représentent respectivement les composantes des vitesses c_0 et c_1 , normales à la section d'entrée et à la section de sortie de la roue.

Rappelons que nous avons désigné par

- r_0 le rayon de la roue à l'entrée;
- r_1 le rayon de la roue à la sortie;
- l_0 la largeur de la roue à l'entrée;
- l_1 la largeur de la roue à la sortie;
- $m = \frac{r_0}{r_1}$, le rapport des rayons r_0 et r_1 ;
- $n = \frac{\omega_0}{\omega_1}$ le rapport de la vitesse relative à l'entrée à la

vitesse relative à la sortie de la roue, rapport qui ne dépend que des sections à l'entrée et à la sortie, s'il ne se produit ni tourbillonnement, ni rentrée d'air.

Nous avons indiqué fig. 5 l'installation générale d'une pompe centrifuge aspirant sur le parcours oe et refoulant sur le parcours os . Nous avons appelé :

h_1 la hauteur comptée entre le plan d'eau inférieur et l'axe de la pompe ;

h_2 la hauteur comprise entre l'axe de la pompe et l'extrémité du tuyau de refoulement ;

c_s la vitesse de l'eau à la sortie du tuyau de refoulement ;

c_2 la vitesse à la sortie du diffuseur ;

p_2 la pression correspondante ;

p la pression atmosphérique que nous supposons la même au niveau du plan d'eau inférieur et à l'extrémité du tuyau de refoulement ;

T'_f la perte de charge dans le tuyau d'aspiration jusqu'à l'ouïe de la roue ;

T''_f la perte de charge dans le tuyau de refoulement à partir du diffuseur ;

H la hauteur totale $h_1 + h_2$.

Nous appellerons *rendement indiqué de l'installation* le rapport.

$$\eta_i = \frac{H}{T_i}, \quad (\text{XI})$$

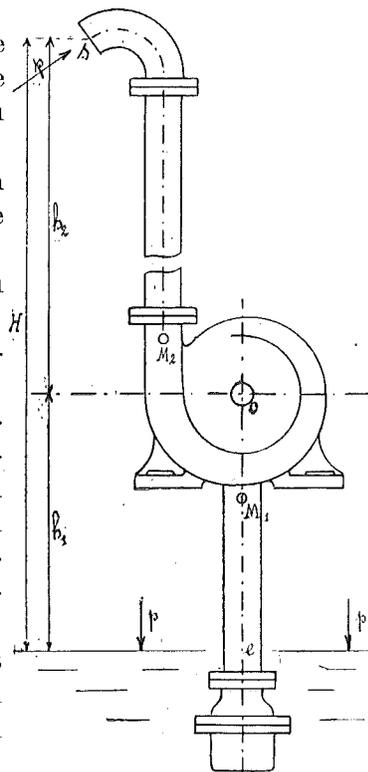


Fig. 5.

T_i étant défini par la relation (III) établie précédemment. Ce serait le rendement net dans l'hypothèse où le frottement de la roue contre le fluide et le frottement de l'arbre dans ses paliers et dans les boîtes à bourrage seraient nuls. En effet, H kgm représente le travail utile par kg d'eau élevée, et T_i le travail dépensé par kg.

Nous allons chercher à exprimer ce rapport en fonction des pressions et des vitesses.

Appliquons au tuyau d'aspiration la relation (IV); nous aurons avec les notations ci-dessus :

$$v(p_0 - p) + h_1 + T'_f + \frac{1}{2g} c_0^2 = 0,$$

la vitesse initiale étant nulle.

Pour le tuyau de refoulement, en appliquant la même formule

$$v(p - p_2) + h_2 + T''_f + \frac{1}{2g} (c_s^2 - c_2^2) = 0;$$

et en ajoutant membre à membre :

$$(h_1 + h_2) + (T'_f + T''_f) + \frac{1}{2g} (c_s^2 + c_0^2 - c_2^2) + v(p_0 - p_2) = 0. \quad (10)$$

Éliminons maintenant le terme $v(p_0 - p_2)$. Pour cela tirons la valeur de $v(p_0 - p_1)$ de la relation (II), dans laquelle nous aurons remplacé préalablement T_f pour la valeur (X); nous obtiendrons :

$$v(p_0 - p_1) = \frac{1}{2g} \left[\omega_1^2 (2 - \varphi^2) - \omega_0^2 (1 + \psi^2 - \varphi^2) - (u_1^2 - u_0^2) \right]$$

(Nous rappelons que le terme $(z_1 - z_0)$ peut être négligé dans l'étude des pompes centrifuges.)

Si l'on remarque que les vitesses u_0 et u_1 sont dans le rapport $\frac{r_0}{r_1}$, et que, pour tous les régimes de la pompe, il existe un rapport constant entre ω_0 et ω_1 que nous

avons représenté par n , et qui est égal à l'inverse du rapport des sections à l'entrée et à la sortie, la valeur ci-dessus pourra s'écrire :

$$v(p_0 - p_1) = -\frac{1}{2g} \left\{ u_1^2 (1 - m^2) + \omega_1^2 \left[n^2 (1 + \psi^2 - \varphi^2) - 2 + \varphi^2 \right] \right\}. \quad (12)$$

Déterminons maintenant $v(p_1 - p_2)$ et pour cela, appliquons aux canaux du diffuseur l'équation (IV).

La hauteur h dans cette formule peut être négligée, puisque dans le diffuseur, nous pouvons toujours considérer deux canaux diamétralement opposés pour lesquels les valeurs de h sont égales et de signes contraires. La valeur T_f peut être calculée au moyen des équations (IX) et (X) où ω_0 serait remplacé par c_1 vitesse à l'entrée du diffuseur et ω_1 par c_2 vitesse à la sortie, n désignant alors le rapport $\frac{c_1}{c_2}$. Mais il est à remarquer que le diffuseur n'existe pas toujours, et qu'il est remplacé quelquefois par un canal en volute; pour donner plus de généralité aux formules qui vont suivre, nous nous contenterons de poser :

$$T_f = (1 - \psi'^2) \frac{c_1^2}{2g} \quad (13)$$

et d'introduire un nouveau coefficient ψ' auquel nous donnerons par la suite, toutes les valeurs depuis 0 jusqu'au maximum, de manière à connaître l'influence de ce facteur sur le rendement. Le maximum de ψ' correspondra évidemment à l'hypothèse où il existe un diffuseur, par conséquent où T_f peut être calculé par la relation (X); ψ' aura donc pour limite la valeur tirée de l'équation :

$$T_f = (1 - \psi'^2) \frac{c_1^2}{2g} + (1 - \varphi^2) \frac{1}{2g} (c_2^2 - c_1^2) = (1 - \psi'^2) \frac{c_1^2}{2g}$$

$$\text{ou } \boxed{(1 - \psi'^2) - (1 - \varphi^2) \left[1 - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right] = (1 - \psi'^2)} \quad (\text{XII})$$

ou n représentant ici le rapport $\left(\frac{c_1}{c_2} \right)$.

En introduisant dans l'équation (IV), appliquée aux canaux du diffuseur, la valeur T_f indiquée par la relation (13), nous aurons :

$$v(p_1 - p_2) = -\left(\psi'^2 \frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g} \right).$$

Exprimons c_1^2 en fonction des vitesses u_1 et ω_1 , en nous servant de la relation tirée du triangle des vitesses à la sortie (fig. 4) :

$$c_1^2 = u_1^2 + \omega_1^2 - 2u_1\omega_1 \cos \beta_1;$$

nous aurons :

$$v(p_1 - p_2) = -\frac{\psi'^2}{2g} (u_1^2 + \omega_1^2 - 2u_1\omega_1 \cos \beta_1) + \frac{1}{2g} c_2^2 \quad (14)$$

Pour simplifier la transcription des formules, posons :

$$1 - m^2 = a,$$

$$n^2 (1 + \psi^2 - \varphi^2) - 2 + \varphi^2 = b$$

et représentons par x le rapport $\frac{\omega_1}{u_1}$ de la vitesse relative de sortie de la roue à la vitesse périphérique u_1 .

Ajoutons les équations (12) et (14), et changeons de signes les deux membres; nous aurons :

$$v(p_2 - p_0) = \frac{u_1^2}{2g} \left[(a + \psi'^2) - 2\psi'^2 \cos \beta_1 x + (b + \psi'^2) x^2 \right] - \frac{1}{2g} c_2^2. \quad (15)$$

Avant d'introduire cette valeur dans la relation (10),

éliminons préalablement de celle-ci le terme c_0^2 , au moyen de la relation relative au triangle des vitesses à l'entrée,

$$c_0^2 = u_0^2 + \omega_0^2 - 2u_0\omega_0 \cos \beta_0 = u_1^2(m^2 - 2mn \cos \beta_0 x + n^2 x^2)$$

Après simplification, il viendra :

$$(h_1 + h_2) + (T_f + T'') + \frac{1}{2g} c_s^2 = \frac{u_1^2}{2g} \left[(a - m^2 + \psi'^2) - 2(\psi'^2 \cos \beta_1 - mn \cos \beta_0) x + (b + \psi'^2 - n^2) x^2 \right]. \quad (16)$$

Le premier membre représente la hauteur totale, y compris les pertes de charge et la hauteur correspondant à la vitesse de sortie; désignons-le par H' .

Nous aurons :

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = (a - m^2 + \psi'^2) - 2(\psi'^2 \cos \beta_1 - mn \cos \beta_0) x + (b + \psi'^2 - n^2) x^2. \quad (XIII)$$

Le rapport $\eta_i = \frac{H'}{T_i}$ représentera le rendement indiqué de la pompe; en effet, H' kgm, c'est par kg de fluide débité, le travail réellement fourni par la pompe, et T_i , c'est le travail dépensé également par kg.

Pour évaluer η_i , il nous suffira de déterminer T_i en fonction de u_1 et ω_1 au moyen de la relation (III) et des relations tirées des triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie :

$$\begin{aligned} c_0 \cos \alpha_0 &= -u_0 + \omega_0 \cos \beta_0 = -m u_1 + n \omega_1 \cos \beta_0, \\ c_1 \cos \alpha_1 &= -u_1 + \omega_1 \cos \beta_1. \end{aligned}$$

Il viendra, en effet, en multipliant ces deux relations respectivement par u_0 et u_1 et en soustrayant la première de la seconde :

$$T_i = -\frac{1}{g} (u_1 c_1 \cos \alpha_1 - u_0 c_0 \cos \alpha_0) = \frac{u_1^2}{g} \left[a - (\cos \beta_1 - mn \cos \beta_0) x \right] \quad (17)$$

a étant mis pour $(1 - m^2)$ d'après la relation adoptée ci-dessus.

En divisant maintenant les équations (16) et (17), membre à membre, nous aurons :

$$\eta_i = \frac{1}{2} \frac{(a + \psi'^2 - m^2) - 2(\psi'^2 \cos \beta_1 - mn \cos \beta_0) x + (b + \psi'^2 - n^2) x^2}{a - (\cos \beta_1 - mn \cos \beta_0) x} \quad (XIV)$$

§ 5. — Conclusions.

Des longs calculs qui précèdent, il résulte que la valeur de H' , qui mesure sensiblement la hauteur manométrique de refoulement, c'est-à-dire la hauteur correspondant à la différence des lectures données par deux monomètres M_1 et M_2 , qui seraient placés l'un à l'ouïe de la roue et l'autre à la sortie du diffuseur (fig. 5), il résulte, disons-nous, que la hauteur H' peut être calculée en fonction de la vitesse périphérique u_1 , du rapport x de la vitesse relative de sortie à la vitesse périphérique u_1 , et enfin en fonction des constantes dont les valeurs dépendent des dimensions de la roue et du diffuseur, ainsi que du coefficient de frottement μ .

En représentant par A, B, C les valeurs de ces constantes :

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = A + Bx + Cx^2$$

La valeur $\frac{2gH'}{u_1^2}$, qui ne dépend que de x et des constantes A, B, C, est le double du coefficient manométrique défini et déterminé expérimentalement par M. Rateau, dans ses essais sur les pompes centrifuges.

De la formule (XIV), il résulte que le rendement indiqué de la pompe est une fonction de x et ne dépend pas de la vitesse périphérique.

Remarquons que le débit Q est proportionnel à la vitesse relative ω_1 , et que l'on a la relation :

$$2 \pi r_1 l_1 \omega_1 \sin \beta_1 = Q, \quad (18)$$

si l'on néglige la diminution de la section de sortie résultant de la présence des ailettes.

Pour une vitesse constante u_1 , $x = \frac{\omega_1}{u_1}$ est donc proportionnel au débit Q .

Les courbes tracées en portant les valeurs de x en abscisses, et les valeurs de $\frac{2gH'}{u_1^2}$ et de η'_i en ordonnées, donneront donc, pour une vitesse de rotation constante, le coefficient manométrique et le rendement indiqué en fonction du débit.

Les valeurs des ordonnées de ces courbes ne dépendront que des dimensions de la roue et du diffuseur, et de l'état des surfaces qui fixe la valeur du coefficient μ .

Dans les essais que l'on effectue sur les pompes centrifuges, on relève ordinairement la courbe du coefficient manométrique et la courbe de rendement total en fonction du débit, à une vitesse aussi constante que possible. L'allure de ces courbes varie avec le type de pompe et dépend surtout de la valeur de l'angle de sortie β_1 . Ces courbes sont appelées les courbes caractéristiques de la pompe.

Nous rechercherons au paragraphe 12 comment on peut déterminer par le calcul, la courbe de rendement total connaissant la courbe de rendement indiqué. Pour le moment, nous allons fixer les valeurs des différentes constantes qui entrent dans les formules, de manière que les résultats obtenus par l'emploi des formules trouvées, constituent des moyennes sur lesquelles on puisse tabler.

§ 6. — Choix des coefficients.

Valeur de m . — La valeur de m qui représente le rapport $\frac{r_0}{r_1}$ du rayon intérieur au rayon extérieur de la roue, varie dans la plupart des types de pompes existantes entre 1/2 et 1/3; nous adopterons :

$$m = 0,4.$$

Valeur de $\left(\frac{l_0}{l_1}\right)$. Ce rapport de la largeur de la roue à l'entrée, à la largeur de la roue à la sortie (fig. 4^{bis}, Pl. 1), varie entre 1,0 et 2,5. Cette limite 2,5 est imposée par des considérations relatives au tracé du profil de la roue qui ne doit pas être trop rapidement convergent, si l'on veut éviter une contraction de la veine fluide à la sortie. Nous choisirons :

$$\frac{l_0}{l_1} = 1,75.$$

Valeur de l_1 . La largeur de la roue à la sortie peut être prise égale à une fraction du rayon; cette largeur est rarement plus petite que $0,1r_1$. Nous adopterons cette valeur et nous examinerons plus loin quelle influence peut avoir sur le rendement, le rapport $\frac{l_1}{r_1}$.

Valeur de β_0 . Dans la plupart des pompes, il n'y a pas de distributeur à cause de la complication de construction que sa présence entraîne, et de la nécessité qu'il crée d'accroître le diamètre de l'ouïe.

Les aubes se prolongent quelquefois jusque dans le plan de l'ouïe de la roue, mais on est alors obligé de les gauchir de façon que l'entrée du fluide se fasse sans choc. En supposant que le fluide pénètre dans la roue perpendiculairement au plan de l'ouïe avec une vitesse absolue c_0 ,

on devra, en effet, donner à l'angle β_0 la valeur déterminée par les triangles des vitesses c_0 , u_0 , et ω_0 , et cette valeur sera variable puisque u_0 grandit depuis le point pris près du moyeu jusqu'au point pris sur le diamètre extérieur de l'ouïe. Dans les calculs, on sera donc forcé de prendre une valeur moyenne pour β_0 de même que pour r_0 .

Lorsque les aubes ne commencent qu'à la hauteur du rayon extérieur de l'ouïe, comme dans le cas de la fig. 2, on peut déterminer β_0 en faisant l'hypothèse que la vitesse c_0 est radiale. Le triangle des vitesses de la fig. 4 donne, en effet, dans le cas où $\alpha_0 = 90^\circ$,

$$u_0 = \omega_0 \cos \beta_0 \quad \text{ou} \quad \cos \beta_0 = \frac{u_0}{\omega_0} \quad (19)$$

Cherchons à exprimer β_0 en fonction des valeurs :

$$\frac{l_1}{l_0}, m, x \text{ et } \beta_1.$$

La relation de continuité qui exprime que le volume qui passe par seconde à l'entrée est égal au volume qui passe par seconde à la sortie de la roue, peut s'écrire dans le cas d'une roue à une ouïe :

$$Q = 2 \pi r_0 l_0 \sin \beta_0 \omega_0 = 2 \pi r_1 l_1 \sin \beta_1 \omega_1. \quad (20)$$

De cette relation on peut tirer la valeur de $\sin \beta_0$:

$$\sin \beta_0 = \frac{r_1}{r_0} \frac{l_1}{l_0} \frac{\omega_1}{\omega_0} \sin \beta_1, \quad (21)$$

et en divisant cette valeur par $\cos \beta_0$ (relation 19) il viendra :

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{r_1}{r_0} \frac{l_1}{l_0} \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\omega_0}{u_0} \sin \beta_1.$$

Dans le cas d'une roue à deux ouïes, l_0 doit être remplacé par $2 l_0$ puisque la section totale à l'entrée est doublée.

Comme nous avons représenté $\frac{\omega_1}{u_1}$ par x , $\frac{r_0}{r_1}$ par m , nous pourrions écrire : $u_0 = m u_1$, et

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{x}{m^2} \frac{l_1}{l_0} \sin \beta_1, \quad (22)$$

ou en substituant à m et à $\frac{l_1}{l_0}$ les valeurs précédemment adoptées 0,4 et 0,57 :

$$\operatorname{tg} \beta_0 = 3,57 x \sin \beta_1.$$

Dans le cas d'une roue à deux ouïes, on aurait d'après ce que nous avons dit ci-dessus :

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{3,57}{2} x \sin \beta_1.$$

On voit que β_0 dépend de β_1 et de x .

Pour les petites valeurs de x , l'angle calculé devient trop faible pour pouvoir être adopté. Il est vrai qu'avec la disposition des aubes de la fig. 2, qui ne commencent qu'à la hauteur du rayon extérieur de l'ouïe, il y a un entraînement des filets fluides dans le sens de rotation de la roue : l'angle α_0 est donc plus grand que 90° et la valeur β_0 peut donc être prise plus grande que celle donnée par la formule (22).

Quoi qu'il en soit, nous calculerons ci-dessous β_0 pour chacune des valeurs de β_1 que nous adopterons, en prenant pour x des valeurs comprises entre 0,3 et 0,6.

Valeur de β_1 . Tandis que certains auteurs proposent de prendre β_1 très petit, d'autres soutiennent qu'il faut le prendre très grand, c'est-à-dire qu'il faut recourber les aubes en avant.

Pour examiner l'influence de cet élément sur le rendement et sur la hauteur de refoulement, nous choisirons successivement :

$$(1) \begin{cases} \beta_1 = 12^\circ \\ \beta_0 = 25^\circ \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \beta_1 = 30^\circ \\ \beta_0 = 35^\circ \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \beta_1 = 90^\circ \\ \beta_0 = 45^\circ \end{cases}$$

Les valeurs de β_0 correspondent respectivement, en supposant $\alpha_0 = 90^\circ$, à des valeurs approximatives de x égales respectivement à 0,6, 0,4 et 0,3.

Si nous avons choisi $x = 0,3$ pour calculer la valeur de β_0 correspondant à $\beta_1 = 12^\circ$, nous aurions trouvé 15° ; cet angle paraît un peu petit pour un tracé convenable des aubes dont l'épaisseur encombrerait alors la section d'entrée d'une manière exagérée.

Remarque. — La relation (22) montre que la valeur de β_0 est d'autant plus petite que le rapport $\frac{l_1}{l_0}$ et le rapport $\frac{\omega_1}{u_1} = x$ sont plus petits. Or, pour les pompes à grande hauteur de refoulement, la vitesse périphérique u_1 est toujours très grande et, pour un débit moyen, la valeur de ω_1 est par conséquent toujours faible par rapport à u_1 ; x étant petit, il faut donc pour avoir une valeur acceptable de β_0 , prendre $\frac{l_1}{l_0}$ assez grand et écartier le type des roues à deux ouïes. Dans ce type, en effet, la valeur de $\tan \beta_0$ est, toutes choses égales, moitié moindre.

Nous verrons au paragraphe que ce n'est pas la seule raison pour laquelle il convient d'adopter, dans les pompes à grand rendement, le type de roue à une ouïe.

Valeur de μ et de k . — Pour pouvoir calculer les coefficients φ , ψ et ψ' qui entrent dans les formules du rendement et de la hauteur manométrique, il faut connaître notamment les valeurs de μ et de k .

μ représente le coefficient de frottement du fluide contre les parois du canal de la pompe. Ce coefficient est donné, d'après Darcy, pour les conduites cylindriques de diamètre d exprimé en cm, par la formule :

$$\mu = 0,00025 + \frac{0,00065}{d}.$$

Comme il s'agit ici de canaux courbes à section rectangulaire de dimensions relativement faibles, il ne nous paraît pas exagéré de prendre pour μ , dans les calculs qui vont suivre :

$$\mu = 0,0006.$$

En ce qui concerne la valeur de k , qui représente la perte par choc à l'entrée, nous manquons de base pour l'apprécier; nous le prendrons égal à 0,05, soit comme hypothèse une perte de 5 % de l'énergie disponible à l'entrée.

§ 7. — Tracé du profil des aubes. Calcul de γ et de ψ .

La question du tracé des aubes a fait l'objet d'un mémoire remarquable de M. Van der Stegen, mémoire publié dans les *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand* (année 1892-93).

Les valeurs de β_0 , β_1 , l_0 et l_1 étant connues, M. Van der Stegen a donné une méthode graphique pour déterminer les formes des aubes de telle manière que la vitesse relative soit la même pour tous les éléments situés à la même distance de l'axe.

Cette condition revient, en somme, à la condition du parallélisme des tranches qui, dans ce cas, sont cylindriques et concentriques.

Par cette méthode, on peut donc réaliser une des hypothèses fondamentales de la théorie.

Ce tracé est assez compliqué et la courbe diffère peu d'un arc de cercle décrit, de manière que les angles d'entrée et de sortie β_0 et β_1 soient égaux respectivement aux valeurs imposées.

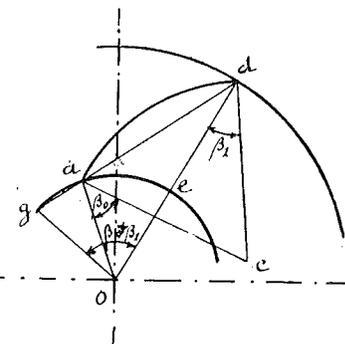


Fig. 6.

Nous indiquons fig. 6 comment on peut faire ce tracé;

on détermine un angle au centre $dog = \beta_1 + \beta_2$ et on trace gd ; en faisant les angles $oac = \beta_0$ et $odc = \beta_1$, on trouve le centre c de l'arc ad qui coupe les circonférences de rayon r_0 et r_1 sous des angles β_0 et β_1 .

Nous n'insistons sur ce tracé que parce que c'est celui que nous avons adopté dans les fig. 1 et 2, en vue de la détermination des valeurs du périmètre moyen m , de la section moyenne σ' et de la longueur s_1 du canal formé par deux aubes consécutives, ces valeurs étant nécessaires pour la détermination de φ et de ψ .

Pour le tracé du profil de la roue, M. Van der Stegen s'impose la condition que la composante radiale de la vitesse relative ($\omega \sin \beta$) croisse ou décroisse uniformément depuis l'entrée jusqu'à la sortie de la roue.

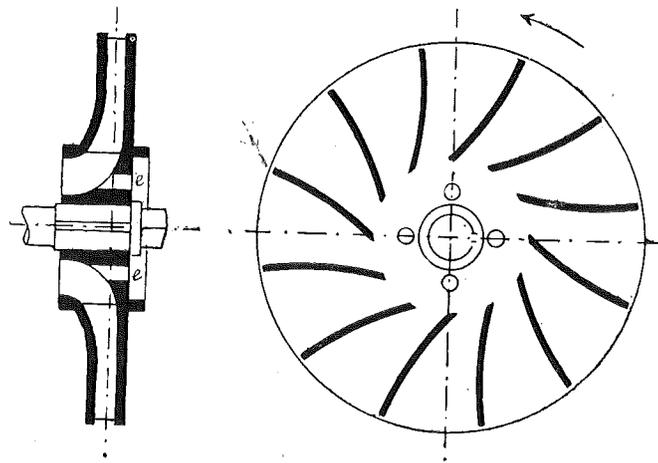


Fig. 7.

Le nombre d'aubes ne peut résulter d'aucun calcul ni d'aucune théorie; le tracé seul peut fournir une indication à cet égard. Avec un faible nombre d'aubes, on remarque que les sections normales à l'axe d'un des canaux constitués par deux aubes consécutives, varient trop rapidement, en grandeur et en direction. Pour cette raison,

six ou sept aubes paraissent suffire pour des angles d'environ 12° , tandis que pour des angles voisins de 90° , il en faut onze ou douze.

Les aubes des fig. 1 et 2 (Pl. 1) et de la fig. 7 ont été tracées par arcs de cercle dans les hypothèses :

$$(1) \begin{cases} \beta_1 = 12^\circ \\ \beta_0 = 25^\circ \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \beta_1 = 30^\circ \\ \beta_0 = 35^\circ \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \beta_1 = 90^\circ \\ \beta_0 = 45^\circ \end{cases}$$

En supposant que la roue ait 0^m20 de diamètre, nous avons pu calculer les valeurs m , σ' , s_1 et n qui représente le rapport $\frac{\omega_0}{\omega_1}$; ce rapport peut en effet se déduire de l'équation (20) :

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = n = \frac{1}{m} \frac{l_1}{l_0} \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_0}. \quad (23)$$

En introduisant les valeurs numériques trouvées dans les formules (VII) et (IX), nous avons obtenu respectivement pour les trois hypothèses ci-dessus, correspondant aux trois figures 1 et 2 (Pl. 1) et fig. 7.

$$(1) \begin{cases} \varphi = 0,92 \\ \psi = 0,67 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \varphi = 0,95 \\ \psi = 0,82 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \varphi = 0,96 \\ \psi = 0,89 \end{cases}$$

Nous avons admis pour les trois roues le profil de la fig. 2.

En répétant les calculs dans l'hypothèse où les tracés des roues seraient faits au $1/10$, c'est-à-dire où les roues auraient un diamètre de 0^m40 , on trouve pour φ et ψ des valeurs sensiblement les mêmes; ce qui signifie que les coefficients des formules (XIII) et (XIV) sont sensiblement constants pour les roues géométriquement semblables.

§ 8. — Tracé du diffuseur. Calcul de ψ .

La forme du diffuseur a une grande importance au point de vue du rendement. Pour que le diffuseur joue un rôle, il faut que les sections normales à l'axe des

canaux formés par deux aubes voisines, n'aillent pas croissant trop rapidement ni en direction, ni en grandeur. S'il en est autrement, en effet, le fluide ne suit plus les parois et il se produit des tourbillonnements qui transforment en chaleur, l'énergie cinétique que le diffuseur a pour mission de convertir en énergie potentielle de pression.

La recherche de la forme théorique offre évidemment de très grandes difficultés, et il ne saurait guère être question de s'en rapporter, pour le tracé, qu'au sentiment et à l'expérience.

Sur le tracé en grandeur du diffuseur représenté fig. 2 à l'échelle de $\frac{1}{5}$, nous avons mesuré les valeurs de la section normale moyenne σ' , du périmètre moyen m et de la longueur s_1 . Au moyen de ces valeurs et des relations (VII) et (IX), nous avons déterminé φ et ψ . (n qui représente le rapport $\frac{c_1}{c_2}$ est égal ici à l'inverse du rapport des sections d'entrée et de sortie du diffuseur.)

Connaissant φ et ψ , il nous a suffi d'introduire leurs valeurs dans la relation (XII)

$$(1 - \psi'^2) = (1 - \psi^2) - (1 - \varphi^2) \left[1 - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right]$$

pour obtenir ψ' . Les calculs donnent

$$\varphi = 0,93 \quad \text{et} \quad \psi' = 0,90.$$

En répétant ces calculs pour un diffuseur géométriquement semblable, plus grand ou plus petit, on trouve sensiblement la même valeur 0,9.

Nous examinerons successivement le cas où l'énergie cinétique à la sortie serait complètement perdue, c'est-à-dire où ψ' serait égal à 0, et le cas où ψ' aurait pour valeur 0,9, ce qui correspond au cas d'un diffuseur bien construit.

§ 9. — Courbes du rendement indiqué et du coefficient manométrique.

Tous les coefficients des formules (XIII) et (XIV) peuvent maintenant être déterminés dans les trois hypothèses que nous désignerons par les indices 1, 2, 3 où

$$(1) \begin{cases} \beta_1 = 12^\circ \\ \beta_0 = 25^\circ \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \beta_1 = 30^\circ \\ \beta_0 = 35^\circ \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \beta_1 = 90^\circ \\ \beta_0 = 45^\circ \end{cases}$$

Pour le premier cas :

$$n = 0,706 \quad \text{[formule (23)]}.$$

$$a = 1 - m^2 = 0,84.$$

$$b = n^2 (1 + \psi^2 - \varphi^2) = -0,857.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 0,68 + 0,51x - 1,35x^2 \quad \text{pour } \psi' = 0.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 1,49 - 1,076x - 0,544x^2 \quad \text{pour } \psi' = 0,9.$$

$$\frac{gTi}{u_1^2} = 0,84 - 0,723x. \quad \text{(formule 17)}$$

Pour le deuxième cas :

$$n = 1,25.$$

$$a = 0,84.$$

$$b = 0,1.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 0,68 + 0,816x - 1,46x^2 \quad \text{pour } \psi' = 0.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 1,49 - 0,588x - 0,650x^2 \quad \text{pour } \psi' = 0,9.$$

$$\frac{gTi}{u_1^2} = 0,84 - 0,458x.$$

Fig. 8.

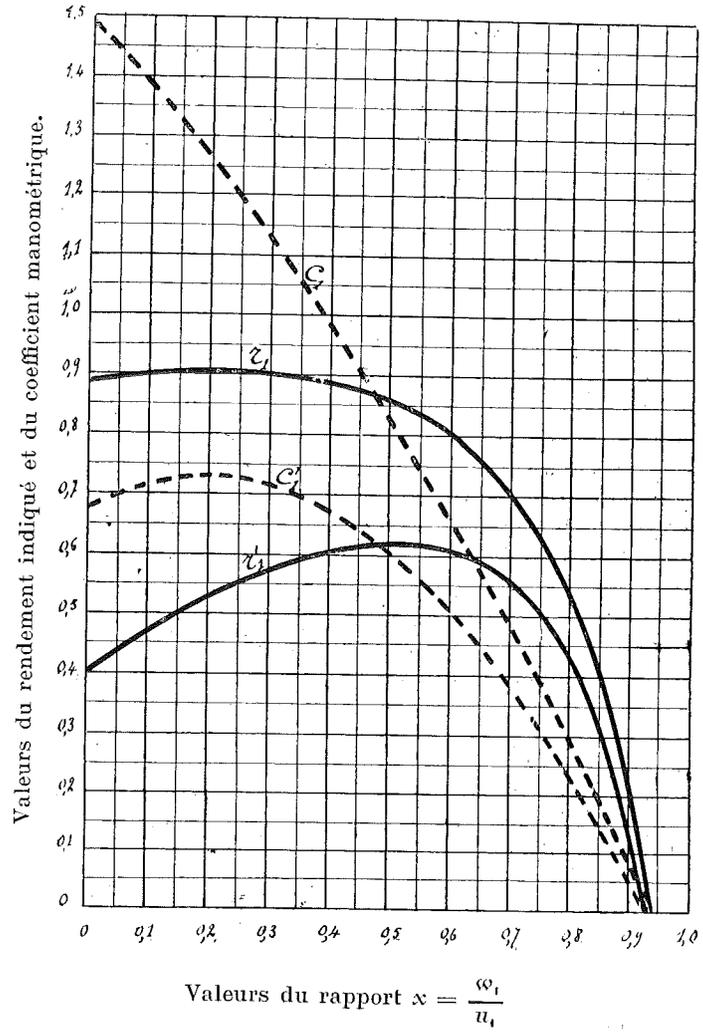
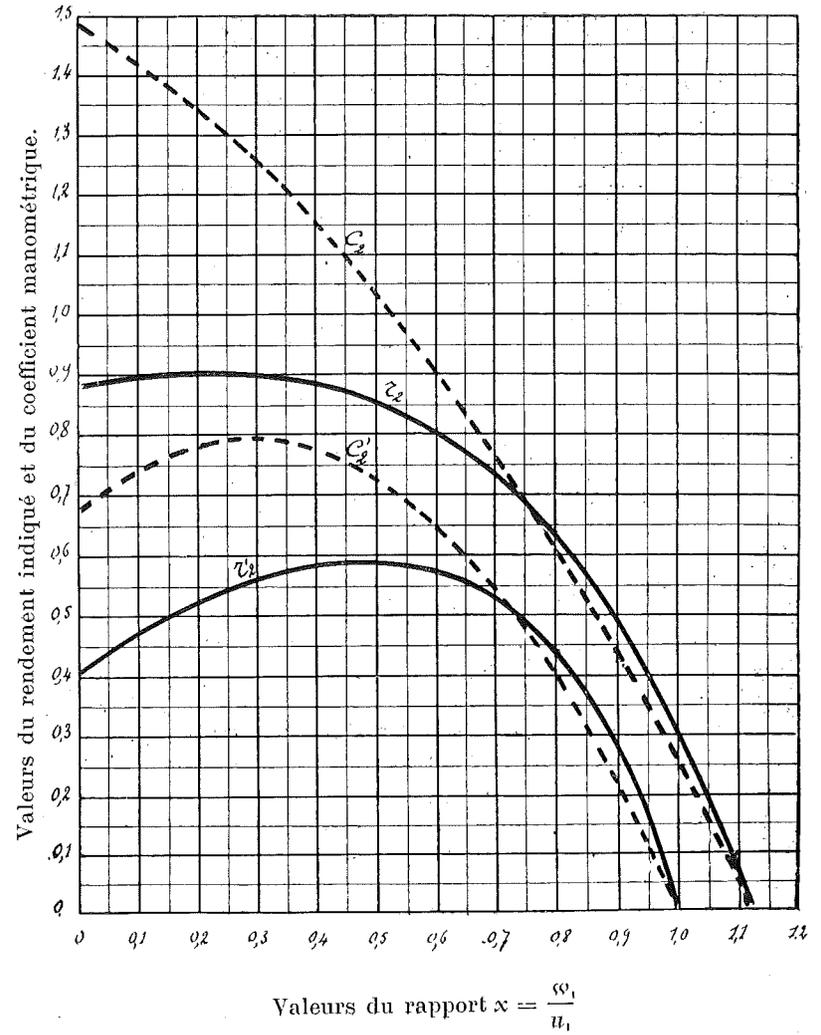


Fig. 9.



Pour le troisième cas :

$$n = 2.$$

$$a = 0,8.$$

$$b = 2,35.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 0,68 + 1,13x - 1,645x^2 \quad \text{pour } \psi' = 0.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 1,49 + 1,13x - 0,835x^2 \quad \text{pour } \psi' = 0,9.$$

$$\frac{gT_i}{u_1^2} = 0,84 + 0,565x.$$

Les valeurs de η'_i pourront être déduites du rapport :

$$\eta'_i = \frac{1}{2} \frac{\frac{2gH'}{u_1^2}}{\frac{gT_i}{u_1^2}}.$$

Nous avons tracé fig. 8, 9 et 10, les courbes donnant les résultats du calcul pour les trois cas, en fonction de x .

Les courbes pointillées correspondent au coefficient manométrique et les courbes en trait plein, au rendement indiqué.

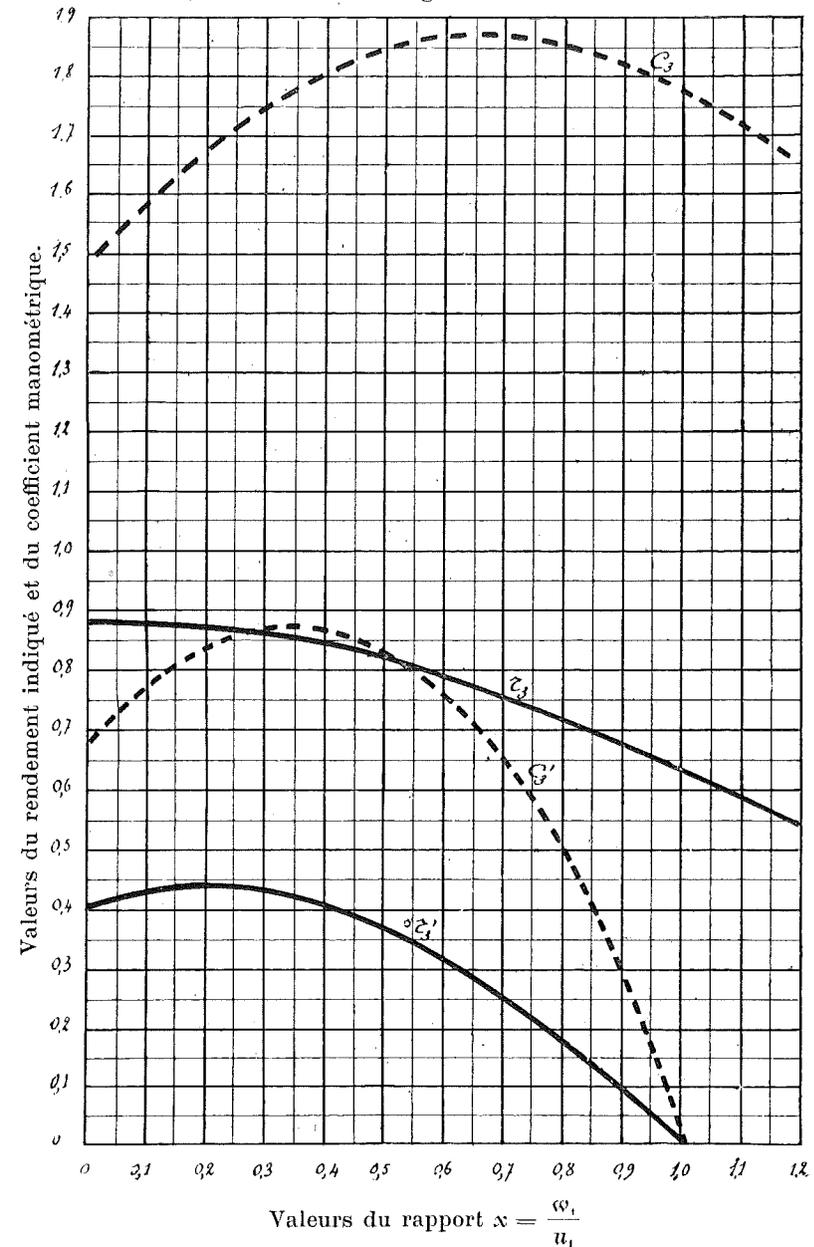
Au point de vue du coefficient manométrique, les courbes $c_1 c_2 c_3$, tracées dans l'hypothèse où il existe un diffuseur, font ressortir :

1° que le coefficient manométrique augmente avec l'angle β_1 pour une même valeur de x ;

2° que pour des angles plus grands que 45° environ, le coefficient manométrique augmente d'abord pour diminuer ensuite ;

3° que pour des angles plus petits que 45° environ, le coefficient manométrique est maximum pour $x = 0$, c'est-à-dire pour un débit nul.

Fig. 10.



Comparées aux courbes $c'_1 c'_2 c'_3$, tracées dans l'hypothèse où il n'existe pas de diffuseur, les courbes $c_1 c_2 c_3$, montrent encore que le diffuseur a pour effet de doubler sensiblement le coefficient manométrique quand les valeurs de x sont comprises entre 0,3 et 0,4.

Au point de vue du rendement indiqué, les courbes r_1, r_2 et r_3 montrent :

- 1° que le rendement indiqué est sensiblement le même pour les petites valeurs de x , quel que soit l'angle choisi ;
- 2° qu'il est cependant plus faible pour les valeurs de $\beta_1 > 30^\circ$.

Au sujet de cette dernière conclusion, on peut même dire que le rendement indiqué diminue un peu plus rapidement que ne le font ressortir les diagrammes, quand l'angle β_1 croît. En effet, nous avons dans les calculs, choisi une valeur constante de ψ' , ce qui suppose un diffuseur identique pour toutes les valeurs de β_1 . Or, la forme et la longueur du diffuseur doivent varier avec la vitesse de sortie c_1 , qui croît pour une même valeur de x quand β_1 augmente ; plus c_1 est grand, plus le diffuseur doit être long et moins divergent, par conséquent plus ψ' doit être faible.

Si nous comparons les courbes $r'_1 r'_2 r'_3$ aux courbes $r_1 r_2 r_3$ tracées dans l'hypothèse où il existe un diffuseur, nous voyons :

1° que le rendement indiqué est augmenté dans le rapport de $3/2$, par la présence d'un diffuseur, lorsque les valeurs de x sont comprises entre 0,3 et 0,4 ;

2° que contrairement à ce que nous avons conclu plus haut, le rendement d'une pompe sans diffuseur est presque diminué de moitié lorsqu'on passe d'un angle $\beta_1 = 12^\circ$, à un angle $\beta_1 = 90^\circ$.

Cette conclusion explique comment on a pu voir des auteurs soutenir qu'il fallait prendre des angles très petits, tandis que d'autres proposaient des aubes radiales.

Les premiers avaient raison pour des pompes ne possédant pas de diffuseur, ou un mauvais diffuseur, les seconds n'envisaient probablement que des pompes avec diffuseur à aubes bien construit.

Il est possible de vérifier très simplement par l'expérience les résultats obtenus. Nous avons vu que H' représentait la différence en mètres d'eau, entre la pression à l'entrée de la roue et la pression à la sortie du diffuseur. Pour mesurer H' , il suffira donc de relier un manomètre successivement à des ouvertures pratiquées à l'ouïe et à la sortie du diffuseur. Connaissant les dimensions de la pompe et le débit, on pourra calculer x par les deux relations :

$$2 \pi r_1 l_1 \sin \beta_1 \omega_1 = Q,$$

$$x = \frac{\omega_1}{u_1};$$

par conséquent on pourra trouver un point de la courbe du coefficient manométrique en fonction de x .

Pour obtenir le point correspondant de la courbe *sans diffuseur*, il suffira de relever la pression à la sortie de la roue et de prendre pour H' la différence entre la valeur observée et celle obtenue avec le manomètre relié à l'ouïe.

Afin de pouvoir trouver plusieurs points et tracer les deux courbes, on installe la pompe avec une conduite de refoulement très courte, et on fait varier la pression à la sortie du diffuseur et le débit de la roue, en fermant plus ou moins complètement une vanne placée à l'extrémité de la conduite.

Sans pouvoir indiquer dans quelle mesure les courbes expérimentales s'accordent avec les courbes calculées, nous pouvons dire que l'allure de ces dernières correspond d'une manière satisfaisante à celle observée.

Malheureusement les résultats donnés dans les revues techniques ne sont jamais accompagnés des dimensions des pompes sur lesquelles ont été effectuées les expé-

riences, et il n'est pas possible, dès lors, de rechercher les courbes calculées.

Une coïncidence absolue entre les courbes résultant d'expériences et les courbes théoriques ne peut d'ailleurs jamais exister, sauf aux environs du débit pour lequel la pompe a été calculée. En effet, la théorie précédente suppose que les angles du distributeur et du diffuseur sont déterminés pour chaque débit, de manière à rendre minimum les chocs à l'entrée de la roue et du diffuseur; cette condition ne saurait évidemment être réalisée dans les expériences.

Du tracé des deux courbes expérimentales du coefficient manométrique (avec ou sans diffuseur), il est possible, en tout cas, de déterminer avec une certaine rigueur, les valeurs de φ , ψ et ψ' , par conséquent d'établir a priori, par le calcul, les courbes caractéristiques pour une pompe de même construction, et cela avec une grande approximation.

Avant de formuler, d'une manière précise, des conclusions concernant l'angle β_1 et la valeur de x qu'il convient d'adopter dans les projets, il est nécessaire de rechercher comment varie, avec le débit, le rendement effectif.

§ 10. — Rendement organique et rendement effectif.

Désignons par Q le débit en mètres cubes par seconde de la pompe, et appelons puissance indiquée, celle définie par la formule :

$$N_i = \frac{1000 Q}{75} T_i \quad (\text{XV})$$

Nous avons vu, en effet, que T_i représentait le travail théorique par kg de fluide débité; le travail par seconde est donc bien représenté par $1000 QT_i$ lorsque le fluide mis en mouvement est de l'eau, et la puissance en chevaux-vapeur par

$$\frac{1000 Q}{75} T_i.$$

Si nous appelons N_o la puissance absorbée par les frottements de la roue contre le fluide et par les frottements de l'arbre dans ses paliers et dans les boîtes à bourrage, le rendement organique aura pour expression :

$$\eta_o = \frac{N_i}{N_i + N_o} \quad (\text{XVI})$$

Cherchons à évaluer N_o et, tout d'abord, la puissance absorbée par les frottements des deux faces d'une roue contre le fluide ambiant, puissance que nous désignerons par N_f .

Considérons fig. 11, la face d'une roue de rayon r tournant avec une vitesse angulaire ω , autour de son axe o . Le frottement de la paroi contre le fluide étant proportionnel à la surface et au carré de la vitesse, le frottement relatif à un élément circulaire compris entre deux circonférences de rayon r et $r + dr$ sera égal à

$$\mu (2 \pi r dr) \omega^2 r^2,$$

Fig. 11.

μ étant le coefficient de frottement. Le travail par seconde aura pour valeur

$$\mu (2 \pi r dr) \omega^2 r^2 \times \omega r$$

et, par conséquent, pour obtenir la puissance totale pour les deux faces, il suffira d'intégrer entre o et r_1 , de multiplier par 2 et de diviser par 75, si l'on veut que le résultat soit exprimé en chevaux-vapeur. D'après cela :

$$N_f = \frac{4 \pi \mu}{75} \omega^3 \frac{r_1^5}{5}$$

où, en remarquant que $\omega^3 r^3 = u^3_1$,

$$N_f = \frac{4 \pi \mu}{75 \times 5} u^3_1 r^2_1. \quad (24)$$

La valeur de μ dépend de la pression et de la nature du fluide.

Des expériences de *Unwin*, il résulte que pour l'eau, à la pression atmosphérique et dans les conditions normales de pureté, la valeur de μ est égale à 0,162.

En adoptant cette valeur, à défaut de données plus précises, nous aurons pour N_f

$$N_f = 0,00543 u^3_1 r^2_1. \quad (XVII)$$

Pour déterminer la puissance absorbée par les frottements de l'arbre dans ses paliers et de l'arbre dans les boîtes à bourrage, nous établirons d'après *Lasche* la puissance absorbée dans les paliers, et, en l'absence de renseignements plus précis, nous doublerons le nombre trouvé pour tenir compte des frottements dans les bourrages.

Si nous désignons par μ le coefficient de frottement de l'arbre dans son coussinet, le travail absorbé par seconde sera égal à

$$\mu l d p c,$$

l désignant ici la longueur du tourillon en cm,

d son diamètre en cm,

p la pression par centimètre carré de surface projetée du tourillon,

c la vitesse périphérique de l'arbre en mètres.

Or, si nous désignons par t la température des surfaces glissantes, il existe, d'après *Lasche*, une relation très simple entre μ , p et t :

$$p \mu t = 2.$$

Adoptons pour valeur de la température t une valeur maximum 60° et désignons par N'_f la puissance absorbée

par les frottements de l'arbre dans ses deux paliers en chevaux-vapeur :

$$N'_f = \frac{4}{75} \frac{l d}{60} c.$$

Prenons pour rapport $\frac{l}{d}$ la valeur souvent adoptée de 3, et substituons au diamètre d supposé exprimé en cm, sa valeur exprimée en mètres; remplaçons, de plus c par sa valeur :

$$c = \frac{\pi d N}{60},$$

N désignant le nombre de tours de l'arbre. Nous aurons :

$$N'_f = \frac{120.000 \pi d^5 N}{75 \times 60 \times 60} = 1,4 d^5 N. \quad (25)$$

Comme nous faisons l'hypothèse que cette valeur est doublée par les frottements dans les boîtes à bourrages :

$$N'_f = 2,8 d^5 N. \quad (XVIII)$$

Ainsi, dans les conditions les plus favorables, la valeur de N_o est donnée par la formule :

$$N_o = 0,00543 u^3_1 r^2_1 + 2,8 d^5 N. \quad (26)$$

Pour pouvoir déterminer η_o , il nous reste à évaluer N_i au moyen de la formule (XV), par conséquent à déterminer Q et T_i en fonction de α , de u_1 et des dimensions de la pompe.

Si nous représentons par e_1 l'épaisseur mesurée suivant la circonférence de l'une des aubes, par s_1 la distance mesurée suivant la circonférence, de deux aubes consécutives, la valeur de Q sera donnée par la relation :

$$Q = 2 \pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s_1 + e_1} \sin \beta_1 \omega_1 = 2 \pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s_1 + e_1} \sin \beta_1 \alpha u_1. \quad (27)$$

Cette relation n'est autre que celle donnée sous le numéro (18), lorsqu'on tient compte de la diminution de section qui résulte de la présence des ailettes.

En posant

$$c = \cos \beta_1 - m n \cos \beta_0, \quad (28)$$

la formule (17) combinée avec l'équation (XV), nous permettra d'écrire :

$$N_i = \frac{1000 Q}{75} \frac{u^2_1}{g} (a - c x). \quad (XIX)$$

La discussion de la formule générale (XVI) dans laquelle nous aurions substitué à N_i et à N_o leurs valeurs ci-dessus, n'offrirait que peu d'intérêt, en raison du grand nombre d'éléments variables

$$\beta_1, r_1, N, l_1, d$$

qui entreraient dans la formule sans être liés entre eux.

Pour nous rendre compte de l'influence sur le rendement des valeurs de β_1 , r_1 , N et l_1 , nous supposons successivement :

1) Que les valeurs de r_1 , N et l_1 étant connues, on donne à β_1 les valeurs 12° , 30° , 90° ;

2) Que le nombre de tours restant constant, de même que l'angle β_1 et que le rayon r_1 , on fasse varier le rapport entre la largeur l_1 et le rayon r_1 , et qu'on prenne successivement $\frac{l_1}{r_1}$ égal à $0,1$, $0,15$, $0,2$;

3) Que l'angle β_1 étant pris égal à 30° et le nombre de tours N égal à 1450, on double le rayon r_1 , tout en conservant les mêmes proportions de la roue, c'est-à-dire, en conservant les rapports

$$\frac{l_1}{r_1} = 0,1, \quad \frac{r_0}{r_1} = 0,4, \quad \frac{l_0}{l_1} = 1,75;$$

4) Que les dimensions de la roue restant invariables, on double le nombre de tours N de la roue, c'est-à-dire qu'on passe de 1450 à 2900 tours.

Nous pourrions ainsi nous rendre compte des valeurs qu'il conviendrait d'adopter pour l'angle de sortie β_1 , pour le nombre de tours N , pour le rapport $\frac{l_1}{r_1}$, etc.

Avant de passer à l'application des formules, définissons ce que nous entendons par *rendement effectif* que nous représenterons par η_e . Le rendement effectif est évidemment le rapport de la puissance effective fournie par la pompe à la puissance totale absorbée. Or, la puissance fournie par la pompe en chevaux-vapeur est égale d'après ce que nous avons vu à

$$\frac{1000 Q H'}{75},$$

H' étant la hauteur manométrique.

Comme la puissance absorbée totale est égale à $N_o + N_i$, le rendement effectif est donc représenté par

$$\eta_e = \frac{1000 Q H'}{75 (N_i + N_o)}. \quad (29)$$

En divisant haut et bas par N_i , et en remarquant que, d'après la relation (XV),

$$N_i = \frac{1000 Q T_i}{75},$$

nous aurons la formule :

$$\eta_e = \frac{H'}{T_i} \frac{N_i}{N_i + N_o} = \eta'_i \times \eta_o. \quad (XX)$$

§ 11. — Courbes de rendement effectif.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE. — Considérons le cas d'une roue de 0^m20 de diamètre ayant les proportions des fig. 1, 2 (Pl. 1) et de la fig. 7, c'est-à-dire correspondant aux coefficients adoptés au paragraphe précédent pour le calcul du rendement indiqué :

$$m = 0,4 \quad \frac{l_0}{l_1} = 1,75 \quad \frac{l_1}{r_1} = 0,1.$$

Supposons que le nombre de tours soit de 1450 et que les angles prennent les valeurs :

$$\beta_1 = 12^\circ \quad \beta_1 = 30^\circ \quad \beta_1 = 90^\circ.$$

Calculons au moyen de la formule (27), la valeur de Q en fonction de x ; nous aurons :

$$\text{pour } \beta_1 = 12^\circ \quad \frac{s_1}{s_1 + e_1} = 0,84, \quad Q = 0,0166 x.$$

$$\text{pour } \beta_1 = 30^\circ \quad \frac{s_1}{s_1 + e_1} = 0,87, \quad Q = 0,0420 x.$$

$$\text{pour } \beta_1 = 90^\circ \quad \frac{s_1}{s_1 + e_1} = 0,90, \quad Q = 0,0860 x.$$

Au moyen de la formule (XIX), déterminons la puissance N_i en fonction de x ; nous obtiendrons :

$$N_i = 315 Q (a - cx).$$

Enfin évaluons N_o avec la formule admise plus haut :

$$N_o = 0,00543 u_1^3 r_1^2 + 2,8 d^5 N;$$

en adoptant pour d , diamètre de l'arbre 0^m03 :

$$N_o = 0,19 + 0,11 = 0,30.$$

Nous pourrions dresser pour chacune des valeurs de β_1 un tableau analogue à celui ci-dessous.

Tableau I. — $\beta_1 = 12^\circ$.

x	$a - cx$	Q	N_i	N_o	η'_i		η_e		H'	
					$\psi' = 0$	$\psi' = 0,9$	$\psi' = 0$	$\psi' = 0,9$	$\psi' = 0$	$\psi' = 0,9$
0,00	0,84	0,000	0,00	0,00	0,404	0,890	0,000	0,000	8,00	17,54
0,10	0,768	0,00166	0,402	0,572	0,470	0,900	0,268	0,514	8,45	16,25
0,20	0,696	0,00332	0,727	0,707	0,524	0,905	0,373	0,640	8,58	14,75
0,40	0,550	0,00664	1,150	0,794	0,607	0,882	0,482	0,700	7,88	11,42
0,60	0,406	0,00996	1,275	0,810	0,616	0,800	0,498	0,648	5,87	7,65

Nous avons dans les diagrammes fig. 12 et 13, porté Q en abscisse, H' et η_e en ordonnée.

Les courbes de la fig. 12 correspondent à l'hypothèse où $\psi' = 0,9$, par conséquent au cas des pompes avec diffuseur bien construit; les courbes de la fig. 13 sont relatives au cas où $\psi' = 0$, c'est-à-dire où il n'existe ni diffuseur ni canal en volute.

Les courbes 1, 2 et 3 se rapportent respectivement aux cas

$$\beta_1 = 12^\circ \quad \beta_1 = 30^\circ \quad \beta_1 = 90^\circ.$$

La hauteur manométrique est donnée par les courbes pointillées et le rendement effectif par les courbes en trait plein.

Avant d'étudier ces courbes, il y a lieu de remarquer que la puissance maxima de la pompe correspondant à $\beta_1 = 12^\circ$ est d'environ 1,5 cheval; tandis que la puissance de la pompe construite avec l'angle $\beta_1 = 90^\circ$ est de 5,5 chevaux. Il conviendrait donc pour faire la comparaison au point de vue des angles de sortie, de déterminer la hauteur et le rendement de la même roue de 0^m20 de diamètre ayant également un angle de sortie $\beta_1 = 12^\circ$, mais ayant une largeur plus grande de manière que la puissance normale soit d'environ 3 chevaux. En choisissant la largeur $l_1 = 20$ mm au lieu de 10 mm,

nous avons trouvé à peu près cette valeur et nous avons tracé les courbes de la hauteur manométrique et du rendement sur les fig. 12 et 13 en les désignant par la notation (1').

En comparant les courbes (1'), 2 et 3 de la fig. 12 qui se rapportent au cas des pompes avec diffuseur, nous voyons que :

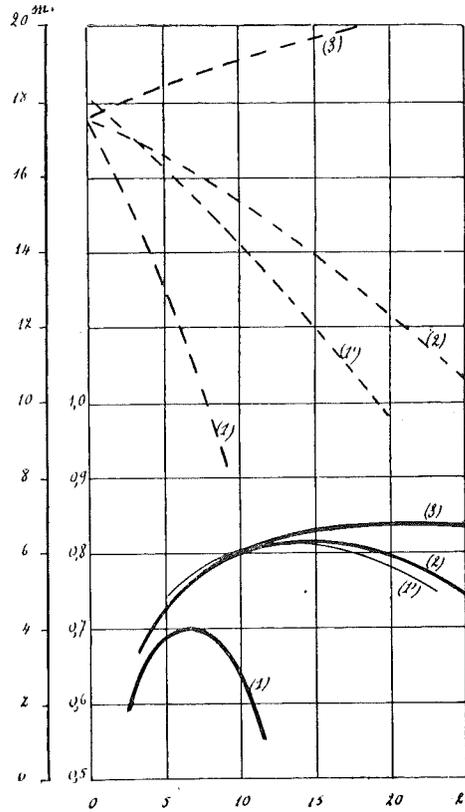


Fig. 12.

pour les valeurs de β_1 voisines de 90° .

Le rendement serait donc un peu inférieur à celui donné par les courbes 2 et 3.

a) Le rendement effectif des pompes de même puissance, dépend peu de l'angle β_1 de sortie.

Il convient, cependant, de faire remarquer que, comme nous l'avons déjà dit, plus l'angle est grand, plus grande est la vitesse absolue de sortie pour un débit donné; que, par conséquent, la longueur du diffuseur doit croître pour un même débit, lorsque la valeur de β_1 se rapproche de 90° , et qu'ainsi la valeur de ψ' que nous avons supposée constante, devrait être plus faible

b) Pour une même roue tournant à la même vitesse et débitant la même quantité, les hauteurs manométriques augmentent avec l'angle β_1 .

c) Dans le cas où l'angle dépasse 45° environ la hauteur manométrique augmente avec le débit, ce qui entraîne comme conséquence, une difficulté d'amorçage.

En effet, à la mise en route de la pompe, l'eau atteindra dans le tuyau de refoulement la hauteur de 18 m. correspondant au débit nul; mais comme la hauteur totale, pertes de charge comprises, qui correspond au rendement maximum avec un angle $\beta_1 = 90^\circ$ est d'environ 20 m, l'eau ne pourra atteindre l'extrémité du tuyau de refoulement; il faudra, pour amorcer la pompe, faire croître un instant la vitesse au delà de la vitesse normale.

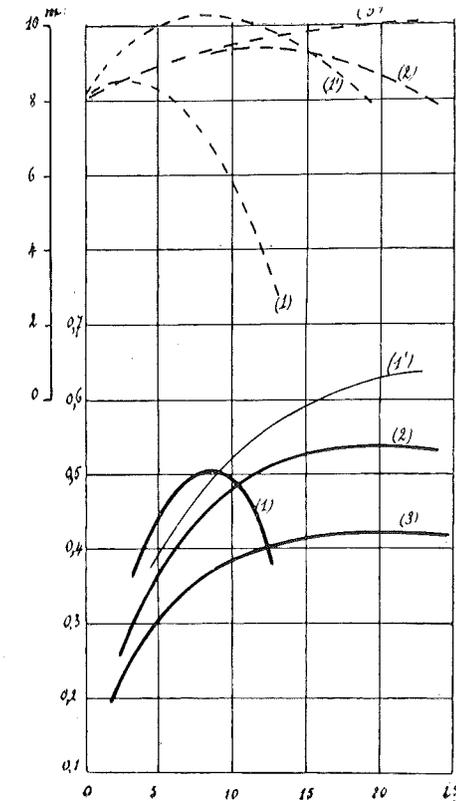


Fig. 13.

En comparant les courbes 1, 2 et 3 de la fig. 13 qui se rapportent au cas des pompes sans diffuseur et sans canal en volute, nous voyons que :

a) Le rendement effectif des pompes de même puissance, est d'autant plus élevé que l'angle β_1 est plus

petit; pour un même débit, ce rendement est augmenté d'un tiers et plus lorsqu'on passe de $\beta_1 = 90^\circ$ à $\beta_1 = 12^\circ$;

b) La hauteur manométrique est sensiblement la même quelque soit l'angle β_1 .

En comparant les courbes des fig. 12 et 13, on voit que, par l'adjonction d'un diffuseur, on obtient :

a) Pour un même débit, une hauteur manométrique presque double ;

b) Pour un même débit, un rendement plus grand de plus d'un tiers.

Conclusions. — De l'examen des tableaux tels que celui donné ci-dessus et des remarques que nous venons de faire, nous pouvons conclure que :

1° Il est nécessaire dans les pompes à grand rendement et à grande hauteur de refoulement, d'employer un diffuseur bien construit et de réduire autant que possible les frottements de l'arbre dans les paliers et les boîtes à bourrage afin d'augmenter le rendement organique ;

2° Pour les pompes avec diffuseur, l'angle de sortie β_1 doit être compris entre $\beta_1 = 30^\circ$ et $\beta_1 = 45^\circ$, et la valeur de x correspondant au maximum de rendement est voisine de 0,4 ;

3° Pour les pompes sans diffuseur, l'angle β_1 doit être pris très petit, environ 12° , et la valeur de x correspondant au maximum de rendement est voisine de 0,6.

Les conclusions ci-dessus, concernant les angles, sont confirmées par l'expérience.

DEUXIÈME HYPOTHÈSE. — Les courbes (1) et (1') des fig. 12 et 13 montrent l'influence sur le rendement, de la largeur l_1 de la roue.

Pour nous rendre compte plus exactement de l'influence de ce facteur, nous avons calculé le rendement effectif dans l'hypothèse d'une roue de 0^m20 de diamètre tournant

à 1450 tours, dont la largeur de sortie serait successivement égale à

$$0,1 r_1 \quad 0,15 r_1 \quad 0,2 r_1$$

soit 10, 15 et 20 mm.

Nous avons dressé trois tableaux semblables à celui ci-dessus.

Pour calculer le rendement indiqué, nous avons recherché pour chaque cas, les valeurs de φ , ψ et ψ' , et nous avons trouvé

pour $l_1 = 0,1 r_1$	$\varphi = 0,92$	$\psi = 0,67$	$\psi' = 0,90$
pour $l_1 = 0,15 r_1$	$\varphi = 0,935$	$\psi = 0,75$	$\psi' = 0,915$
pour $l_1 = 0,20 r_1$	$\varphi = 0,955$	$\psi = 0,83$	$\psi' = 0,93$

Pour $l_1 = 0,2 r_1$, nous avons dû adopter comme rapport $\frac{l_1}{l_0}$ la valeur 1,2, au lieu de la valeur 1,75.

La figure 14 donne dans l'hypothèse où il existe un diffuseur bien construit, les valeurs du rendement indiqué et du rendement effectif en fonction du débit.

Les courbes e_1 et e_3 sont celles qui ont déjà été tracées sur la fig. 12 pour $l_1 = 10$ mm et $l_1 = 20$ mm; la courbe e_2 correspond à $l_1 = 15$ mm.

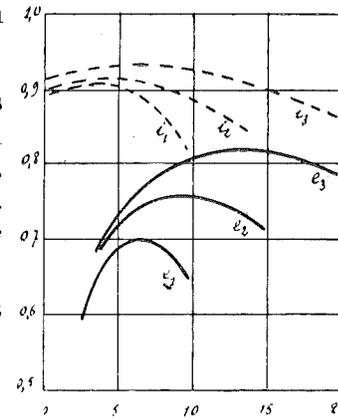


Fig. 14.

De la comparaison de ces courbes, il résulte que :

a) Le rendement indiqué augmente, mais assez faiblement, lorsqu'on fait croître l_1 ;

b) Le rendement effectif, pour un même débit, est sensiblement plus élevé à mesure que l_1 augmente.

Il faut cependant remarquer qu'à mesure qu'on augmente la largeur l_1 , la valeur de x pour un débit déterminé, diminue. Or, avec des valeurs de x très faibles, l'angle α_1 que fait le jet à la sortie avec la tangente à la roue, est très petit, et la vitesse absolue de sortie est relativement grande; le diffuseur devient plus difficile à construire et doit être d'autant plus long que x est plus petit.

Il ne faut donc pas conclure que l'on peut augmenter indéfiniment la largeur de la roue pour un débit donné.

De la comparaison des courbes de la fig. 15, tracées dans l'hypothèse où il n'existe pas de diffuseur, il

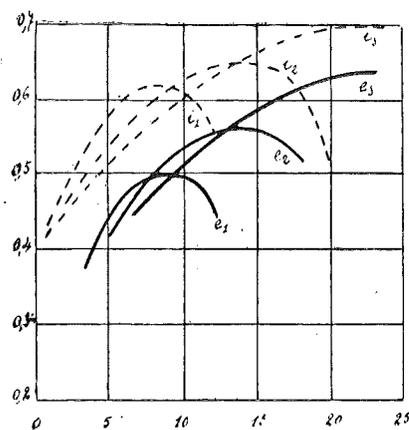


Fig. 15.

résulte que le rendement croît avec la largeur de la roue, mais que pour un débit donné, le maximum de rendement correspond à la valeur de l_1 pour laquelle x est voisin de 0,6.

Conclusions. — Pour les débits relativement faibles, il convient de prendre $l_1 = 0,1 r_1$ environ. Si l'on fait croître l_1 , il convient de s'assurer

que la valeur de x n'est pas inférieure à 0,20 par exemple, dans le cas d'une pompe avec diffuseur, et à 0,50 dans le cas d'une pompe sans diffuseur.

Remarque. — Nous tâcherons de faire ressortir ici l'avantage des roues à une ouïe sur les roues à deux ouïes au point de vue du rendement.

En ce qui concerne les pertes par frottement dans la roue, on peut assimiler sans grande erreur, une roue

à deux ouïes à deux roues à une ouïe, opposée l'une à l'autre et de largeur l_1 moitié moindre.

Le rendement indiqué d'une roue sans diffuseur, à deux ouïes de largeur $l_1 = 20$ mm sera donc sensiblement le même que celui d'une roue à une ouïe de largeur $l_1 = 10$ mm.

Pour comparer le rendement indiqué d'une roue à deux ouïes avec celui d'une roue à une ouïe de même largeur $l_1 = 20$ mm, il suffira donc de se servir des courbes de rendement indiquées i_1 et i_3 . La différence aux environs de rendement maximum et pour un même débit, est à peu près de 5 %.

Le rendement organique et le rendement du diffuseur étant évidemment le même pour les deux systèmes, on peut conclure que la différence totale est inférieure à 4 1/2 %.

TROISIÈME HYPOTHÈSE. — Nous avons choisi l'angle $\beta_1 = 30^\circ$ et le nombre de tours 1450. Nous avons calculé le rendement d'une roue de 0^m40 de diamètre géométriquement semblable à celle 0^m20 représentée fig. 2, Pl. 1.

La puissance absorbée N_f par les frottements de la roue contre le fluide, est égale, dans ce cas, à

$$N_f = 0,00543 \times 30,35^3 \times 0,2^2 = 6,06.$$

La puissance absorbée par le frottement des bords de la roue dont nous supposons l'épaisseur égale à 6 mm n'est pas négligeable avec une vitesse périphérique de plus de 30 m; en la calculant, nous avons trouvé 0,9 cheval.

La puissance absorbée par les frottements de l'arbre dont nous supposons le diamètre égal à 60 mm est donnée par la formule

$$N_0 = 2,8 \times 0,06^3 \times 1450 = 0,87$$

Nous pourrions donc prendre pour N_0

$$N_0 = 6,06 + 0,9 + 0,87 = 8 \text{ chevaux environ.}$$

La valeur Q résulte de la formule (27); elle est donc égale à

$$Q = 0,34 x$$

La formule (XIX) donne d'autre part

$$N_i = 1260 Q (a - cx).$$

Ces valeurs ont permis de dresser un tableau semblable au tableau I précédent.

Nous avons porté fig. 16, le débit en abscisse, le

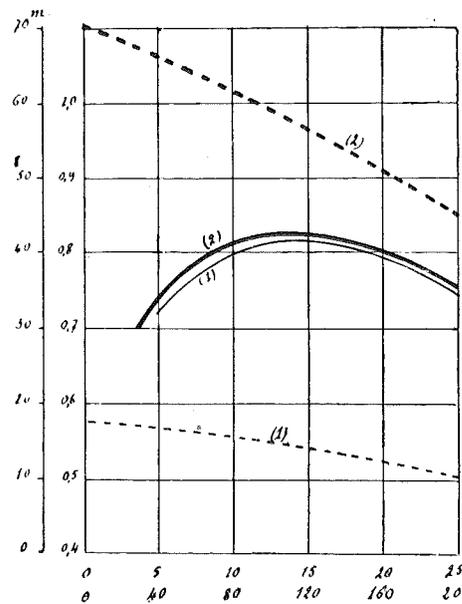


Fig. 16.

rendement et la hauteur manométrique en ordonnée; la courbe (1) est identique à la courbe (2) de la fig. 12 et correspond au cas d'une roue de 0^m20; la courbe (2) se rapporte à la roue de 0^m40 géométriquement semblable à la première.

L'échelle des abscisses a été choisie 8 fois plus grande pour cette dernière que pour la courbe (1); on voit que dans ces conditions, les courbes ont la même allure et que la différence de rendement est de 1 à 2 %. Quant aux hauteurs manométriques, elles sont dans le rapport de 1/4 pour les débits pris dans le rapport de 1/8.

Conclusions. — On peut donc conclure que le rendement effectif est sensiblement le même pour toutes les roues géométriquement semblables, à la condition que les débits pour les différentes roues soient entre eux comme les cubes des rayons de ces roues.

QUATRIÈME HYPOTHÈSE. — Nous avons déterminé le rendement effectif de la pompe de 0^m20 de diamètre tournant à 2900 tours.

En calculant la puissance absorbée par les frottements de la roue avec les formules (XVII) et (XVIII), nous avons trouvé :

$$N_f = 1,54 \quad N'_f = 0,23$$

Pour le frottement des bords de la roue dont nous

avons supposé l'épaisseur égale à 5 mm, nous avons obtenu 0,38. La valeur à la vitesse de 2900 tours est donc égale à

$$N_0 = 1,54 + 0,23 + 0,38 = 2,15,$$

au lieu de 0,30 à 1450 tours.

Des formules (XIX) et (27) nous avons déduit :

$$N_i = 1280 Q (a - cx),$$

$$Q = 0,084 x,$$

et nous avons dressé un tableau semblable au tableau I.

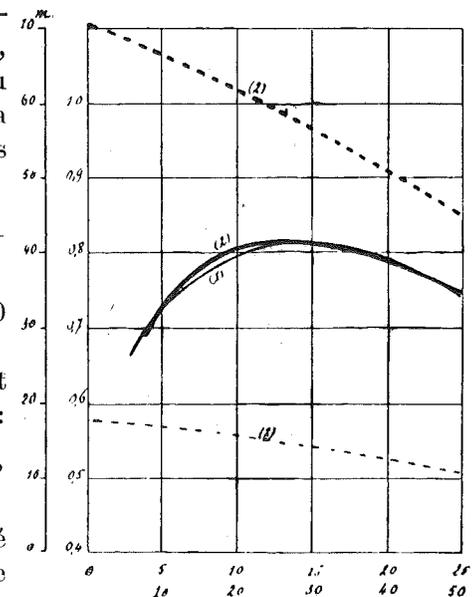


Fig. 17.

Fig. 17, nous avons porté en abscisse, les valeurs du débit Q , et en ordonnées, la hauteur manométrique et le rendement effectif. Nous

avons choisi une échelle des abscisses double, pour la vitesse de 2900 tours.

La courbe (1) correspond à la vitesse de 1450 tours et est identique à la courbe de rendement (2) de la fig. 12 ; la courbe (2) est la courbe de rendement à la vitesse de 2900 tours.

Les courbes en pointillés (1) et (2) donnent la hauteur manométrique à 1450 et 2900 tours. Cette hauteur est, comme on le voit, sensiblement quatre fois plus grande dans le second cas que dans le premier.

On voit que les courbes de rendement se superposent à peu près.

Nous pouvons en conclure :

Que le rendement effectif est sensiblement le même pour toutes les roues identiques tournant à des vitesses différentes, à la condition que les débits à chaque vitesse, soient réglés de manière à être entre eux comme ces vitesses.

Si nous comparons les courbes (2) des fig. 16 et 17, nous voyons que, avec une même vitesse périphérique de 30 m environ, correspondant à la roue de 0^m400 à 1450 tours, ou de 0^m20 à 2900 tours, on obtient sensiblement une même hauteur manométrique et un même rendement, à la condition de prendre un débit quatre fois plus grand pour la première roue que pour la seconde.

Il résulte de cette remarque que :

Pour les débits relativement faibles par rapport à la hauteur de refoulement, 15 à 20 litres par seconde pour des hauteurs de 200 à 250 mètres si nous voulons fixer les idées, il convient d'adopter un nombre de tours aussi grand que possible, soit 2900 tours par minute avec les moteurs à courant triphasé.

EN RÉSUMÉ : Dans les pompes à grand rendement il faut :

- 1) Adopter le type de roue à une ouïe ;
- 2) Adopter un diffuseur à aubes et un angle de 30 à 40° ;
- 3) Choisir pour le calcul du débit et du coefficient manométrique, une valeur $x = 0,2$ au moins ;
- 4) Choisir pour rapport $\frac{l_1}{r_1}$, de la largeur de la roue à la sortie au rayon de celle-ci, une valeur comprise entre 0,1 et 0,15 ;
- 5) Adopter pour les débits relativement faibles la vitesse de rotation la plus grande possible, soit 2900 tours.

§ 12. — Calcul des fuites. — Rendement total.

Nous allons chercher maintenant, à déterminer l'importance des fuites dans les pompes centrifuges à une ou plusieurs roues, et l'influence de ces fuites sur le rendement.

Nous ne tiendrons pas compte des fuites inévitables par les bourrages extérieurs, qui proviennent de ce que, pour éviter les rentrées d'air, on amène l'eau sous pression dans les bourrages par des conduits (*t*) (fig. 2, Pl. 1).

Ces fuites peuvent être réglées de manière à être très faibles, tout en restant suffisantes pour supprimer l'introduction d'air dans la pompe et l'échauffement de l'arbre.

Dans une pompe à une roue, il y a ordinairement deux sections de fuites, par les deux joints existant de part et d'autre de la roue à la hauteur du diamètre extérieur de l'ouïe.

Les formes les plus souvent adoptées pour ces joints sont celles reproduites fig. 18, 19 et 20.

Les jeux e et e_1 peuvent être très faibles lorsqu'il existe un palier de butée ; par contre, dans les pompes à plusieurs roues où l'on dispose sur le bout de l'arbre un

piston destiné à produire l'équilibrage automatique, il faut que l'arbre puisse prendre un mouvement de déplacement axial de 1 à 2 mm. La valeur de e_1 ne peut, dans ce cas, être prise inférieure à 1 ou 1,5 mm.

Le jeu e pour les roues de petit diamètre, ne peut guère descendre en dessous de 1/2 mm.

Le joint de la figure 17 est surtout employé, lorsqu'au lieu d'équilibrer chaque roue séparément, on équilibre la somme des poussées sur chaque roue, par l'action de la pression de l'eau à la dernière roue, sur un piston A convenablement calculé (fig. 3).

Ce joint est plus simple et permet un jeu axial de l'arbre plus grand; mais, à cause de sa longueur, il est nécessaire d'employer, pour éviter des tourbillonnements à l'entrée de la roue, des aubes distributrices d venues de fonderie avec les disques fixes.

Nous calculerons plus loin la valeur relative de ces différents joints.

Cherchons tout d'abord à calculer la vitesse d'écoulement de l'eau à travers le joint, en fonction de la différence des pressions de part et d'autre du joint.

Nous avons vu que la perte de charge, dans un conduit de section constante, était exprimée par la relation

$$T_f = \mu \left(\frac{m}{\sigma'} \right) c^2 s, \quad (\text{formule VI})$$

dans laquelle

μ est le coefficient de frottement,

$\frac{m}{\sigma'}$ le rapport du périmètre à la section,

c la vitesse,

s la longueur du conduit.

En appelant r le rayon moyen du joint, nous aurons pour rapport du périmètre à la section :

$$\frac{m}{\sigma'} = \frac{2(2\pi r)}{2\pi r \times e} = \frac{2}{e},$$

pour la partie où le jeu est e , et

$$\frac{m}{\sigma'} = \frac{2}{e_1},$$

pour la partie où le jeu est e_1 .

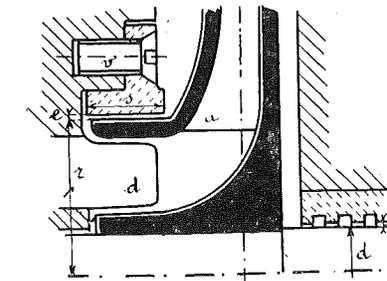


Fig. 18.

Calculons la vitesse pour une différence de pression de part et d'autre du joint, cette différence étant exprimée en mètres d'eau.

Appliquons pour cela la formule IV :

$$\varphi(p_1 - p_0) + h + T_f + \frac{1}{2g}(c_1^2 - c_0^2) = 0.$$

En remarquant que pour l'eau $\varphi = 0,001$, que la différence de niveau de part et d'autre du joint représentée par h dans la formule, est négligeable, enfin que la vitesse initiale peut être considérée comme nulle, il viendra :

$$(p_0 - p_1) = h' = \frac{1}{2g}c_1^2 + T_f,$$

$(p_0 - p_1)$ étant cette fois exprimé en mètres d'eau et non plus en kg par m².

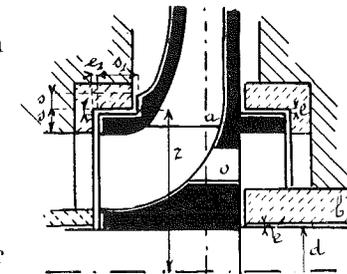


Fig. 19.

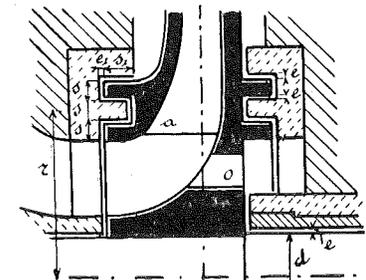


Fig. 20.

A la perte de charge T_f , il convient d'ajouter celle qui résulte de l'orifice en mince paroi à l'entrée, et de la présence des coudes à angles droits; cette perte peut être évaluée à $0,5 \frac{c_1^2}{2g}$ pour l'entrée et pour chaque coude.

Si nous supposons $e = e_1$ pour simplifier les calculs, nous aurons :

1° Pour le joint de la fig. 18 :

$$\boxed{h' = \frac{1}{2g} c_1^2 \left(1 + 0,5 + \mu \frac{2}{e} s \right);} \quad (\text{XXI})$$

2° Pour le joint de la fig. 19 :

$$\boxed{h' = \frac{1}{2g} c_1^2 \left(1 + 0,5 \times 3 + \mu \frac{2}{e} s_2 \right);} \quad (\text{XXII})$$

3° Pour celui de la fig. 20 :

$$\boxed{h' = \frac{1}{2g} c_1^2 \left(1 + 0,5 \times 6 + \mu \frac{2}{e} s_2 \right);} \quad (\text{XXIII})$$

s_2 représentant la longueur totale du joint.

Ces formules ont été vérifiées expérimentalement sur des joints en labyrinthe par M. E. BECKER, et les résultats ont été donnés dans le numéro du 20 juin 1907 du *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*.

Le coefficient μ a été trouvé égal en moyenne à 0,0194 pour des valeurs de e variant entre 0,13 et 0,22 mm. Nous choisirons dans la suite pour valeur de μ :

$$\mu = 0,019.$$

En adoptant pour le joint de la fig. 18.

$$e = 0,5 \text{ mm} \quad s = 20 \text{ mm}$$

$$h' = \frac{1}{2g} c_1^2 (1,5 + 1,52) \text{ soit } h' = 3 \frac{c_1^2}{2g}. \quad (30)$$

Pour le joint de la fig. 19 avec

$$e = e_1 = 0,5 \text{ mm} \quad s = 5 \text{ mm} \quad s_1 = 10 \text{ mm}$$

$$h' = \frac{1}{2g} c_1^2 (2,5 + 1,52) \text{ soit } h' = 4 \frac{c_1^2}{2g}. \quad (31)$$

Enfin avec le joint de la fig. 20 et les dimensions

$$e = e_1 = 0,5 \text{ mm} \quad s_1 = 8 \text{ mm} \quad s = 5 \text{ mm}$$

$$h' = \frac{1}{2g} c_1^2 (4 + 3) \text{ soit } h' = 7 \frac{c_1^2}{2g}. \quad (32)$$

En comparant les formules (30), (31) et (32), on peut conclure que :

Les joints fig. 18 et 19 sont à peu près équivalents, et, dans le cas où le jeu e_1 doit être pris plus grand que e , le joint de la fig. 18 est même supérieur. Par contre le joint en labyrinthe de la fig. 20 comparé aux deux premiers, peut réduire la fuite dans le rapport des vitesses tirées des formules, soit $\sqrt{\frac{3}{7}}$ ou $\sqrt{\frac{4}{7}}$ par conséquent, en moyenne, $\frac{7}{10}$.

Dans les formules précédentes, h' représente la différence des pressions de part et d'autre du joint, c'est-à-dire la hauteur manométrique fournie par la roue sans diffuseur; cette valeur de h' est donc donnée pour chaque valeur de x , par les courbes c_1' , c_2' et c_3' des fig. 8, 9 et 10; il suffira, en effet, de multiplier les valeurs des coefficients manométriques que donnent ces courbes, par le facteur $\frac{u_1^2}{2g}$, pour obtenir h' .

La valeur de la vitesse c_1 dans le joint peut donc être déterminée pour chacune des valeurs de x , en appliquant les formules ci-dessus. Connaissant c_1 , il sera facile de

déterminer la fuite en m^3 par seconde pour chaque joint; nous aurons en représentant par f cette fuite :

$$f = 2\pi r e \times c_1, \quad (XXIV)$$

r et e étant exprimés en mètres.

Dans le cas des pompes centrifuges à une roue, nous aurons pour fuite totale F , lorsqu'il y a deux joints à la même hauteur :

$$F = 2f. \quad (33)$$

Dans les pompes centrifuges à plusieurs roues, il y a lieu de distinguer le cas où chacune des roues est équilibrée séparément et le cas où il y a un piston d'équilibre.

Dans le premier cas, la fuite par roue sera représentée également par $2f$ puisqu'il y aura deux joints à chaque roue; mais, à cette fuite, il faudra ajouter celle qui se produit au joint séparant deux cellules, joint dont le diamètre est égal à celui de l'arbre de la pompe.

La différence des pressions de part et d'autre de ce joint étant égal à H' , hauteur manométrique de refoulement par roue, nous aurons pour calculer la vitesse d'écoulement la relation

$$H' = \frac{c_1}{2g} \left(1,5 + \mu \frac{2}{e} s \right) \quad (34)$$

où μ est égal à 0,019,
 e représente le jeu
 et s la longueur du joint.

Dans le second cas (fig. 18), il n'y aura qu'un joint par roue, et la fuite sera égale à f au lieu de $2f$, de plus la différence de pression de part et d'autre de la paroi séparant deux roues ne sera plus égale à H' , mais à la hauteur manométrique fournie par le diffuseur, hauteur que nous désignerons par h'' et qui n'est qu'une fraction de la hauteur H' .

On peut donc dire que l'influence des fuites sera moindre dans les pompes en série possédant un piston d'équilibre que dans celles dont chacune des roues est équilibrée séparément, à la condition, bien entendu que la perte par le piston d'équilibre ne soit pas trop grande.

Cherchons maintenant à évaluer le rendement total de la pompe en tenant compte des fuites.

Désignons ce rendement par η et envisageons d'abord le cas d'une pompe à une seule roue.

Le débit étant représenté par Q , le débit réel sera représenté par $(Q - F)$. La puissance utilisée sera donc

$$\frac{1000 (Q - F)}{75} H',$$

et la puissance fournie sera

$$N_i + N_o.$$

Nous aurons donc

$$\eta = \frac{1000 (Q - F) H'}{75 (N_i + N_o)},$$

et, d'après ce que nous avons vu précédemment (formule 29)

$$\eta = \left(1 - \frac{F}{Q} \right) \eta_e. \quad (XXV)$$

Dans le cas des pompes à plusieurs roues, comme les roues sont toutes égales, nous aurons la même formule, à la condition de représenter par F la fuite totale par roue qui comprend la fuite par le ou les joints de la roue, et la fuite par le joint séparant deux cellules.

Remarque. — Il y aurait lieu, cependant, pour être tout à fait exact, de tenir compte de la perte de charge dans les canaux ramenant le fluide de l'extrémité d'un diffuseur à l'ouïe de la roue suivante. Si nous repré-

sentons par h cette perte de charge, il est facile de voir que le rendement total pourra s'exprimer, dans ce cas, par

$$\eta = \left(1 - \frac{F}{Q}\right) \left(1 - \frac{h}{H'}\right) \eta_e. \quad (\text{XXVI})$$

APPLICATION. — Recherchons le diagramme du rendement total en fonction du débit de la pompe à une seule roue de 0^m20 tournant à 1450 et à 2900 tours, les proportions étant celles précédemment adoptées et l'angle β_1 étant égal à 30°.

Nous admettrons que le joint choisi soit celui représenté en demi-grandeur fig. 19, que le rayon soit de 0^m042 et que le jeu e soit de 0^m0005. La vitesse c_1 sera donnée dans ces conditions par la formule (31)

$$c_1 = \sqrt{\frac{2gh'}{4}}$$

et la fuite F par la formule :

$$F = 2f = 4\pi r \times e \times c_1.$$

Nous avons dressé les deux tableaux correspondant respectivement à 1450 et 2900 tours. Les valeurs de h' ont été calculées en prenant les coefficients manométriques donnés en fonction de x par la courbe c'_2 de la fig. 9.

Tableau II. — N = 1450

x	η_e	h'	c_1	F	Q	η	
0,0	0,000	8,00	6,25	0,00165	0,0000	0,000	0,000
0,1	0,697	8,70	6,55	0,00173	0,0042	0,410	0,555
0,2	0,780	9,23	6,74	0,00178	0,0084	0,615	0,697
0,4	0,810	9,10	6,67	0,00176	0,0168	0,725	0,768
0,6	0,749	7,57	6,10	0,00161	0,052	0,702	0,725

Tableau III. — N = 2900

x	η_e	h'	c_1	F	Q	η	
0,0	0,000	32,00	12,50	0,00330	0,0000	0,000	0,000
0,1	0,704	34,80	13,10	0,00346	0,0084	0,416	0,563
0,2	0,795	36,92	13,48	0,00356	0,0168	0,627	0,712
0,4	0,801	36,40	13,34	0,00353	0,0334	0,716	0,758
0,6	0,754	30,28	12,20	0,00322	0,0504	0,706	0,730

Nous n'avons tracé fig. 21 que les courbes relatives à la roue tournant à 2900 tours, les courbes fournies par les deux tableaux se superposant sensiblement.

La courbe η_e donne le rendement effectif, la courbe en trait fin le rendement total η , les débits réels étant portés en abscisses.

Ces courbes montrent l'influence des fuites sur le rendement et la nécessité d'employer des dispositions spéciales pour réduire ces fuites au minimum, surtout pour les pompes à faible débit.

On peut préconiser, pour diminuer ces fuites, de réduire le diamètre de l'ouïe ou, ce qui est la même chose, de diminuer le rapport $\frac{r_0}{r_1}$. C'est ce que certains constructeurs font en prenant $\frac{r_0}{r_1} = 0,3$.

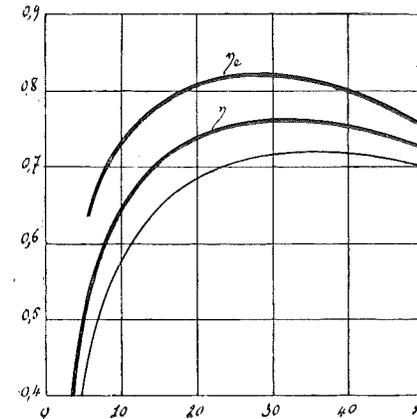


Fig. 21.

Il est probable, il est vrai, que les fuites sont moins importantes que celles trouvées par les formules ci-dessus; le calcul de c_1 par la relation (31) suppose, en effet, que la section de sortie du joint est libre alors que le jet rencontre à angle droit le fluide qui se rend dans la roue; le jet est, par conséquent, brisé, et il doit en résulter une surpression de nature à diminuer la fuite.

Il ne serait guère possible de tenir compte de ce phénomène dans le calcul. Le seul moyen d'évaluer ces fuites, consisterait à procéder expérimentalement en bouchant par un moyen quelconque, la section de sortie de la roue et en amenant dans l'enveloppe de l'eau sous pression. On pourrait faire varier la pression et la vitesse de la roue. D'après les expériences de M. E. Becker, il semble démontrer, en tout cas, que la vitesse de rotation de la roue n'a aucune influence sensible sur les fuites du joint en labyrinthe.

Nous avons, dans la dernière colonne du tableau précédent, donné le rendement total dans l'hypothèse où la fuite ne serait que la moitié de celle calculée par la formule (31) et nous avons, fig. 21, tracé en trait fort la courbe correspondante.

Ces derniers résultats paraissent plus vraisemblables et concordent mieux avec ceux donnés par la pompe Schwartzkopff à 4 roues de diamètre à peu près égal à celui de la roue que nous envisageons, et dont l'ensemble est représenté fig. 3, Pl. 1.

§ 13. — Calcul du rendement de l'installation. Variation du rendement en fonction de la vitesse de rotation pour une hauteur H constante.

Nous avons désigné par H la hauteur de refoulement comprise entre le plan d'eau et l'extrémité du tuyau de refoulement et nous avons appelé rendement indiqué de

l'installation, le rapport $\eta_i = \frac{H}{T_i}$.

En supposant le cas le plus favorable où la conduite est entièrement verticale, sa longueur est de H m et la perte de charge peut être évaluée au moyen de la formule (VI); nous aurons en effet :

$$T_f = \mu \frac{\pi d}{\pi d^2} c_s^2 H = \eta \frac{4}{d} c_s^2 H, \quad (34)$$

c_s désignant la vitesse dans la conduite et d son diamètre.

Or nous avons représenté par H' la hauteur H augmentée des pertes de charge dans la conduite et de la hauteur correspondant à $\frac{1}{2g} c_s^2$, c_s étant la vitesse de sortie.

Entre H et H' , on a donc la relation :

$$H = H' - \left(4 \mu \frac{H}{d} + \frac{1}{2g} \right) c_s^2, \quad (35)$$

et il est facile de voir que

$$\eta_i = \eta'_i \left[1 - \left(4 \mu \frac{H}{d} + \frac{1}{2g} \right) \frac{c_s^2}{H'} \right] \quad (\text{XXIII})$$

La valeur de c_s est comprise ordinairement entre 1^m50 et 2 m quand la pompe donne son débit normal.

On peut donc déduire de la formule la valeur de η_i et, par conséquent, celle du rendement total de l'installation :

$$\eta = \eta_i \times \eta_o \left(1 - \frac{F}{Q} \right) \quad (36)$$

Une question intéressante est celle qui consiste à rechercher la variation du rendement en fonction du nombre de tours, d'une pompe refoulant sur une conduite de hauteur constante H .

Calculons c_s en fonction de x et de u_1 ; nous savons que le débit Q est donné par la relation

$$Q = 2\pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s_1 + e_1} \sin \beta_1 x u_1, \text{ (formule 27)}$$

et que entre c_s et Q on a l'égalité :

$$Q - F = \frac{\pi d^2}{4} c_s. \quad (37)$$

La valeur de F , nous l'avons vu, est proportionnelle à la vitesse d'écoulement à travers joint, vitesse qui est elle-même proportionnelle à la racine carrée de la hauteur. Or cette hauteur est égale au produit de $\frac{u_1^2}{2g}$ par le coefficient manométrique de la roue. Les fuites F sont donc proportionnelles à u_1 .

Si nous désignons donc par F_1 , la fuite à la vitesse périphérique normale que nous désignerons par u_1' , nous aurons, pour une vitesse quelconque

$$F = F_1 \times \frac{u_1}{u_1'}$$

En substituant à F cette valeur, dans la relation (37), et en éliminant Q entre cette relation et la précédente, il viendra :

$$c_s = \frac{4u_1}{\pi d^2} \left(2\pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s_1 + e_1} \sin \beta_1 x - \frac{F_1}{u_1'} \right) \quad (38)$$

Posons :

$$\frac{4}{\pi d^2} \times 2\pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s_1 + e_1} \sin \beta_1 = k_1 \quad (39)$$

$$\frac{4 F_1}{\pi d^2} \times \frac{1}{u_1'} = k_2, \quad (40)$$

et remplaçons c_s par sa valeur, dans la relation (35);

Nous aurons :

$$H = H' - \left(4\mu \frac{H}{d} + \frac{1}{2g} \right) (k_1 x - k_2)^2 u_1^2.$$

Multiplions tous les termes par $2g$ et divisons-les par u_1^2 ; posons en outre

$$2g \left(4\mu \frac{H}{d} + \frac{1}{2g} \right) = k';$$

il viendra :

$$\frac{2g H}{u_1^2} = \frac{2g H'}{u_1^2} - k' (k_1^2 x^2 - 2k_1 k_2 x + k_2^2).$$

En substituant à $\frac{2g H'}{u_1^2}$ la valeur donnée par la formule (XIII) il restera une relation fonction de x , H , u_1^2 , et des coefficients précédemment adoptés :

$$\boxed{(b + \psi'^2 - n^2 - 2k' k_1^2) \frac{2g H}{u_1^2} - x(\psi'^2 \cos \beta_1 - m n \cos \beta_0) - k' k_1 k_2 x + (a + \psi'^2 - m^2) - \frac{2g H}{u_1^2} + k' k_2^2 = 0} \quad (\text{XXIV})$$

Ainsi H étant constant, il nous sera possible de déterminer la valeur de x et par conséquent celle de rendement qui correspond à une vitesse périphérique donnée.

APPLICATION. — Déterminons en fonction du nombre de tours, le rendement de la pompe de 0^m20 de diamètre, l'angle de sortie β_1 étant de 30°, et les proportions de la roue étant celles précédemment adoptées.

Nous supposons que la conduite de refoulement ait un diamètre de 0^m10, et nous admettrons un coefficient μ assez élevé

$$\mu = 0,0004.$$

Pour un débit de 50 m³, soit 13,9 litres par seconde, et une conduite de refoulement de 60 m., la perte de charge est de

$$T_f = 0,0004 \times \frac{4}{0,1} \times \overline{1,85^2} \times 60 = 3^m30$$

Si nous admettons que les fuites ne sont que la moitié

de celles indiquées au tableau III, le débit Q correspondant au débit réel de 13,9 sera de

$$13,9 + 1,75 = 15,65.$$

Au débit Q de 15,65 correspond une hauteur manométrique donnée par la courbe (2, fig. 17, de 64 m. La hauteur H devra donc être prise égale à (64 - 3,3) ou 60^m70, si l'on veut obtenir le débit de 50 m³ à l'heure.

Calculons les valeurs de k_1 , k_2 et k' :

$$k_1 = 0,35 \quad k_2 = 0,0073 \quad k' = 19,7$$

D'où

$$k'k^2 = 2,41 \quad k'k_1k_2 = 0,0504 \quad k'k_2^2 = 0,00105.$$

D'après les calculs faits au § 9, pour la détermination du rendement indiqué :

$$\begin{aligned} b + \psi'^2 - n^2 &= -0,650, \\ 2(\psi'^2 \cos \beta_1 - mn \cos \beta_0) &= 0,588, \\ a + \psi'^2 - m^2 &= 0,49, \end{aligned}$$

L'équation (XXIV) pourra s'écrire dans le cas particulier que nous examinons :

$$3,06x^2 + (0,588 - 0,108)x - 1,49 + \frac{1190}{u_1^2} - 0,00105 = 0 \quad (41)$$

En nous donnant des valeurs successives du nombre de tours N, nous pourrions calculer les valeurs de u_1 correspondantes, et déduire de l'équation (41) les valeurs de x .

Pour trouver la valeur de x pour laquelle le débit réel est nul, il nous suffira d'égaliser à zéro la valeur de c_s donnée par l'équation (35).

On trouve ainsi $x = 0,02$ environ.

Les résultats obtenus sont consignés au tableau (IV) ci-dessous.

Nous avons déterminé Q par la formule (27) qui peut s'écrire, dans le cas particulier que nous examinons :

$$Q = 0,00274 u_1 x \quad (42)$$

Pour le calcul de (Q - F), nous avons pris la valeur de 1,75 à 2900 tours, et, pour les valeurs plus grandes ou plus petites, nous avons appliqué la formule établie plus haut :

$$F = F_1 \frac{u_1}{u_1'}$$

u_1' désignant la vitesse périphérique à 2900 tours.

Tableau IV.

N	α	Q	Q - F	η
2710	0,021	0,00163	0,000	0,000
2750	0,076	0,00600	0,00434	0,450
2800	0,130	0,01050	0,00884	0,617
2900	0,186	0,01550	0,01380	0,700
3000	0,248	0,02140	0,01950	0,735
3200	0,304	0,0279	0,02600	0,755

Les rendements correspondant à (Q - F) ont été trouvés sur le diagramme de la figure 21 (courbe η).

Nous avons porté fig. 22, en abscisse le nombre de tours, en ordonnée le rendement total de la pompe et le débit (courbe pointillée).

La courbe du rendement montre que pour une variation très faible du nombre de tours, 7% en moins du nombre de tours normal, la pompe ne débite plus; l'eau se maintient dans la colonne de refoulement, à une certaine

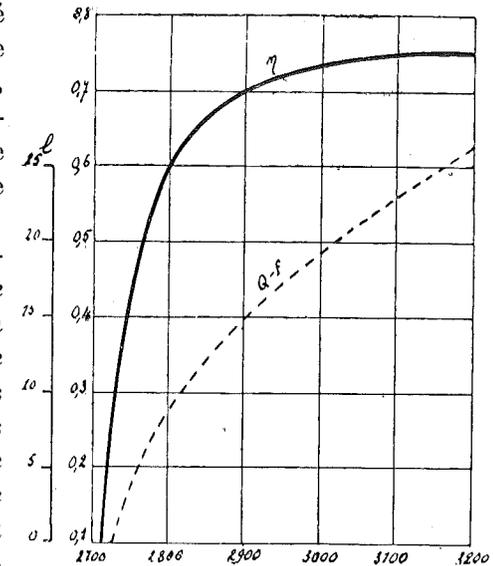


Fig. 22.

hauteur, à la manière dont l'eau se maintient dans un tube de Pitot.

Lorsque la pompe a été calculée pour fonctionner normalement aux environs du coude de la courbe du rendement, toute variation très faible du nombre de tours amène une diminution très considérable de l'effet utile. Le tableau montre que, dans notre cas, pour une valeur de x inférieure à 0,2, ce défaut est accentué.

CONCLUSION. — Lorsque les variations de vitesse sont à craindre et que les fuites sont relativement importantes, il est nécessaire de choisir pour x une valeur voisine de 0,4.

Comme nous le montrerons au chapitre III, le diamètre et le nombre de roues, par conséquent le prix de la pompe, dépendent de la valeur de x que l'on adopte.

Remarque. — Lorsque la pompe débite peu, le fluide ne coule plus à plein jet dans le diffuseur et il tend à se produire des remous à la sortie et des chocs contre les aubes de la roue, chocs qui augmentent la puissance absorbée par le mouvement de celle-ci et qui diminuent le rendement du diffuseur. Il en résulte que le rendement total diminue plus rapidement que ne l'indique la formule et que la courbe que nous venons de tracer d'après le calcul est, dans la réalité, encore plus plongeante.

CHAPITRE III.

§ 14. Calcul des dimensions principales des pompes centrifuges.

1° Pompe pour grand débit et faible hauteur de refoulement.

Le problème peut se poser comme suit :

Déterminer les dimensions d'une pompe capable de débiter 360 m³ par heure à la hauteur totale de 10 m., pertes de charge comprises.

Nous distinguerons deux cas : a) celui où la pompe doit être avant tout simple, robuste, peu encombrante, le rendement étant un élément secondaire.

b) celui où il s'agit de l'installation permanente d'une pompe devant fonctionner d'une manière continue et où, par conséquent, le rendement doit être aussi élevé que possible.

PREMIER CAS. — Dans le premier cas nous choisirons le type représenté fig. 1, Pl. 1 à deux ouïes et sans diffuseur ; nous pourrons, dès lors, considérer très sensiblement la valeur de ψ' coefficient relatif au diffuseur, comme nul.

Des conclusions que nous avons indiquées au § 9, il résulte qu'il convient dans ce cas, de choisir une valeur de β_1 voisine de 12°.

D'autre part, au point de vue des frottements du fluide dans la roue, on peut considérer une roue à deux ouïes dont la largeur de sortie est égale à $2l_1$ comme constituée par deux roues à une ouïe dont la largeur de sortie est égale à l_1 . Si nous supposons que nous adoptons pour le tracé de la roue les proportions

$$\frac{r_0}{r_1} = 0,4 \quad r_1 = 0,1 l_1 \quad \frac{l_0}{l_1} = 1,75,$$

le rendement indiqué et la hauteur manométrique seront données par les courbes r_1 et c'_1 de la figure 8.

Entre la hauteur manométrique H' et le coefficient manométrique que nous désignerons par c'_1 , on a la relation :

$$H' = \frac{u_1^2}{2g} c'_1 \quad (43)$$

D'autre part, le débit est donné par la relation (27) à la condition de remplacer l_1 par $2l_1$, puisqu'il s'agit ici d'une pompe à deux ouïes :

$$Q = 4\pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s_1 + e_1} \sin \beta_1 x u_1 \quad (44)$$

Enfin entre r_1 , u_1 et le nombre de tours N , il existe la relation :

$$\frac{2 \pi r_1 N}{60} = u_1. \quad (45)$$

Si le nombre de tours n'est pas imposé, nous pourrions choisir la valeur de x ; puisque nous avons vu que la valeur de 0,5 correspond au maximum de rendement, nous adopterons celle-ci; du diagramme fig. 8 nous déduirons le coefficient manométrique c'_1 correspondant, soit 0,6.

Comme H' doit être égal à 10 m, nous aurons l'équation :

$$10 = \frac{u_1^2}{2g} \times 0,6.$$

D'où la valeur de u_1 ,

$$u_1 = 18^m 08.$$

En substituant cette valeur dans la relation 45, nous pourrions tirer r_1 en fonction de N :

$$r_1 = \frac{60 u_1}{2 \pi N} = \frac{1085}{2 \pi N}.$$

Comme $l_1 = 0,1 r_1$ par hypothèse, et que nous pouvons prendre $\frac{s_1}{s_1 + e_1} = 0,84$, valeur déterminée par le tracé des aubes d'une roue d'angle $\beta_1 = 12^\circ$, le débit Q sera égal à

$$Q = 4 \pi \times 0,1 r_1^2 \times 0,84 \times 0,208 \times 0,5 \times 18,08 = 1,988 r_1^2,$$

ou encore, en remplaçant r_1 par sa valeur ci-dessus :

$$Q = \frac{59200}{N^2}.$$

Or Q représente le débit en mètres cubes par seconde ;

il est donc égal $\frac{360}{3600} = 0,1$ dans notre cas ; par conséquent :

$$N = \sqrt{\frac{59200}{0,1}} = 770$$

et

$$r_1 = 0^m 224.$$

Si le nombre de tours est imposé et si nous supposons

$$N = 725,$$

voici comment nous pourrions procéder. De la relation (45) nous déduirons :

$$r_1 = \frac{60 \times u_1}{2 \pi \times 725} = \frac{0,0828}{2 \pi} u_1,$$

et, en substituant cette valeur à r_1 dans la relation (44), nous obtiendrons :

$$Q = \frac{0,0828^2}{\pi} \times 0,1 \times \frac{s_1}{s_1 + e_1} \sin \beta_1 \times u_1^3 = 0,0000381 \times u_1^3.$$

$$\left(\frac{s_1}{s_1 + e_1} = 0,84, \sin \beta_1 = 0,208 \right)$$

Comme Q doit être égal à 0,1

$$x u_1^3 = 2630 \quad (46)$$

Il reste à choisir par tâtonnements, la valeur de x de telle manière que le coefficient c'_1 étant introduit dans la relation (43) :

$$10 = \frac{u_1^2}{2g} c'_1,$$

on obtienne la même valeur u_1 que par l'équation (46) ci-dessus.

Avec $x = 0,45,$	$c'_1 = 0,64$ (fig. 8)
$u_1 = 17,50$	$x u_1^3 = 2410$ au lieu de 2630.
Avec $x = 0,47,$	$c'_1 = 0,625$
$u_1 = 17,70$	$x u_1^3 = 2600$ au lieu de 2630.

Nous pourrions donc choisir

$$u_1 = 17,70 \quad \text{et} \quad r_1 = 0^m233.$$

Ainsi pour le cas où $N = 725$ tours, les dimensions seront les suivantes :

Diamètre de la roue $2 r_1$	0^m465
Largeur de la roue $2 l_1$	0^m046
Diamètre extérieur de l'ouïe $2 r$	0^m186

puisque nous avons adopté :

$$l_1 = 0,1 r_1, \quad \frac{r_0}{r_1} = 0,4.$$

La fig. 1, Pl. 1 donne le tracé d'une telle roue à l'échelle de 1/10.

Le calcul de l'angle d'entrée β_0 peut se faire au moyen de la relation (22).

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{0,47}{0,16} \times 0,57 \times 0,208 = 0,348$$

$$\text{D'où} \quad \beta_0 = 19^\circ$$

Sur la fig. 1 l'angle choisi est de 25° ; nous avons adopté une valeur un peu plus grande pour ne pas trop réduire la section des canaux à l'entrée; il en résultera naturellement des chocs plus importants de nature à diminuer le rendement. Nous avons effectué le tracé avec 8 aubes; mais il semble qu'il serait préférable de n'adopter que 6 ou 7 aubes.

Il nous reste à calculer le rendement et la puissance absorbée par la pompe.

Le rendement indiqué donné par la courbe r'_1 de la fig. 8 est égal à

$$\eta_i' = 0,62.$$

La puissance indiquée est égale à la puissance utilisée

$$\frac{1000 Q H'}{75} \text{ divisée par } \eta_i'.$$

On a donc

$$N_i = \frac{1000 \times 0,1 \times 10}{75 \times 0,62} = 21,5 \text{ chevaux environ.}$$

La puissance absorbée par les frottements des deux faces de la roue contre l'eau, sera donnée par la formule (XVII)

$$N_f = 0,00543 u_1^3 r_1^2 = 1,65.$$

La puissance absorbée par le frottement de l'arbre dans les boîtes à bourrages et les paliers, est donnée par la formule (XVIII) :

$$N_f' = 2,8 d^3 N = 0,25,$$

si nous prenons $d = 0^m05$. Comme cette formule suppose que l'arbre tourne dans des paliers bien graissés et que la roue est ordinairement portée ici par les boîtes à bourrage, nous prendrons $N_f' = 0,5$.

Le rendement organique sera donc de

$$\eta_0 = \frac{N_i}{N_i + N_0} = \frac{21,5}{21,5 + 2,15} = 0,91 \text{ environ,}$$

et le rendement effectif de

$$\eta_e = \eta_i' \times \eta_0 = 0,62 \times 0,91 = 0,564$$

Avec un joint simple de 20 mm de longueur et un jeu de 1 mm entre le bord de la roue et la partie fixe (fig. 1, Pl. 1) nous pourrions adopter, pour calculer la fuite, la formule (31)

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 g h'}{3}} = \sqrt{\frac{2g \times 10}{3}} = 8 \text{ m;}$$

et nous aurons pour fuite totale

$$F = 2 f = 2\pi r_0 \times 0,001 \times 8 = 0,00935.$$

Le rendement total sera donc de

$$\eta = \left(1 - \frac{F}{Q}\right) \eta_e = 0,512,$$

et la puissance totale sera d'environ

$$\frac{1000 Q H'}{75 \times \eta} = 26 \text{ chevaux,}$$

Remarque. — Dans la plupart des pompes destinées aux installations provisoires de travaux hydrauliques, par exemple, on remplace, comme nous l'avons dit, le canal c de la fig. 1, par un canal en volute tel que celui de la fig. 2. Grâce à cette disposition, une grande partie de l'énergie cinétique est récupérée et le rendement est augmenté.

Il serait, cependant, difficile d'établir par le calcul la valeur de ψ' qui correspond à cette hypothèse.

Seuls des essais sur une pompe de ce genre permettraient d'être fixé à cet égard.

DEUXIÈME CAS. — *Etudions, maintenant, une pompe à grand rendement destinée à refouler, comme la précédente, 360 m³ d'eau par heure, à une hauteur de 10 m, pertes de charge comprises.*

Nous adopterons le type avec diffuseur à aubes représenté fig. 2, Pl. 1; mais nous choisirons pour largeur de la roue à la sortie la valeur

$$l_1 = 0,2 r_1$$

et pour rapport entre l_1 et l_0

$$l_0 = 1,2 l_1$$

Nous supposerons que le nombre de tours imposé soit de 725.

D'après les conclusions précédemment émises, l'angle β_1 qu'il convient d'adopter, est compris entre 30 et 45°.

Nous choisirons $\beta_1 = 30^\circ$ et nous déterminerons la courbe de rendement indiqué et la courbe de hauteur manométrique en fonction de x .

Pour cela, nous calculerons d'abord au moyen des formules VII et IX, les valeurs de φ et de ψ :

$$\begin{aligned} \varphi &= 0,963 \\ \psi &= 0,850 \end{aligned}$$

Au moyen des mêmes formules, nous déterminerons φ et ψ correspondant aux diffuseurs; puis, par la relation (XII), nous pourrions trouver ψ' :

$$\psi' = 0,927.$$

Ces coefficients étant déterminés, nous pourrions calculer

$$\frac{2gH'}{u_1^2} \quad \text{et} \quad \frac{gT_i}{u_1^2} \quad (\text{formules XIII et 17})$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 1,54 - 0,31x - 0,43x^2$$

$$\frac{gT_i}{u_1^2} = 0,84 - 0,276x.$$

En faisant le rapport de ces deux valeurs, et en divisant le résultat par 2, nous avons obtenu le rendement indiqué

$$\eta_i = \frac{H'}{T_i}.$$

Les résultats ont été portés en diagramme fig. 23.

Pour déterminer le diamètre de la roue, il nous suffira de procéder par tâtonnements comme dans le cas précédent, en nous servant du diagramme du coefficient manométrique que nous venons de tracer.

Nous avons trouvé

$$r_1 = \frac{0,0828}{2\pi} u_1,$$

lorsque $N = 725$.

D'autre part

$$Q = 2 \pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s + e_1} \sin \beta_1 x_1 u_1,$$

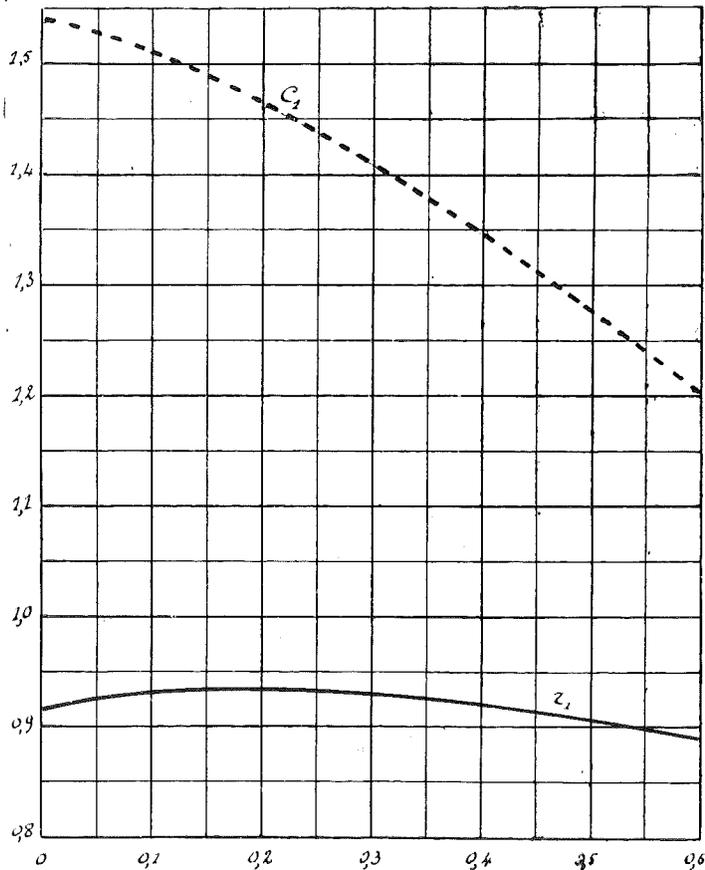


Fig. 23.

ou en remplaçant

$$l_1 \text{ par } 0,2 r_1, \frac{s_1}{s + e_1} \text{ par } 0,87 \text{ et } \sin \beta_1 \text{ par } 0,5$$

$$Q = \frac{0,0828}{2 \pi} \times 0,2 \times 0,87 \times 0,5 \times x u_1^3 = 0,000095 x u_1^3.$$

Comme $Q = 0,1$, on tire de là

$$x u_1^3 = 1051.$$

La hauteur manométrique devant être égale à 10 m,

$$10 = \frac{u_1^2}{2g} c_1.$$

Avec	$x = 0,4$	$c_1 = 1,347$	
	$u_1 = 12,07$	$x u_1^3 = 703$	au lieu de 1051
Avec	$x = 0,5$,	$c_1 = 1,275$	
	$u_1 = 12,41$	$x u_1^3 = 956$	au lieu de 1051
Avec	$0,55$,	$c_1 = 1,24$	
	$u_1 = 12,59$	$x u_1^3 = 1097$	au lieu de 1051

Nous pourrions adopter

$$u_1 = 12,50$$

et par conséquent

$$r_1 = 0^m165.$$

Les dimensions seront donc les suivantes :

Diamètre de la roue	$2 r_1$	0^m330
Largeur de la roue	$l_1 = 0,2 r_1$	0^m033
Diamètre extérieur de l'ouïe		0^m132

Le calcul de l'angle d'entrée β_0 peut se faire au moyen de la relation (22)

$$\text{tg } \beta_0 = \frac{0,55}{0,66} \times \frac{1}{1,2} \times 0,5 = 1,42,$$

$$\beta_0 = 55^\circ.$$

Le rendement indiqué donné par le diagramme est de 0,9 et comme la puissance en chevaux recueillie est de

$$\frac{1000 Q H'}{75} = \frac{1000 \times 0,1 \times 10}{75} = 13,33,$$

la puissance indiquée sera égale à

$$N_i = \frac{13,33}{0,9} = 14,8.$$

La puissance absorbée par les frottements pourra être déterminée comme précédemment :

$$N_f = 0,3$$

$$N'_f = 0,25$$

$$N_o = 0,60 \text{ environ}$$

et par conséquent

$$\eta_o = \frac{14,8}{14,8 + 0,6} = 0,962$$

$$\eta_e = 0,866.$$

Avec un joint simple de 20 mm de longueur, nous pourrions adopter, pour calculer la fuite, la formule (30)

$$c_1 = \sqrt{\frac{2g h'}{3}}.$$

La valeur de h' étant ici égale à environ 0,65 H' , nous aurons

$$c_1 = 6,5,$$

et en supposant un jeu de 1 mm,

$$F = 2f = 2 \times 2\pi r_o \times 0,001 \times 6,5 = 0,00538.$$

Le rendement total sera donc

$$\eta = \left(1 - \frac{F}{Q}\right) \eta_e = 0,82$$

et la puissance totale

$$N = \frac{1000 \times 0,1 \times 10}{75 \times \eta} = 16,25 \text{ chevaux.}$$

Ce résultat de 0,82 a été atteint et dépassé dans les pompes à grand débit avec diffuseur.

Remarque. — Nous avons dû, pour pouvoir résoudre le problème, choisir une valeur de x plus grande que 0,4 c'est-à-dire plus grande que celle qui correspond au maximum de rendement. Cela tient à ce que le nombre

de tours est trop élevé relativement à la hauteur et au débit imposés.

Evidemment, on pourrait augmenter la largeur de la roue à la sortie; mais il faudrait dans ce cas, pour conserver le rapport entre l_1 et l_o qui est déjà faible, augmenter le rayon extérieur de l'ouïe.

Or, il est évident que plus le rayon extérieur de l'ouïe est grand, plus il est difficile, *sans distributeur*, de réaliser les conditions théoriques de fonctionnement qui supposent que les filets fluides entrent dans l'aubage, avec une vitesse absolue radiale. De plus, la section de fuite est encore augmentée.

Pour éviter des chocs et des tourbillonnements importants à l'entrée, il convient en tout cas, lorsque le nombre de tours imposés conduit à accroître le rayon extérieur de l'ouïe, d'adopter *un distributeur à aubes*.

Ce qui est nécessaire de vérifier, c'est le rapport

$$n = \frac{\omega_o}{\omega_1},$$

qui ne doit pas dépasser 1,5 ou 2. En effet, la valeur ω_o étant plus du double de ω_1 , on peut craindre que la diminution de la vitesse ne se produise pas et qu'ainsi le fluide ne coulant plus dans les canaux à plein jet, il ne se produise des tourbillonnements importants.

La solution avec distributeur à l'entrée a été réalisée pour certaines pompes à grand débit et l'on a signalé le résultat extraordinaire de 90 % de rendement obtenu dans ces conditions.

2° Pompe pour faible débit et grande hauteur de refoulement.

Prenons comme exemple, le calcul d'une pompe capable de refouler 50 m³ à la hauteur utile de 300 m.

Le nombre de tours doit être en raison du faible débit, choisi aussi élevé que possible. Nous adopterons 2900 tours.

La hauteur manométrique pourra être déduite de la formule (35), H étant égal à 300 m et μ étant le coefficient de frottement relatif à la conduite.

Si les coudes dans la conduite sont nombreux et les parties horizontales importantes, il faudra ajouter les pertes de charge relatives à ces parties.

Nous ferons observer qu'il est très important d'évaluer ces pertes avec une très grande approximation, afin que la pompe fonctionne dans les conditions prévues par le calcul.

Pour notre cas, nous nous contenterons de prendre pour perte de charge la valeur déterminée § 13, pour un débit de 50 m³ et une conduite de 0,10 de diamètre et de 60 m de longueur; nous avons trouvé 3^m30 ce qui donne pour N'

$$N' = 5 \times 3,3 + 300 = 316,50,$$

puisque la conduite est de 300 mètres au lieu de 60.

Des conclusions émises au chapitre III, il résulte qu'il convient d'adopter, dans le cas que nous étudions, une pompe avec diffuseur à aubes, un angle de sortie β_1

d'environ 30°, un rapport $\frac{l_1}{r_1} = 0,1$, un rapport $\alpha = 0,2$

au moins. Dans ces conditions la valeur du coefficient manométrique sera donnée par la courbe c_2 de la fig. 9, et en désignant ce coefficient par c_2 et le nombre de roues de la pompe par n' , il viendra :

$$H' = \frac{u_1^2}{2g} \times c_2 \times n'; \quad (47)$$

c_2 étant égal à 1,34,

$$H' = 1,34 \times \frac{u_1^2}{2g} \times n'.$$

D'autre part la relation

$$Q = 2 \pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s_1 + e_1} \sin \beta_1 \alpha u_1$$

peut s'écrire avec nos hypothèses, et en supposant

$$\frac{s_1}{s_1 + e_1} = 0,87$$

$$Q = 0,0547 r_1^2 u_1;$$

comme nous savons que Q doit être égal à $\frac{50}{3600}$ et que

$$\frac{2 \pi r_1 N}{60} = u_1, \quad (48)$$

nous pourrions déterminer r_1 et u_1 , puis en substituant à u_1 la valeur ainsi trouvée, dans l'équation (47), obtenir le nombre de roues n' .

$$r_1 = 0,00329 u_1$$

$$u_1 = 28^m65$$

$$n' = 5,64$$

Adoptons pour n' successivement 5 et 6, et calculons les dimensions et le rendement dans chacun des cas, comme nous l'avons fait dans les exemples déjà traités.

En remplaçant n' par 5 dans l'équation (47), on a :

$$\frac{316,5}{5} = 63,3 = \frac{u_1^2}{2g} c_2 \quad (49)$$

D'autre part, la valeur r_1 tirée de la relation (48) étant introduite dans la relation :

$$Q = 2 \pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s_1 + e_1} \sin \beta_1 \alpha u_1,$$

il vient

$$Q = \frac{1}{10^6} \times 2,97 \alpha u_1^3.$$

D'où

$$\alpha u_1^3 = 4667 \quad (50)$$

Comme précédemment, il nous suffira donc de chercher par tâtonnements les valeurs de u_1 et de α qui vérifient les deux équations (49) et (50).

$$\begin{aligned} \text{Pour } x &= 0,18 & c_2 &= 1,35 \text{ (courbe } c_2 \text{ fig. 9)} \\ u_1 &= 30,4 & x u_1^3 &= 5050 \text{ au lieu de 4667} \\ \text{Pour } x &= 0,165 & c_2 &= 1,36 \\ u_1 &= 30,3 & x u_1^3 &= 4600 \text{ au lieu de 4667} \end{aligned}$$

Nous pourrions donc l'adopter

$$u_1 = 30,35 \quad \text{soit} \quad r_1 = 0^m10$$

Il conviendrait peut-être de s'assurer si, en tenant compte des fuites, pour l'évaluation du débit Q , les résultats ne seraient pas sensiblement modifiés.

Ainsi, dans l'hypothèse où nous adoptons 5 roues, ces roues devront avoir 0^m20 de diamètre.

Le rendement total sera donné par le diagramme fig. 20, la courbe en trait fort ayant été calculée dans cette hypothèse.

Le débit réel en litres par seconde étant ici de 13,9, nous trouvons :

$$\eta = 0,70$$

La puissance totale de la pompe sera donc de

$$\frac{1000 Q H'}{75 \times \eta} = 89,5 \text{ chevaux,}$$

Q étant égal à $13,9 + 1,75 = 15^{\text{lit.}}65$ ou $0^m501565$.

En supposant $n' = 6$ l'équation (39) devient :

$$\frac{316,5}{6} = 52,7 = \frac{u_1^2}{2g} c_2. \quad (51)$$

L'équation (48) restant la même, il nous suffira de chercher par tâtonnements les valeurs de u_1 et de x qui vérifient simultanément l'équation (48) et l'équation (51).

$$\begin{aligned} \text{Pour } x &= 0,22 & c_2 &= 1,325 \\ u_1 &= 27,9 & x u_1^3 &= 4940 \text{ au lieu de 4667} \\ \text{Pour } x &= 0,21 & c_2 &= 1,335 \\ u &= 27,8 & x u_1^3 &= 4510 \text{ au lieu de 4667} \end{aligned}$$

Nous pourrions donc adopter

$$u_1 = 27,85 \quad \text{soit} \quad r_1 = 0^m092.$$

Dans l'hypothèse où nous adoptons 6 roues, ces roues devront avoir 0^m184 de diamètre.

Le rendement indiqué sera de 0,9. Le rendement organique pourra s'évaluer au moyen de la formule

$$\eta_0 = \frac{N_i}{N_i + N_0},$$

en remarquant que : 1°

$$N_i = \frac{1000 Q \times H'}{75 \times \eta_i} = 68,4,$$

si nous prenons pour Q la valeur de 0^m30139 augmentée des fuites que nous évaluerons à priori à 0^m5015 , et que : 2°

$$N_0 = 6 (N_f + N'_f).$$

Calculons N_f par la formule (XVII)

$$N_f = 0,99$$

et ajoutons-y la puissance absorbée par le frottement des bords de la roue dont nous supposons l'épaisseur égale à 5 mm; N_f sera égal à

$$N_f = 0,99 + 0,29 = 1,28.$$

Adoptons pour N'_f la valeur 0,22 que nous avons admise dans le calcul du rendement de la roue de 0^m20 de diamètre tournant à 2900 tours. Nous aurons

$$\eta_0 = \frac{68,4}{68,4 + 9} = \frac{68,4}{77,4} = 0,884$$

et par conséquent

$$\eta_e = \eta_0 \times \eta_i' = 0,796$$

La vitesse d'écoulement à travers le joint étant donnée par la relation (31)

$$c_1 = \sqrt{\frac{2gh'}{4}} = \sqrt{\frac{2g \times 33,2}{4}} = 12,80,$$

la fuite sera égale à

$$2f = 4\pi r \times e \times c_1 = 0,00298$$

dans l'hypothèse où chaque roue est équilibrée et où le jeu e est égal à $1/2$ mm.

Comme nous avons admis dans le calcul de rendement de la roue de 0^m200 que la fuite n'était que de la moitié de celle donnée par la formule, nous ferons la même hypothèse ici, et nous aurons, dans ces conditions :

$$\eta = \left(1 - \frac{F}{Q}\right) \eta_e = \left(1 - \frac{0,00149}{0,01539}\right) \eta_e = 0,72,$$

Q étant égal à $\frac{50}{3600}$ ou 0^m30139 augmenté des fuites $0^m300149$.

On voit que le rendement est augmenté de 2 % en adoptant 6 roues au lieu de 5. Si les fuites étaient deux fois plus importantes, nous aurions trouvé pour rendement total dans le premier cas 0,632 et dans le second cas 0,662 soit 3 % en plus.

Avec $n' = 5$, la valeur de $x = 0,168$; avec $n' = 6$, la valeur de $x = 0,21$.

Il y a donc intérêt, au point de vue du rendement, à adopter une valeur de x plus élevée; mais aussi, à mesure que l'on adopte une valeur plus élevée pour x , le nombre de roues augmente et, avec le nombre de roues le prix de la pompe.

Remarque. — Si nous cherchons à résoudre le problème en supposant que le nombre de tours imposé soit

1450 par minute, en adoptant comme précédemment $x = 0,2$, $\beta_1 = 30^\circ$:

$$H' = 1,34 \frac{u_1^2}{2g} \times n',$$

$$Q = 0,0547 r_1^2 u_1,$$

$$r_1 = 0,00658 u_1.$$

D'où, en remplaçant Q par sa valeur et en éliminant r_1 entre les deux dernières équations

$$u_1 = 18^m00$$

et, par conséquent

$$n' = 14 \text{ roues environ}$$

$$r_1 = 0^m12 \text{ environ.}$$

On voit toute l'importance qu'il y a d'adopter un nombre de tours aussi élevé que possible quand le débit est relativement faible.

Nous croyons avoir suffisamment fait ressortir par les exemples que nous venons de traiter, les difficultés particulières que l'on rencontre dans le calcul des dimensions des pompes centrifuges à haute pression, l'impossibilité de trouver une solution pratique lorsque le débit est faible par rapport à la hauteur, et que le nombre de tours ne peut pas être choisi égal à 2900.

Comme la valeur de x ne peut dans ce cas être prise plus grande que 0,20 à 0,25, l'angle α_1 de sortie est toujours faible, la vitesse absolue de sortie très grande et le tracé de diffuseur assez délicat pour donner un bon résultat.

Conclusions.

Nous croyons nécessaire en terminant cette étude, d'insister sur la portée de la théorie que nous venons d'exposer et qui est, croyons-nous, la plus complète de toutes celles qui ont été proposées.

Devant un ensemble de calculs, que nous avons cherché à présenter avec ordre, mais qui ne s'en trouve pas moins important, on peut se demander si l'effort fait pour établir de telles déductions et l'effort à faire pour se les assimiler, restent bien en rapport avec le résultat obtenu.

A cette objection, nous répondrons que, à part la méthode expérimentale de détermination des dimensions qui repose toute entière sur le relevé expérimental des courbes caractéristiques, aucune des méthodes proposées ne peut servir au calcul des pompes centrifuges à haute pression. Il nous suffira de rappeler que, pour trouver la hauteur de refoulement, la plupart des auteurs se contentent de poser

$$H = 0,65 \text{ à } 0,70 \times T_i,$$

c'est-à-dire qu'ils multiplient le travail indiqué correspondant à 1 kg de fluide débité par le rendement total obtenu dans des pompes de même système, soit 0,65 à 0,70 : une telle méthode est purement empirique, car le rendement total dépend non seulement de la hauteur de refoulement, mais encore des frottements de la roue contre le fluide, des frottements de l'arbre dans ses paliers, enfin des fuites.

Or, pour les pompes à grande hauteur de refoulement et à grand rendement, il importe au plus haut point, que les dimensions soient déterminées très exactement *a priori*, si l'on ne veut s'exposer au moment des essais, à de très graves mécomptes.

La méthode de calcul que nous proposons permet de résoudre, avec une exactitude très suffisante, le problème de la détermination des dimensions d'une pompe refoulant à une hauteur déterminée, avec un débit et un rendement donnés, surtout si, par des essais antérieurs, on a pu fixer la valeur des différents coefficients de frottement.

Les coefficients que nous avons adopté peuvent être

regardés comme des valeurs moyennes, et ne doivent pas s'écarter beaucoup des valeurs réelles puisque nous avons trouvé comme rendement total, des chiffres tels que 0,70 et 0,72 souvent observés dans les pompes à diffuseur et à grande hauteur de refoulement.

Grâce à l'analyse serrée des phénomènes qui se passent dans le fonctionnement d'une pompe centrifuge, nous avons pu montrer l'influence du diffuseur, de l'angle de sortie, de la largeur de la roue à la sortie, des fuites, etc.

La méthode expérimentale pour conduire à de tels résultats, devraient comporter un très grand nombre d'essais sur des pompes de toutes dimensions et de tout tracé d'aube, avec diffuseur, sans diffuseur, etc. et encore serait-il impossible de dégager des courbes expérimentales l'influence des divers éléments.

Au sujet des coefficients adoptés, il y a lieu de faire remarquer :

- 1) Que le coefficient de frottement μ relatif aux canaux de la roue et du diffuseur, varie dans une certaine mesure avec les dimensions de ces canaux, par conséquent avec le diamètre de la roue; alors que nous l'avons supposé constant dans nos calculs;
- 2) Que le coefficient de frottement de l'eau contre les deux faces de la roue varie avec la pression, et que le chiffre admis de 0,162 ne convient probablement que pour les faibles pressions;
- 3) Que les fuites ne peuvent guère être déterminées que par des expériences sur la pompe étudiée.

Il y aurait un grand intérêt à ce que les valeurs de ces différents coefficients soient fixées par des expériences de laboratoire sur une pompe spécialement étudiée à cet effet. Grâce à l'initiative de M. H. Hubert, professeur du cours de mécanique appliquée et de physique industrielle

à l'Université de Liège, de tels essais seront bientôt entrepris dans le laboratoire de mécanique qu'il dirige.

Les coefficients étant bien déterminés, il sera possible de reprendre le calcul des courbes de rendement et de formuler des conclusions définitives, de compléter la théorie pour rechercher l'influence du distributeur à l'entrée, etc.

Quelles que soient les restrictions que les expériences apportent aux conclusions, nous croyons pouvoir affirmer que la théorie, telle que nous l'avons exposée, restera à la limite de ce que l'analyse mathématique peut fournir.

APPENDICE

I. — Tracé des aubes d'une roue de pompe centrifuge.

Dans ce qui précède, nous avons adopté pour la forme des aubes, le tracé par arc de cercle, non parce qu'il est rationnel au point de vue théorique, mais parce qu'il est évidemment le plus simple.

L'étude du tracé des aubes a déjà été faite par plusieurs auteurs, notamment par *Fink*, en 1878; elle a été reprise plus tard, en 1892, par M. *Van der Stegen*, et nous ne voyons rien à y ajouter sinon quelques remarques et quelques restrictions quant à l'utilisation du tracé proposé.

Nous allons chercher à exposer la question aussi simplement que possible.

Nous avons vu, au chapitre II, que la démonstration des formules fondamentales de la théorie des pompes centrifuges exige que l'on puisse supposer (fig. 4) :

1° Qu'une tranche de fluide comprise entre deux surfaces concentriques $ab a'b'$, se déplace dans le canal parallèlement à elle-même, de manière à rester limitée dans tout son parcours, par deux surfaces concentriques ;

2° Que les vitesses des différents éléments d'une tranche $mnpq$ soient égales en grandeur et en direction à celle du centre de gravité G de cette tranche ;

3° Que les différentes forces qui sollicitent les éléments d'une tranche, aient leur résultante passant par son centre de gravité.

La première hypothèse exige que la vitesse relative ω soit la même *en grandeur*, pour les différents éléments d'une tranche quelconque $mnpq$; or la formule II

$$\varphi(p_0 - p_1) - (z_1 - z_0) - T_f = \frac{1}{2g}(\omega^2_1 - \omega^2_0) - \frac{1}{2g}(u^2_1 - u^2_0),$$

montre que, si l'on fait abstraction du terme T_f qui tient compte des frottements, et du terme $(z_1 - z_0)$ qui est relatif à la variation de la hauteur de l'élément et qui est par

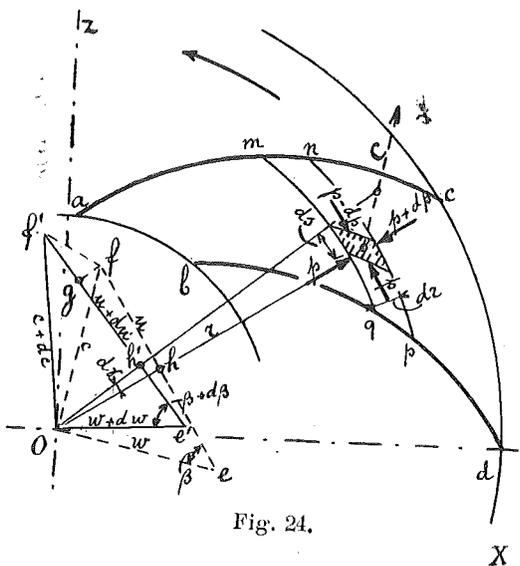


Fig. 24.

conséquent négligeable, cette condition qui peut s'énoncer algébriquement par les égalités

$$\omega_0 = \omega_a = \omega_b, \quad \omega_1 = \omega_c = \omega_d,$$

revient à celle-ci :

$$p_0 - p_1 = p_a - p_c = p_b - p_d, \quad (1)$$

puisque φ est constant et que

$$u_0 = u_a = u_b \quad u_1 = u_c = u_d.$$

La deuxième et la troisième hypothèse ne sont par contre, jamais réalisables, puisqu'elles exigent que l'arc compris entre deux aubes voisines soit infiniment petit. Pour la deuxième hypothèse, on voit aisément que c'est là une condition nécessaire; pour la troisième, il suffira de faire remarquer que la pression devrait être la même sur toute la longueur de l'arc $m q$ (fig. 4) pour que la résultante σp passât par le centre de gravité G ; or cela revient à admettre que la pression doit être la même de part et d'autre d'une aube et sur toute sa longueur, par conséquent que l'aube n'exerce aucune action sur le fluide et ne lui transmet aucun travail.

Tout ce qu'on peut chercher à réaliser pour se rapprocher des conditions de fonctionnement théorique, c'est donc la première hypothèse, celle des tranches parallèles, et nous avons vu qu'il suffisait pour cela de satisfaire à la relation (1) qui, appliquée entre les points G_0 et G_1 donne

$$p_a - p_m = p_b - p_q$$

ou

$$p_a - p_b = p_m - p_q \quad (2)$$

égale à une constante, puisque l'arc $m q$ est quelconque.

Cherchons à exprimer cette condition en fonction des accélérations. Pour cela considérons, fig. 24, un élément d'une tranche $mnpq$, et faisons abstraction du poids et des frottements; nous voyons que cet élément est soumis dans la direction normale au rayon, d'une part à une pression p , et d'autre part à une pression $(p - dp)$, et qu'il est animé d'une vitesse absolue c .

En appliquant l'équation fondamentale

$$\Sigma \bar{f} = m \bar{\varphi},$$

et en ne considérant que la projection sur la direction normale au rayon r , nous aurons :

$$l dr dp = \frac{\delta}{g} (l dr ds) \varphi_p$$

l désignant la largeur de la roue,
 ds la longueur de l'élément,
 φ_p la composante suivant la direction normale au rayon
de l'accélération totale.

En divisant par $l dr$ et en intégrant entre m et q , il
viendra :

$$\int_m^q dp = p_q - p_m = \int_m^q \frac{\delta}{g} \varphi_p ds.$$

Comme la vitesse relative ω et la vitesse d'entraîne-
ment doivent être les mêmes pour tous les points de
l'arc $m q$, la vitesse absolue et par conséquent l'accéléra-
tion φ_p sont constantes pour tous les éléments entre m et q .

Donc

$$p_q - p_m = \frac{\delta}{g} \varphi_p \times \text{arc } m q, \quad (3)$$

et la condition (2) ci-dessus revient à exprimer que

$$\varphi_p \times \text{arc } m q$$

est égal à une constante ou encore, puisque abstraction
faite de l'épaisseur des aubes, l'arc $m q$ est propor-
tionnel à r ,

$$\varphi_p \times r = k. \quad (4)$$

Ainsi, pour que l'hypothèse des tranches parallèles
soit réalisée, il faut et il suffit que l'accélération dans la
direction perpendiculaire au rayon, c'est-à-dire l'accé-
lération circonférentielle, soit inversement propor-
tionnelle au rayon.

Portons en o des longueurs of et of' égales en gran-
deur et en direction aux vitesses absolues de l'élément
considéré, dans deux positions infiniment voisines.
Traçons les longueurs fe et $f'e'$ égales en grandeur et en
direction aux vitesses d'entraînement u pour les deux
positions considérées; nous pourrions déterminer les deux
triangles des vitesses ofe et $of'e'$.

Par définition, on appelle accélération totale, la gran-
deur vectorielle $\overline{ff'}$ divisée par le temps dt que met
l'élément à passer de la première position à la seconde
infiniment voisine.

La projection gf' de $\overline{ff'}$ sur la direction de la vitesse
d'entraînement, divisée par dt , donnera donc l'accéléra-
tion circonférentielle :

$$\varphi_p = \frac{gf'}{dt}.$$

Exprimons gf' en fonction des vitesses u et ω ; pour
cela observons que

$$gf' = h'f' - h'g,$$

et que $h'g$ est égal à la projection de la ligne brisée ohf
sur la direction gh' ; nous aurons :

$$gf' = h'f' - hf \cos(d\gamma) + oh \sin(d\gamma);$$

en remplaçant les différentes longueurs par leurs valeurs
en fonction des vitesses et des angles, et en remarquant
que, à la limite,

$\cos(d\gamma) = 1$, $\sin(d\gamma) = d\gamma$, $\cos(\beta + d\beta) = \cos\beta - \sin\beta d\beta$,
il viendra :

$$gf' = [(u + du) - (\omega + d\omega) \cos(\beta + d\beta)] - (u - \omega \cos\beta) + \omega \sin\beta d\gamma,$$

ou encore, après simplifications,

$$gf' = du - d\omega \cos\beta + \omega \sin\beta d\beta + \omega \sin\beta d\gamma.$$

La condition du parallélisme des tranches devient donc

$$\varphi_p = \frac{du}{dt} - \frac{d\omega}{dt} \cos\beta + \omega \sin\beta \frac{d\beta}{dt} + \omega \sin\beta \frac{d\gamma}{dt} = \frac{k}{r}. \quad (5)$$

Comme $\frac{dr}{dt}$ n'est autre que la vitesse angulaire ω , que

$$\frac{du}{dt} = \omega \frac{dr}{dt},$$

$$\omega \sin\beta = \frac{dr}{dt},$$



L'équation (5) peut encore s'écrire :

$$\omega \sin \beta - \frac{d\omega}{dr} \omega \sin \beta \cos \beta + \omega \sin \beta \left(\frac{d\beta}{dr} \omega \sin \beta + \omega \right) = \frac{k}{r}. \quad (6)$$

On obtient ainsi une relation différentielle entre ω , r et β . Pour pouvoir résoudre le problème il faut donc exprimer une seconde condition : on peut s'imposer la condition que la vitesse relative varie d'une manière uniforme depuis le point d'entrée jusqu'au point de sortie, ou, ce qui revient à peu près au même, que la vitesse relative croisse ou décroisse à partir de la vitesse d'entrée ω_0 , comme le rayon passant par l'élément considéré, c'est-à-dire que

$$\omega = \omega_0 + k'r.$$

Cette relation différentiée donne

$$d\omega = k' dr, \quad (7)$$

et permet par conséquent, en la combinant avec l'équation (6) ci-dessus, de déterminer une relation où il n'entre plus que r et β .

Malheureusement la résolution d'une telle équation paraît compliquée. Pour trouver une relation simple susceptible d'une solution graphique, M. Van der Stegen pose

$$\omega \sin \beta = \omega_0 \sin \beta_0 + k'r,$$

c'est-à-dire qu'il suppose que la vitesse radiale croît ou décroît uniformément. Cette hypothèse n'est acceptable que dans le cas où la vitesse relative qui en résulte, varie d'une manière rationnelle ; mais nous verrons dans le second exemple traité plus loin, qu'il peut arriver que la vitesse doivent d'abord décroître très rapidement pour croître ensuite. Outre qu'une telle solution conduirait à des pertes par frottement plus importantes, il en résulterait dans la plupart des cas, des tourbillonnements.

A défaut de pouvoir résoudre l'équation ci-dessus, nous donnerons la solution proposée par M. Van der Stegen, et nous indiquerons, pour le cas où cette solution paraîtrait inacceptable, un tracé plus ou moins empirique mais en tous cas largement suffisant pour la pratique.

Reprenons l'équation (5) :

$$\frac{du}{dt} - \frac{d\omega}{dt} \cos \beta + \omega \sin \beta \frac{d\beta}{dt} + \omega \sin \beta \frac{d\gamma}{dt} = \frac{k}{r}.$$

Les trois premiers termes du premier membre représentent la dérivée

$$\frac{d(u - \omega \cos \beta)}{dt}.$$

D'autre part $(u - \omega \cos \beta)$ n'étant autre chose que la valeur de la composante hf de la vitesse absolue c , on peut écrire que le chemin circonférentiel parcouru dans le temps dt par l'élément, a pour valeur

$$(u - \omega \cos \beta) dt;$$

et comme celui-ci est aussi égal à $r d\gamma$, nous pourrions poser

$$(u - \omega \cos \beta) dt = r d\gamma.$$

La relation ci-dessus peut donc s'écrire :

$$\frac{d(u - \omega \cos \beta)}{dt} + \omega \sin \beta \frac{u - \omega \cos \beta}{r} = \frac{k}{r},$$

or, en remplaçant dt par $\frac{dr}{\omega \sin \beta}$, tirée de la relation :

$$\omega \sin \beta = \frac{dr}{dt},$$

nous aurons :

$$d[r(u - \omega \cos \beta)] = k \frac{dr}{\omega \sin \beta}. \quad (8)$$

En se donnant la relation qui lie ω à r

$$\omega \sin \beta = \omega_0 \sin \beta_0 + k'r,$$

on pourra intégrer cette équation, et obtenir la valeur de

$$r(u - \omega \cos \beta),$$

et par conséquent celle de $\omega \cos \beta$.

Comme on connaît $\omega \sin \beta$ pour chaque valeur de r , on pourra déterminer β et ω . La largeur de la roue sera alors donnée par la relation du débit (formule 27)

$$Q = 2\pi r l \frac{s}{s+e} \omega \sin \beta.$$

1^{re} MÉTHODE. — Le problème est susceptible d'une solution graphique et peut s'énoncer comme suit :

Etant donnés : l'angle d'entrée β_0 et l'angle de sortie β_1 , la largeur de l'ouïe l_0 et la largeur à la sortie l_1 , les rayons correspondants r_0 et r_1 , le débit Q et la vitesse angulaire ω , déterminez la forme des aubes et la forme du profil de la roue dans l'hypothèse où la vitesse radiale $\omega \sin \beta$ croît ou décroît d'une manière continue.

1^{er} exemple. — Nous prendrons d'abord l'exemple suivant :

$$r_0 = 50 \text{ mm} \quad \beta_0 = 20^\circ \quad l_0 = 18 \text{ mm} \quad \frac{s_0}{s_0 + e_0} = 0,82$$

$$r_1 = 100 \text{ mm} \quad \beta_1 = 12^\circ \quad l_1 = 10 \text{ mm} \quad \frac{s_1}{s_1 + e_1} = 0,82$$

$$N = 2000 \text{ tours par minute.}$$

$$Q = 0^m5011 \text{ par seconde ou } 40 \text{ m}^3 \text{ à l'heure.}$$

Déterminons les valeurs de

$$\omega_0 \sin \beta_0 = \frac{Q}{2\pi r_0 l_0 \frac{s_0}{s_0 + e_0}} = 2^m38$$

$$\omega_1 \sin \beta_1 = \frac{Q}{2\pi r_1 l_1 \frac{s_1}{s_1 + e_1}} = 2^m14.$$

A partir de l'axe OY sur la droite (1,x) de la fig. 25, Pl. 2, portons r_0 et r_1 en abscisses, $\omega_0 \sin \beta_0$ et $\omega_1 \sin \beta_1$ en ordonnées. Puisque nous avons admis que la vitesse radiale doit croître ou décroître d'une manière continue, il nous suffira, pour obtenir les différentes valeurs intermédiaires, de joindre les extrémités des ordonnées que nous venons de tracer.

Divisons la droite (1,6) en 5 parties égales et chacune des parties en 2; élevons des perpendiculaires aux points de division. Par des arcs de cercles, rabattons sur la direction (1,2) les longueurs des ordonnées menées aux points intermédiaires, non numérotés. Choisissons un pôle p , et joignons p aux points s et t obtenus pour les ordonnées extrêmes. En menant par 1 une parallèle à ps , nous obtiendrons à l'intersection avec l'ordonnée passant par 2, une longueur Δy telle que

$$\frac{\Delta y}{a} = \frac{\Delta r}{1s} = \frac{\Delta r}{\omega \sin \beta};$$

d'où

$$\Delta y = a \frac{\Delta r}{\omega \sin \beta}.$$

Pour la division (2,3), nous obtiendrons en procédant de la même manière, la valeur de Δy correspondante; l'ordonnée totale (6,6') représentera donc

$$\sum_{r_0}^{r_1} a \frac{\Delta r}{\omega \sin \beta} = \int_{r_0}^{r_1} a \frac{dr}{\omega \sin \beta},$$

en passant à la limite par approximation.

Or, en vertu de la relation (8), la valeur de l'intégrale ci-dessus est égale à la différence

$$r_1 (u_1 - \omega_1 \cos \beta_1) - r_0 (u_0 - \omega_0 \cos \beta_0),$$

si on suppose $a = k$.

Et comme nous avons tous les éléments nécessaires

pour calculer cette différence qui est égale dans notre exemple à

$$0,96 - 0,19 = 0,77,$$

en employant pour unités le mètre et la seconde, nous pourrons déterminer l'échelle du diagramme (1,6') et l'ordonnée initiale y_1 :

$$\frac{y_1}{(66')} = \frac{0,19}{0,77};$$

d'où

$$y_1 = 49 \times \frac{0,19}{0,77} = 12 \text{ mm.}$$

Traçons l'axe OX à la distance y_1 de (1,2) ; la courbe (1,6') rapportée à cet axe donnera la valeur de

$$r(u - \omega \cos \beta)$$

en fonction du rayon r .

Pour obtenir la valeur de $(u - \omega \cos \beta)$, il suffira de diviser les ordonnées de cette courbe par r . Cette division peut se faire graphiquement ; pour obtenir directement la vitesse à l'échelle adoptée de

$$1 \text{ mm} = 0^m2 \text{ par seconde,}$$

il suffit de choisir l'unité a_1 de manière que l'on voit

$$I b = 19 \text{ mm,}$$

19 mm représentant à l'échelle la valeur de $(u_0 - \omega_0 \cos \beta_0)$, 3^m80 dans notre exemple.

Sur la figure, nous n'avons indiqué la construction que pour les deux points extrêmes b et c .

Pour la détermination de la forme des aubes ou plutôt de l'axe des canaux formés par deux aubes voisines, il faut pouvoir tracer les triangles des vitesses pour les différentes valeurs de r ; or, ce qui importe pour la détermination de ces triangles, c'est de connaître en chaque point la valeur de $\omega \cos \beta$. En traçant le diagramme des

vitesses d'entraînement u , qui n'est autre chose qu'une droite passant par O, les portions d'ordonnées comprises entre la droite et la courbe (bc) donnent précisément ces valeurs.

Voici comment nous avons procédé : nous avons tracé au point I, choisi arbitrairement (axes OX, OZ), le triangle des vitesses à l'entrée ; par l'intersection de la vitesse ω_0 avec l'arc de cercle passant par le premier point de division, nous avons mené un rayon et porté sur celui-ci, à partir du point considéré, une longueur égale à la valeur correspondante de $\omega \sin \beta$; à l'extrémité de cette portion de rayon, nous avons élevé une perpendiculaire et mesuré sur celle-ci la valeur de $\omega \cos \beta$; en joignant le point initial au point ainsi trouvé, nous avons obtenu ω en grandeur et en direction. Cette construction a été répétée pour les points compris entre II et III, III et IV, etc., mais elle n'a été maintenue sur l'épure qu'entre les points III et IV.

La courbe inscrite dans le polygone ainsi trouvé peut être considérée comme la forme de l'aube. Au point de vue de la réalisation pratique des aubes, nous avons cherché deux arcs de cercle se rapprochant autant que possible de cette courbe, et nous les avons adopté pour le tracé *du dos* de l'aube qui est la partie active. Nous nous sommes ensuite donné une épaisseur de 5 mm qui, pour une roue de 200 mm de diamètre, pourrait être ramenée à 3 1/2 ou 4 mm. Pour le pas de l'aubage nous avons choisi 1/6 de la circonférence, six aubes paraissant un maximum dans le cas présent d'un angle de 12'.

Les extrémités intérieures des aubes ont été amincies, afin de diminuer le choc à l'entrée.

Il nous reste, pour achever la résolution du problème à déterminer le profil de la roue. Pour cela nous avons la

relation donnant la valeur du débit Q , de laquelle nous pouvons tirer :

$$l = \frac{Q}{2\pi r \frac{s}{s+e} \omega \sin \beta} = \frac{Q}{2\pi} \times \frac{1}{\omega \sin \beta} \times \frac{1}{r \times \frac{s}{s+e}}$$

Nous déterminerons d'abord le facteur A

$$A = \frac{Q}{2\pi} \times \frac{1}{\omega \sin \beta};$$

pour cela il suffit de prendre $\frac{Q}{2\pi} = 0,1$, de porter les valeurs de $\omega \sin \beta$ entre $0,1$ et $0,6$, et de prendre pour unité a_2 . Pour la valeur $0,1$, nous aurons :

$$\frac{0,1}{0,1} = \frac{a_2}{1e} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega \sin \beta}{2\pi} = \frac{a_2}{1e};$$

$$\text{d'où} \quad 1e = a_2 \times \frac{Q}{2\pi} \times \frac{1}{\omega \sin \beta} = A.$$

L'unité a_2 a été choisie de manière que $1e$ soit égal à $l_0 = 18$ mm.

Pour déterminer l , il reste maintenant à multiplier A par $\frac{1}{r \frac{s}{s+e}}$ et comme $\frac{s}{s+e}$ est supposé constant et égal à

$0,82$, le calcul graphique pourra se faire comme ci-dessus. La valeur de l'unité a_3 a été prise égale à $0,1$ de manière à obtenir les valeurs de l à l'échelle; pour le point VI, par exemple, on sait que, $1h$ étant égal à (VI, i) ,

$$\frac{1k}{1h} = \frac{a_3}{r_1};$$

$$\text{d'où} \quad 1k = a_3 \times \frac{1h}{r_1} = a_3 \frac{A}{r_1} = l_1.$$

Le profil cherché est donc el ; les autres détails de la coupe représentée sur la fig. 25 résultent des données de construction.

2° *exemple.* — Dans l'exemple que nous venons de traiter, nous voyons que le diagramme de la vitesse ω [courbe (mn) fig. 25] indique un accroissement continu et assez régulier de celle-ci. Il n'en est pas toujours de même. Prenons l'exemple suivant :

$$r_0 = 50 \text{ mm} \quad \beta_0 = 20^\circ \quad l_0 = 18 \text{ mm} \quad \frac{s_0}{s_0 + l_0} = 0,82$$

$$r_1 = 100 \text{ mm} \quad \beta_1 = 30^\circ \quad l_1 = 10 \text{ mm} \quad \frac{s_1}{s_1 + l_0} = 0,86$$

$$Q = 0\text{m}^3 0166 \text{ par m soit } 60 \text{ m}^3 \text{ à l'heure}$$

$$N = 2000 \text{ tours par minute.}$$

Les données ne diffèrent de l'exemple précédent qu'en ce qui concerne l'angle de sortie et le débit.

Les résultats du calcul graphique sont indiqués sur la fig. 26, Pl. 2, et les explications données au sujet de l'exemple précédent nous dispensent de reprendre les constructions une à une; nous avons d'ailleurs employé les mêmes notations.

La seule différence, c'est que nous avons été amené à faire une construction supplémentaire pour tenir compte cette fois de la variation de $\frac{s}{s+e}$; nous avons supposé

que cette valeur croissait régulièrement avec le rayon, entre $0,82$ et $0,86$; la construction se comprend aisément.

Le tracé a été effectué en supposant un pas de $1/8$ de la circonférence, au lieu de $1/6$ adopté pour 12° .

On voit que le diagramme de la vitesse relative ω indique une diminution rapide de celle-ci, diminution suivie d'une augmentation. Il est évident qu'un tel tracé d'aube aurait pour résultat d'amener des tourbillonnements dans toute la première partie de l'aubage, car la vitesse du fluide ne saurait décroître aussi rapidement.

Dans un cas comme celui-ci, nous proposons de substituer à ce tracé celui donné par la méthode suivante.

2^{me} MÉTHODE. — Nous nous donnons le tracé des aubes *a priori*, tracé composé d'une droite et d'un arc de cercle ou d'un seul arc de cercle suivant le cas, ce tracé étant fait de manière que le canal formé par deux aubes consécutives n'ait pas de variations brusques de section.

Nous avons vu, lorsqu'on choisi un arc de cercle, le moyen de trouver le centre de cet arc pour qu'il coupe les circonférences de rayon r_0 et r_1 sous des angles β_0 et β_1 .

Tout revient dans cette méthode à rechercher ensuite le profil de la roue en s'imposant la condition que la vitesse relative moyenne décroisse ou croisse d'une manière continue et régulière avec le rayon.

Il est nécessaire de parler ici de vitesse relative moyenne, car la vitesse n'est plus nécessairement la même pour tous les éléments d'une même tranche, en d'autres termes l'hypothèse des tranches parallèles n'est plus nécessairement réalisée; mais avec des aubes suffisamment rapprochées la différence des vitesses pour les éléments extrêmes d'une même tranche doit être relativement petite.

Pour préciser nous avons choisi les mêmes données que dans le cas de la fig. 26 et voici comment nous avons procédé. Dans le système d'axes OX, OY de la fig. 27, Pl. 2, nous avons tracé le diagramme de la vitesse d'entraînement u et de la vitesse relative ω en fonction du rayon r ; par hypothèse ce dernier doit être une droite. Nous avons divisé la portion de l'axe des X comprises entre r_0 et r_1 en 5 parties égales et nous avons déterminé par des axes de cercle, sur l'axe du canal (I, VI) les parties de division I, II, III, IV, V, VI. Connaissant la direction et la grandeur de la vitesse relative en chaque point, nous avons pu tracer le diagramme polaire MN de cette vitesse. Par la construction du triangle des vitesses dont on connaît

pour chaque point u et ω en grandeur et en direction, il est alors facile de déterminer le diagramme polaire M'N' de la vitesse absolue c , et de connaître les valeurs successives de $\omega \sin \beta$.

Nous avons porté sur le diagramme rectangulaire des vitesses, les valeurs de c et de $\omega \sin \beta$.

Le diagramme de $\omega \sin \beta$ étant connu, il suffit de procéder comme précédemment pour déterminer le profil de la roue.

Le tracé des aubes a été fait dans l'hypothèse d'un nombre total d'aubes égal à huit, comme dans le cas de la fig. 26, et l'on remarquera combien les variations de section de l'aubage sont moins brusques que dans le cas précédent. Quant au profil il n'est plus du tout convergent à l'extrémité ce qui est favorable pour l'entrée du fluide dans les canaux du diffuseur.

Remarque. — En cherchant à réaliser l'hypothèse des tranches parallèles, on se rapproche non seulement des conditions du fonctionnement théorique, mais on évite le glissement des filets fluides l'un contre l'autre et les remous qui peuvent en résulter. Par contre, le parallélisme des tranches étant réalisé, il existe une différence de pression de part et d'autre de chaque aube, d'autant plus grande que le nombre d'aubes est plus petit, ce qui augmente nécessairement les remous à l'entrée.

La question du nombre d'aubes ne saurait être traitée d'une manière théorique; trop rapprochées, la section des canaux diminue et les pertes par frottement augmentent; trop éloignées les pertes par remous, à l'entrée et dans l'aubage, prennent bientôt une grande importance. C'est au sentiment qu'il faut s'en rapporter et les nombres de 6 pour 12° et 8 pour 30° nous paraissent suffisants.

II. — Tracé des aubes du diffuseur.

Le tracé du diffuseur a la plus grande importance au point de vue de pouvoir manométrique et du rendement indiqué de la pompe. Les sections successives des canaux formés par les aubes, doivent croître assez rapidement pour ne pas allonger inutilement le diffuseur et augmenter ainsi, non seulement les pertes par frottements, mais l'encombrement et le prix de la pompe ; elles ne doivent pas croître trop rapidement sans quoi les filets fluides ne suivent plus les parois, la diminution de la vitesse ne se produit plus et les remous rendent la présence du diffuseur plus nuisible qu'utile.

Un problème intéressant serait celui de rechercher dans le cas simple d'un tuyau rectangulaire, la divergence limite que l'on pourrait donner à deux des parois pour que le fluide entrant avec une vitesse donnée, ne se détache pas des parois divergentes. Mais ce problème paraît bien difficile à résoudre et faute de renseignements théoriques, force est encore de s'en remettre au sentiment.

Lorsqu'on s'est donné les rayons intérieur et extérieur du diffuseur, l'angle d'entrée α_1 et l'angle sortie α_2 , on peut comme pour les aubes de la roue rechercher la forme des aubes pour que l'hypothèse des tranches parallèles soient réalisées. Par le même raisonnement on arriverait à la condition

$$\varphi_p = \frac{k}{r}$$

ou encore

$$d[r(c \cos \alpha)] = k \frac{dr}{c \sin \alpha}.$$

Nous nous sommes contenté, dans la fig. 27, de rechercher le tracé de l'aube pour que la vitesse absolue c

varie d'une manière continue depuis son point d'entrée jusqu'à son point de sortie.

Nous nous sommes imposé *a priori* une vitesse de sortie égale à un tiers de la vitesse d'entrée et nous avons admis une largeur constante pour le diffuseur. Avec cette dernière hypothèse, la vitesse radiale $c \sin \alpha$ est inversement proportionnelle à la distance de l'axe ; le diagramme de cette valeur est tracé sur la fig. 27.

Les valeurs de c et $c \sin \alpha$ étant connues pour chacune des valeurs de r , il est facile de comprendre comment on a pu trouver le polygone I II III...

Par le point I, on mène un rayon et on porte dans cette direction la valeur de $c \sin \alpha$; on élève une perpendiculaire à l'extrémité de la portion du rayon représentant $c \sin \alpha$, et avec une ouverture du compas égale à c , on trace un arc de cercle ; on obtient ainsi la direction de la vitesse absolue c . On répète cette construction au point où la circonférence, passant par la division intermédiaire entre I et II, coupe la direction c , et ainsi de suite.

La courbe I, II, III, IV, V, VI est la courbe cherchée.

Nous avons choisi un arc de cercle passant autant que possible par ces différents points, et nous l'avons adopté pour le tracé du *dos des aubes*, supposées au nombre de huit dans le dessin.

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, c'est la partie convexe qui est la paroi active, car en l'absence d'aubes, le fluide prend, comme nous allons le montrer, entre les deux parois du diffuseur, un mouvement spiraloïde tel que chaque filet coupe toutes les circonférences sous un angle constant.

La présence des aubes a donc pour effet de redresser les filets et de diminuer le chemin parcouru dans le diffuseur.

III. — Mouvement du fluide dans un diffuseur sans aubes.

Reportons-nous à la figure 24, et supposons que cette figure représente la section d'un diffuseur avec aubes au lieu de représenter la section d'une roue. Dans le cas où le diffuseur possède des aubes, il existe une différence de pression entre la paroi bd et la paroi ab , c'est-à-dire que l'on a :

$$p_q > p_m.$$

Si au contraire il n'existe pas d'aubes, il est évident que l'on a

$$p_q = p_m,$$

en d'autres termes que les surfaces cylindriques et concentriques sont des surfaces équipotentielles.

Or la relation

$$p_q - p_m = 0$$

peut aussi s'écrire, d'après ce que nous avons vu,

$$\varphi_p \times r = 0$$

ou

$$\varphi_p = 0.$$

Par analogie, ou mieux en reprenant le raisonnement que nous avons fait précédemment, il est facile de voir que dans ce cas, φ_p est égal à

$$\varphi_p = \frac{d[r(c \cos \alpha)]}{dr} \times \frac{c \sin \alpha}{r}$$

et que, par conséquent, la condition $\varphi_p = 0$ revient à

$$\frac{d[r(c \cos \alpha)]}{dr} = 0$$

ou

$$r(c \cos \alpha) = c^{te},$$

ce qui peut s'énoncer en disant que la *composante tangentielle de la vitesse absolue varie en raison inverse du rayon*.

Comme dans le cas du diffuseur à parois parallèles la composante radiale de la vitesse absolue varie également en raison inverse du rayon, on peut dire que

$$\frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = c^{te},$$

c'est-à-dire que *l'angle sous lequel les filets fluides coupent les différentes circonférences est constant, par conséquent que les trajectoires dessinées par ces filets sont des spirales logarithmiques*.

Remarque I. — D'après ce que nous venons de voir, dans un diffuseur sans aubes dont les dimensions seraient celles indiquées sur la fig. 27, la vitesse absolue de sortie serait de

$$15 \times \frac{100}{140} = 10^m70,$$

15 m étant la vitesse d'entrée; de telle sorte que, abstraction faite des frottements, le rendement du diffuseur ne serait guère que

$$\frac{\overline{15^2} - \overline{10,7^2}}{\overline{15^2}} = 0,49,$$

l'énergie récupérée étant proportionnelle à la différence des carrés des vitesses à l'entrée et à la sortie. Or en admettant que le tracé des aubes dessinées fig. 26 soit tel qu'il ne se produise pas de tourbillonnements, le rendement sera donné par le rapport

$$\frac{\overline{15^2} - \overline{5^2}}{\overline{15^2}} = 0,84,$$

5 m représentant ici la vitesse de sortie.

Quant aux pertes par frottements dont nous venons de faire abstraction dans notre raisonnement, elles ne seront

pas plus élevées avec le diffuseur à aubes car les trajectoires des éléments seront beaucoup plus courtes avec ce dernier.

Ainsi on peut conclure qu'il y a avantage à adopter le diffuseur à aubes, surtout lorsque l'angle α_1 d'entrée des filets fluides est petit, comme c'est toujours le cas pour les pompes à grande hauteur de refoulement et à faible débit.

Remarque II. — Il serait peut-être plus rationnel d'adopter pour loi de la diminution de la vitesse c en fonction du débit, une courbe parabolique, ou en tous cas une courbe concave vers le bas, afin d'admettre une diminution moins rapide pour les plus grandes vitesses.

Ce qui est certain, c'est qu'il y aurait avantage à donner une certaine divergence aux parois latérales du diffuseur, mais les difficultés de construction peuvent en être sensiblement accrues, car pour obtenir un bon résultat, il faut que les parois et les aubes de ces diffuseurs soient complètement parachevées à la fraise, puis finement polies.

IV. — Au sujet du choix d'un type de pompe centrifuge et des difficultés particulières de construction.

Dans le présent ouvrage, nous n'avons pu qu'effleurer les questions relatives à la construction et à la réalisation d'une pompe centrifuge.

Au sujet du type lui-même, nous croyons que le système multicellulaire qui prévaudra, sera le système à roues à une seule ouïe, avec piston d'équilibrage automatique, dont l'un des spécimens actuellement fournis dans l'industrie et donnant toute satisfaction, est représenté fig. 3.

L'équilibrage automatique permet de supprimer le palier de butée, en tous cas de lui donner de moindres proportions; souvent on se contente de deux embases

permettant un jeu axial de 1 ou 2 mm. Avec ce système, on évite, non seulement les difficultés provenant de l'impossibilité de supprimer sans tâtonnements la poussée axiale, mais celles provenant de ce que les fuites prenant plus d'importance après un certain temps, l'équilibrage est détruit.

Naturellement pour obtenir un bon rendement, il faut que ce piston ne donne lieu qu'à une fuite relativement faible. Pour cela, la plus grande précision dans l'ajustage est nécessaire, et les jeux entre les parties fixes et mobiles descendent à 2 et 3 dixièmes de millimètre.

Au sujet de la réalisation toutes les parties doivent être calibrées de manière à pourvoir fournir des pièces de rechange absolument identiques à celles de la pompe.

Toutes les parties en contact avec l'eau animée d'une grande vitesse doivent être en bronze. Les parties fixes assurant l'étanchéité sont souvent en métal assez mou, afin d'éviter des grippements en cas de contact avec la partie mobile.

L'arbre est ordinairement protégé sur toute sa longueur, jusqu'à l'extérieur des bourrages, par une gaine en bronze.

Les paliers sont à bagues de graissage et l'eau sortant du piston d'équilibrage, est employée à refroidir le bain d'huile des paliers.

Lorsqu'il y a un piston d'équilibrage et que les bourrages ne sont soumis par conséquent ni d'un côté ni de l'autre à de fortes pressions, ceux-ci peuvent être garnis de simples cordes en chanvre suiffé. Du côté de l'aspiration, on ménage une arrivée d'eau sous pression pour éviter les rentrées d'air.

Les canaux qui ramènent le fluide de la sortie d'un diffuseur vers l'ouïe de la roue suivante, doivent être bien

étudiés au point de vue du tracé, et soigneusement nettoyés.

L'enveloppe de la pompe est ordinairement pour les hautes pressions, en acier coulé.

Au point de vue du bon fonctionnement mécanique, un point essentiel est l'équilibrage parfait de la partie mobile afin d'éviter les vibrations de l'arbre, vibrations qui amènent une usure rapide des parties fixes voisines de l'arbre et des roues, et qui mettent rapidement la pompe hors de service.

Les difficultés de réalisation sont donc sérieuses, et l'on peut dire qu'il faut atteindre la perfection dans la précision.

Les difficultés de détermination des dimensions n'existent guère que pour la pompe d'essai ; une fois que les coefficients des formules que nous avons proposées, ont été déterminés par les courbes expérimentales relevées sur la première pompe, on peut arrêter les dimensions des différents types pour une exécution en série.

V. — Au sujet de l'emploi des pompes centrifuges dans les mines.

Elles ne conviennent pas pour les très faibles débits ; 35 à 40 m³ à l'heure, pour des hauteurs de refoulement de 250 à 300 m, paraissent constituer un minimum à ce point de vue : la pompe doit alors tourner 2900 tours par minute, et posséder 7 à 8 roues en série. Mais malgré cette grande vitesse, on cite des pompes ayant fonctionné pendant plus d'une année sans le moindre arrêt.

Les rendements sont compris entre 70 et 75 % pour les pompes des meilleurs constructeurs.

Les prix restent relativement élevés en raison d'abord

de la complication et de la précision de la construction, et aussi par suite d'une sorte de monopole dont jouissent encore certains constructeurs, grâce à la réputation qu'ils ont acquise, aux garanties et aux références qu'ils peuvent donner.

Il paraît inutile d'insister sur les avantages particuliers qu'offrent ces pompes dans le service d'exhaure.

L'emplacement est très réduit particulièrement en largeur ce qui permet de réduire la section de la chambre des pompes ; les frais d'installation sont, par conséquent, diminués dans des proportions importantes. La rapidité du montage et la grande facilité de surveillance sont aussi des avantages très sérieux. Au point de vue de la surveillance une seule chose est importante, c'est de s'assurer que la pompe ne se désamorçe pas et ne tourne pas à vide car l'échauffement des paliers et de l'arbre amènerait une rapide détérioration de tout l'intérieur.

Au sujet du rendement industriel de la pompe, il est très important que le voltage soit maintenu constant aux bornes du moteur afin que la vitesse angulaire reste constante ; nous avons montré combien de faibles variations du nombre de tours pouvait amener de grandes variations dans le rendement. Dans les mines de grande importance, il y aurait même lieu d'examiner s'il ne conviendrait de constituer un groupe électrogène séparé, pour le service de l'épuisement, de la ventilation et de l'éclairage, qui demande, sous trois une tension très constante.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Préface	I
Table des notations adoptées dans l'ouvrage	II
Errata	III
—	
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I.	
CLASSIFICATION ET FONCTIONNEMENT DES DIFFÉRENTS TYPES DE POMPES CENTRIFUGES.	
I. Pompe centrifuge pour grand débit et faible hauteur	4
II. Pompe centrifuge pour faible débit et grande hauteur.	5
a) A une roue	5
b) A plusieurs roues	6
CHAPITRE II.	
THÉORIE DES POMPES CENTRIFUGES.	
§ 1. Formules générales	9
Formule I	11
Formule II	13
Formule III	16
§ 2. Application de la formule I.	17
§ 3. Calcul du terme T_f relatif aux frottements	17
Remarque	19
§ 4. RENDEMENT INDIQUÉ DES POMPES CENTRIFUGES	21
§ 5. Conclusions.	27
§ 6. Choix des coefficients	29
§ 7. Tracé du profil des aubes. Calcul de φ et de ψ	33
§ 8. Tracé du diffuseur. Calcul de φ'	35
§ 9. Courbes du rendement indiqué et du coefficient manométrique	37
§ 10. RENDEMENT ORGANIQUE ET RENDEMENT EFFECTIF	44

§ 11. <i>Courbes de rendement effectif</i>	50
Première hypothèse	50
Conclusions	51
Deuxième hypothèse	54
Conclusions	56
Troisième hypothèse	57
Conclusions	59
Quatrième hypothèse	59
Conclusions	60
§ 12. CALCUL DES FUITES. RENDEMENT TOTAL.	61
Conclusions	67
Application	68
§ 13. <i>Calcul du rendement de l'installation. Variation du rendement en fonction de la vitesse de rotation pour une hauteur H constante</i>	70
Conclusions	76

CHAPITRE III.

§ 14. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES DES POMPES CENTRIFUGES.	
1 ^o <i>Pompe pour grand débit et faible hauteur de refoulement</i>	76
Premier cas	77
Deuxième cas.	82
Remarque	86
2 ^o <i>Pompe pour faible débit et grande hauteur de refoulement</i>	87
Remarque	92
CONCLUSIONS	93

APPENDICE.

I. TRACÉ DES AUBES D'UNE ROUE DE POMPE CENTRIFUGE	97
1 ^o <i>méthode</i>	
1 ^{er} exemple	104
2 ^e exemple	109
2 ^o <i>méthode</i>	110
Remarque	111
II. TRACÉ DES AUBES DU DIFFUSEUR	112
III. MOUVEMENT DU FLUIDE DANS UN DIFFUSEUR SANS AUBES	114
Remarque I	115
Remarque II	116
IV. AU SUJET DU CHOIX D'UN TYPE DE POMPE CENTRIFUGE ET DES DIFFICULTÉS PARTICULIÈRES DE CONSTRUCTION	116
V. AU SUJET DE L'EMPLOI DES POMPES CENTRIFUGES DANS LES MINES	118



LES POMPES CENTRIFUGES

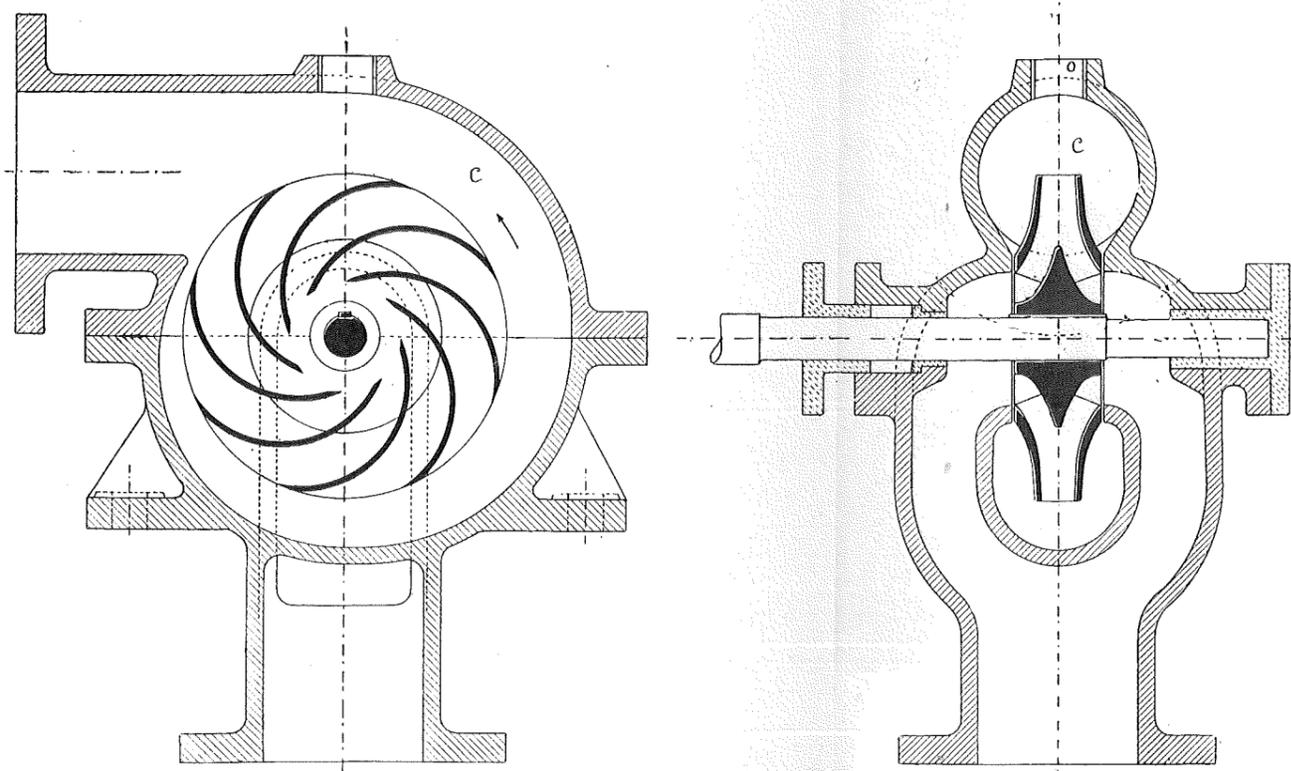


Fig. 1. — Echelle 1/5.

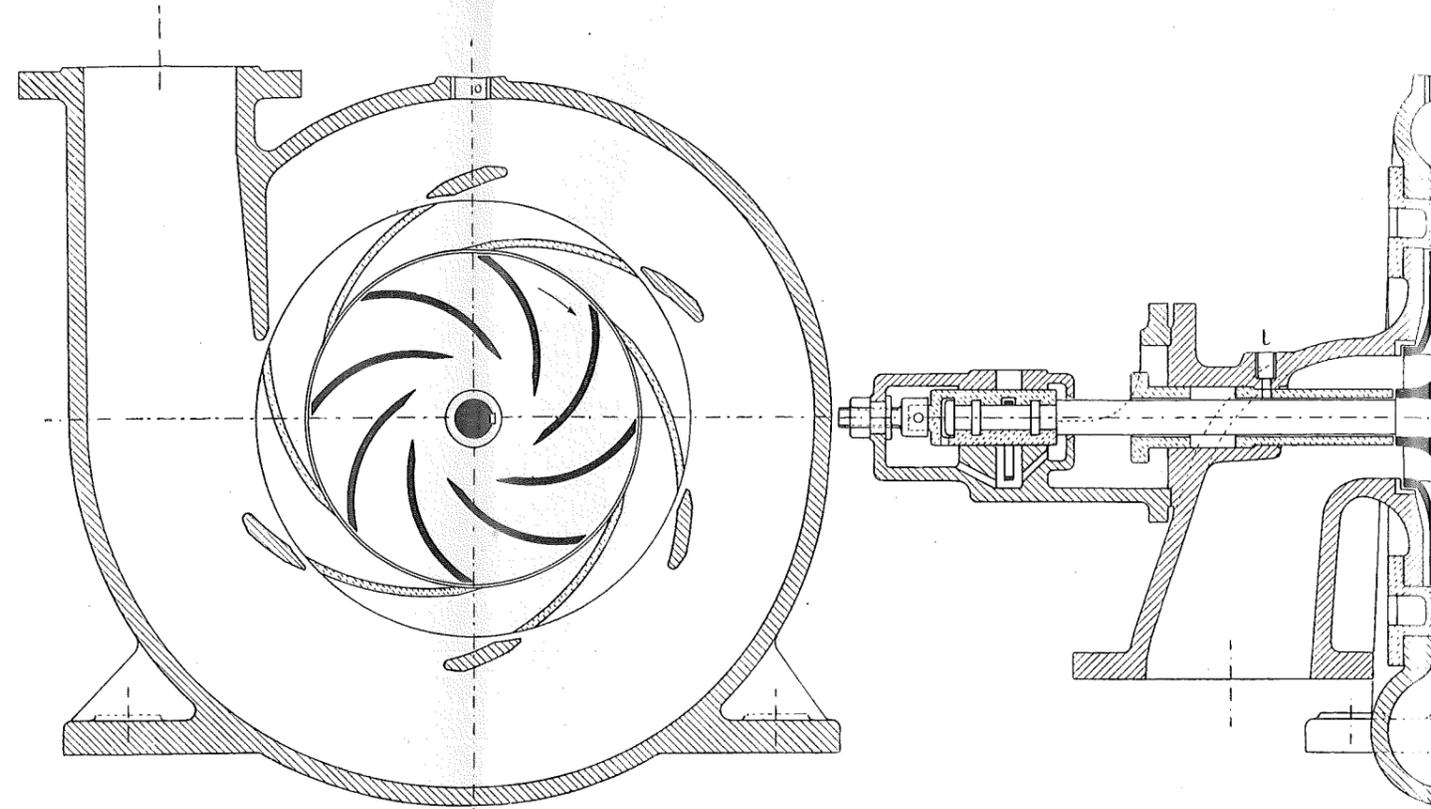


Fig. 2. — Echelle 1/5.

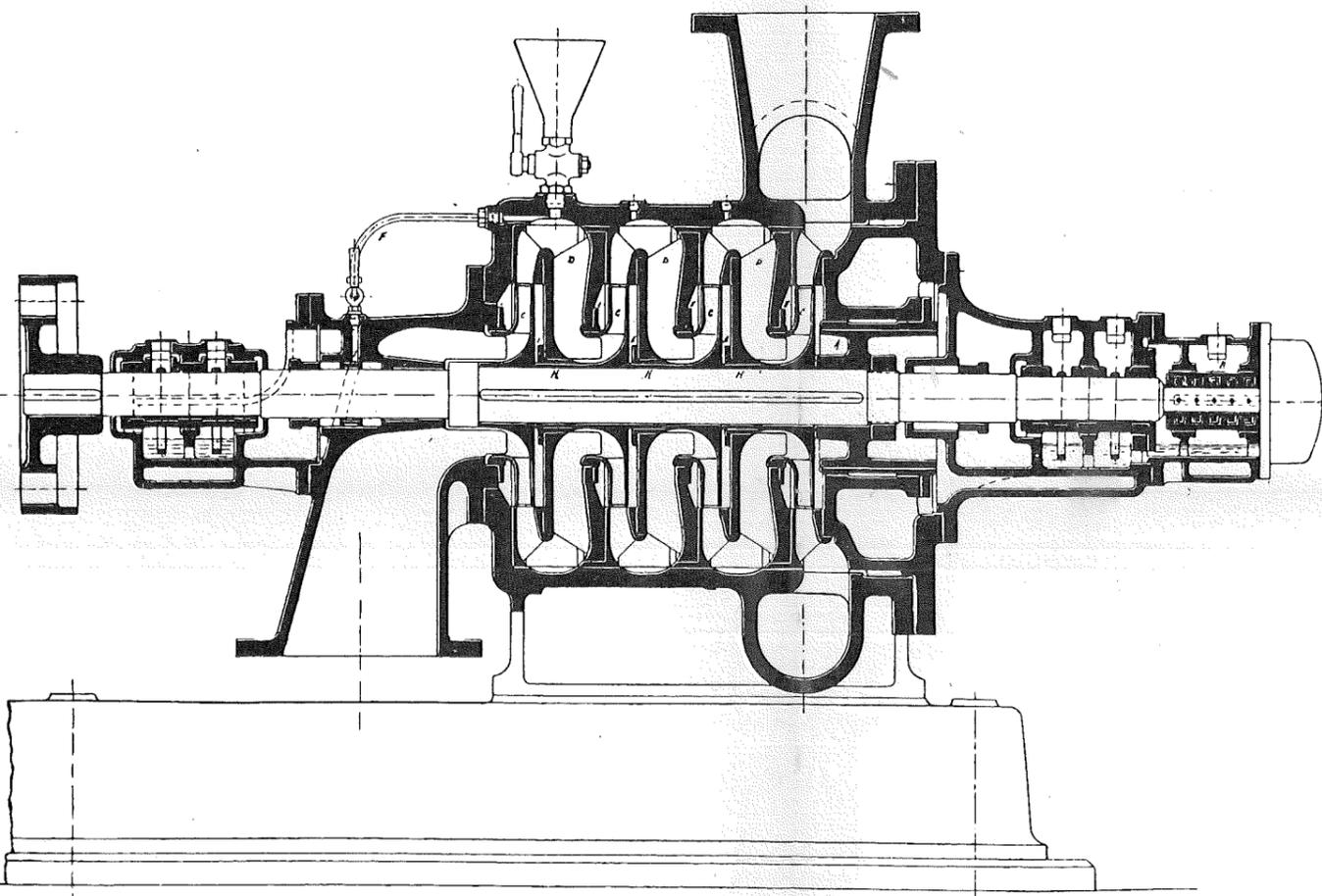


Fig. 3.

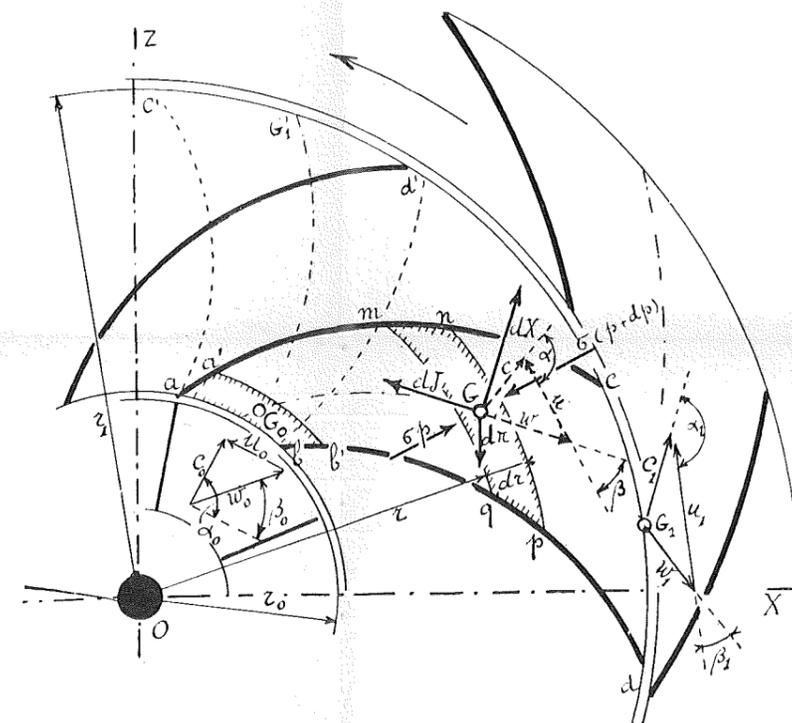


Fig. 4.

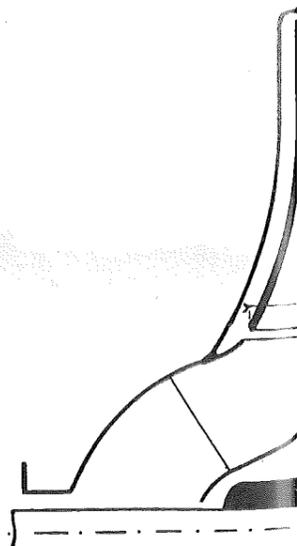


Fig. 4bis

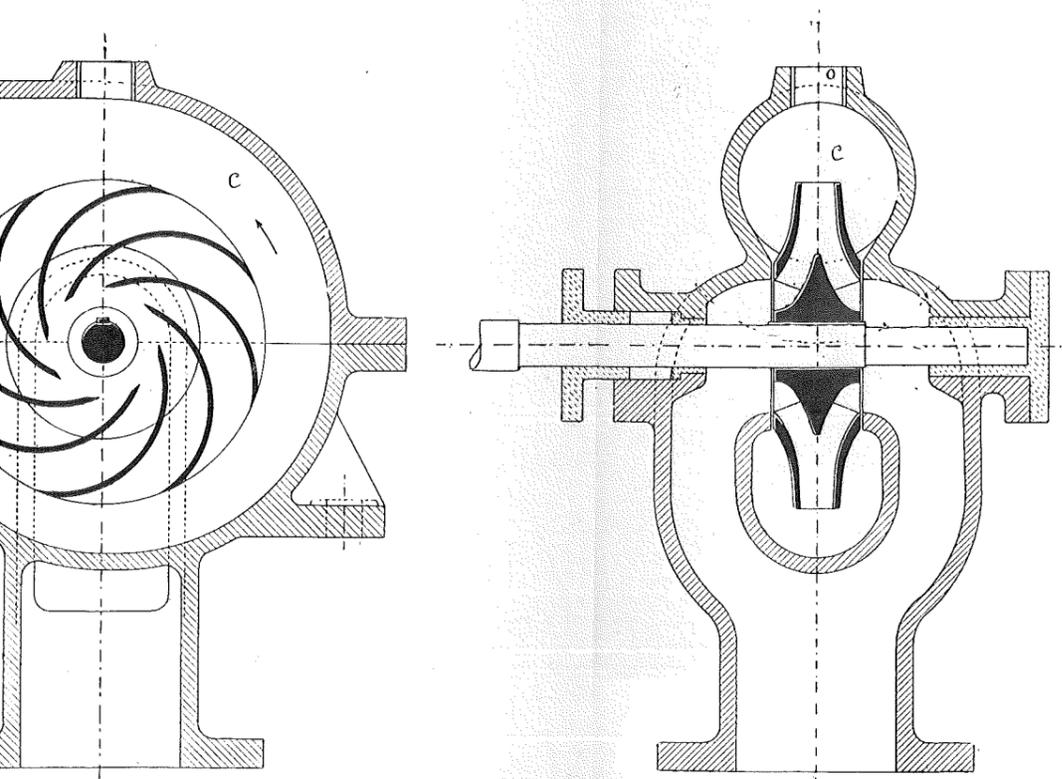


Fig. 1. — Echelle 1/5.

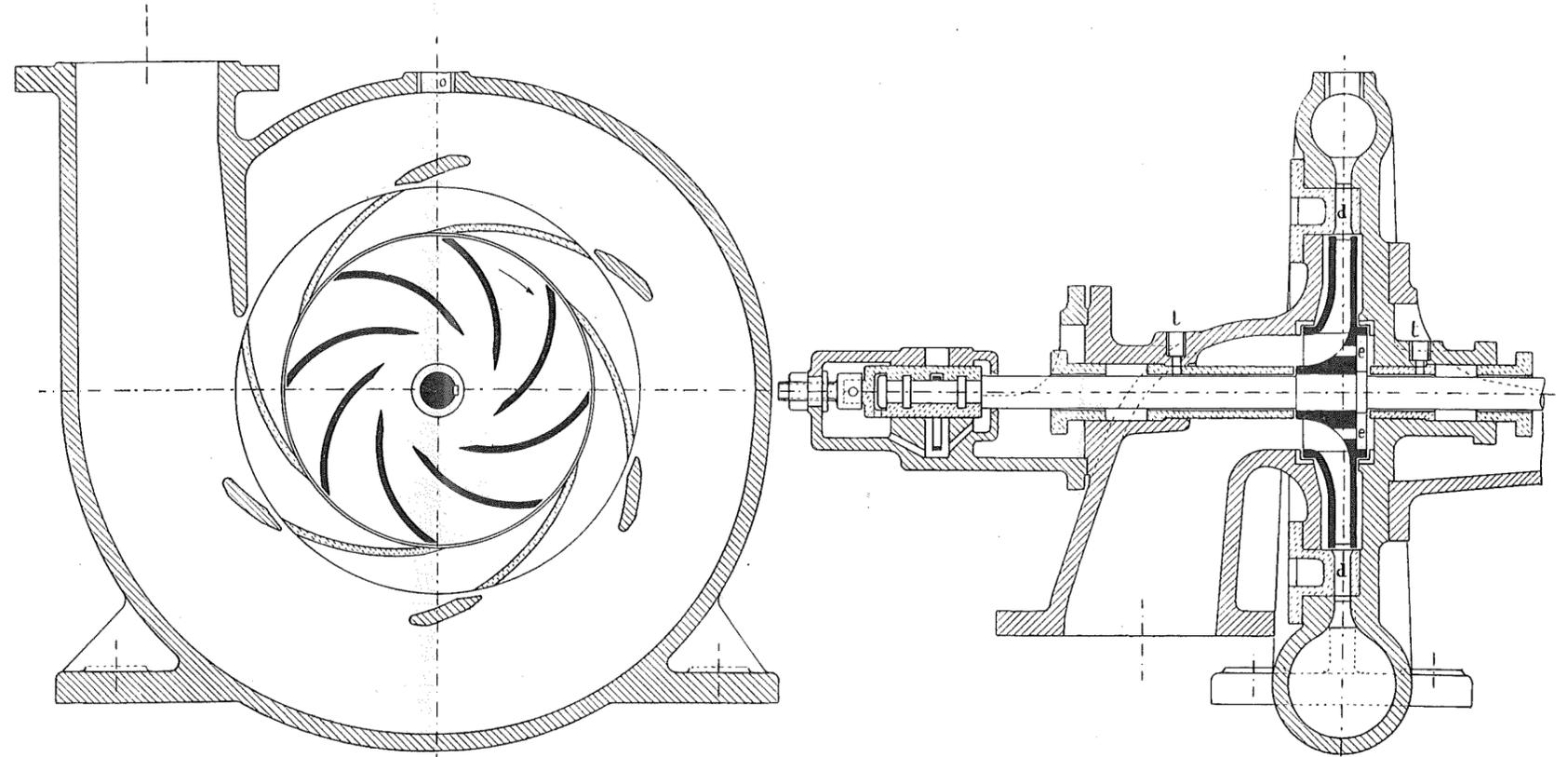


Fig. 2. — Echelle 1/5.

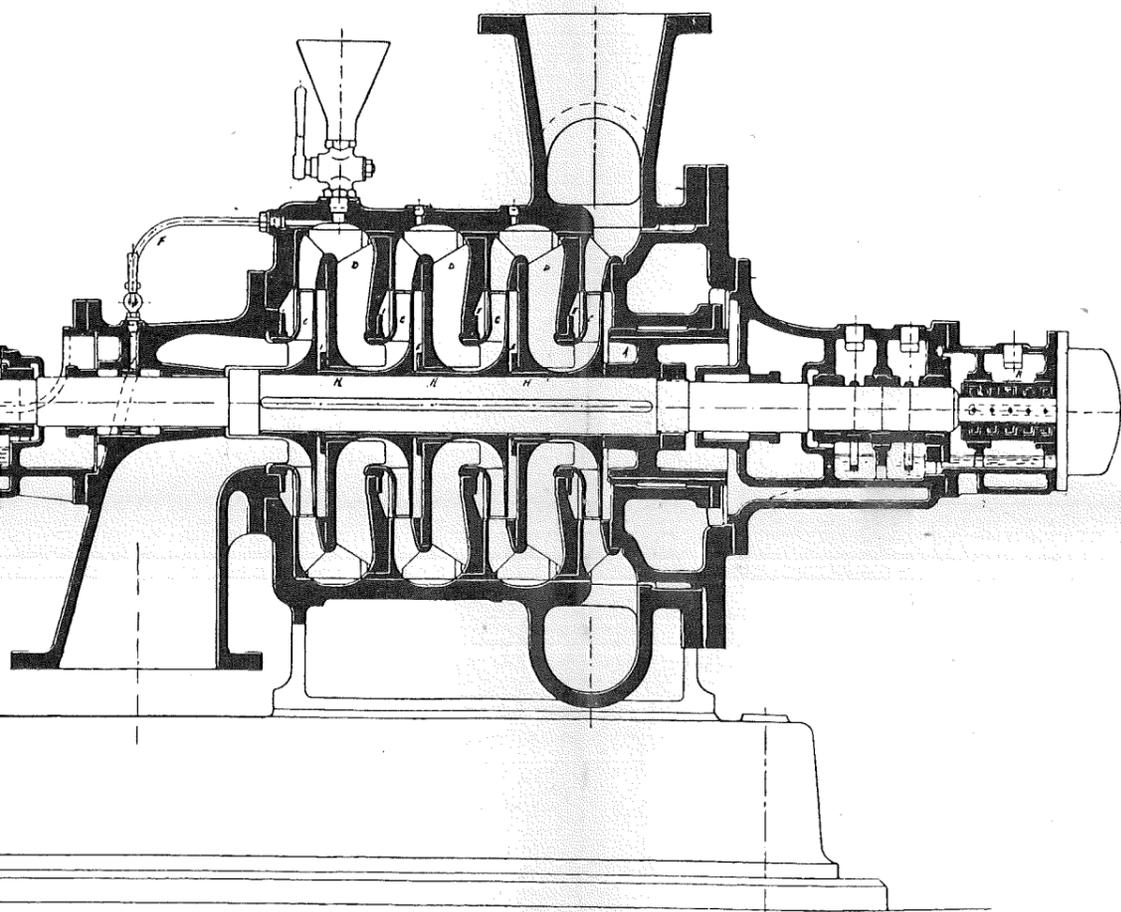


Fig. 3.

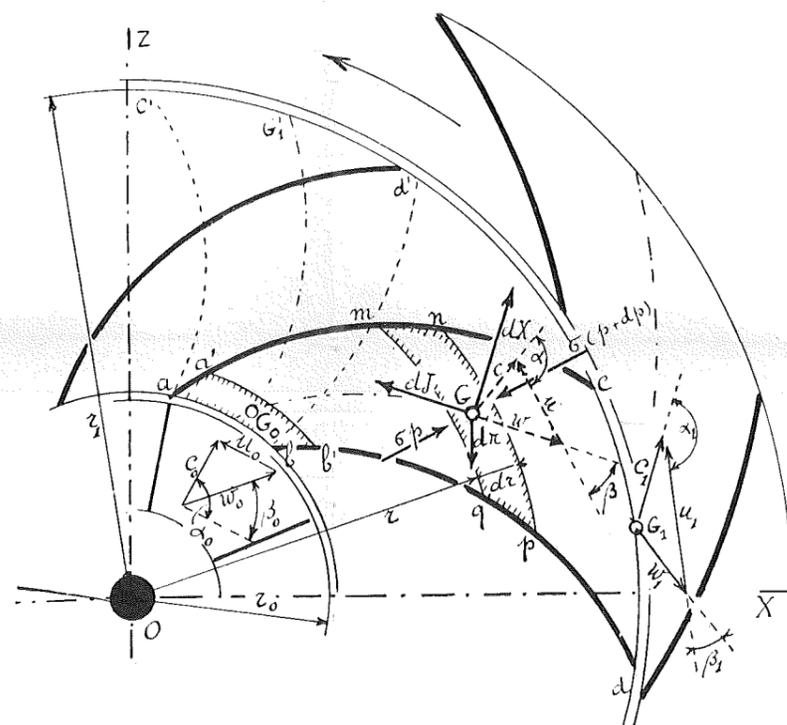


Fig. 4.

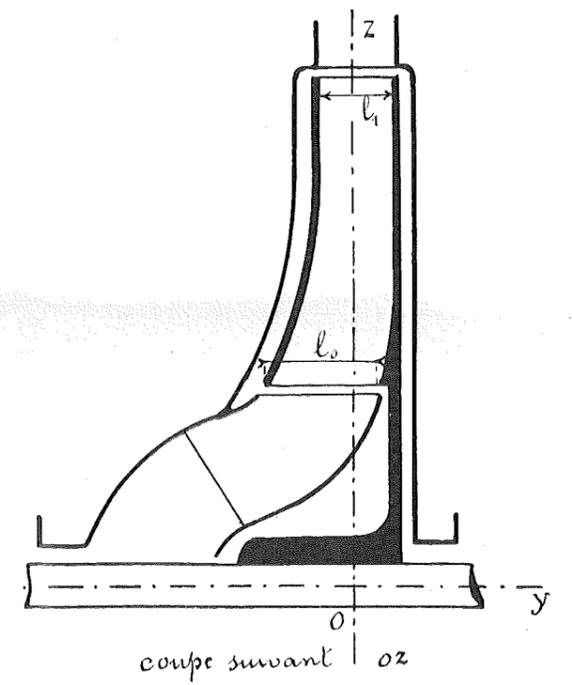
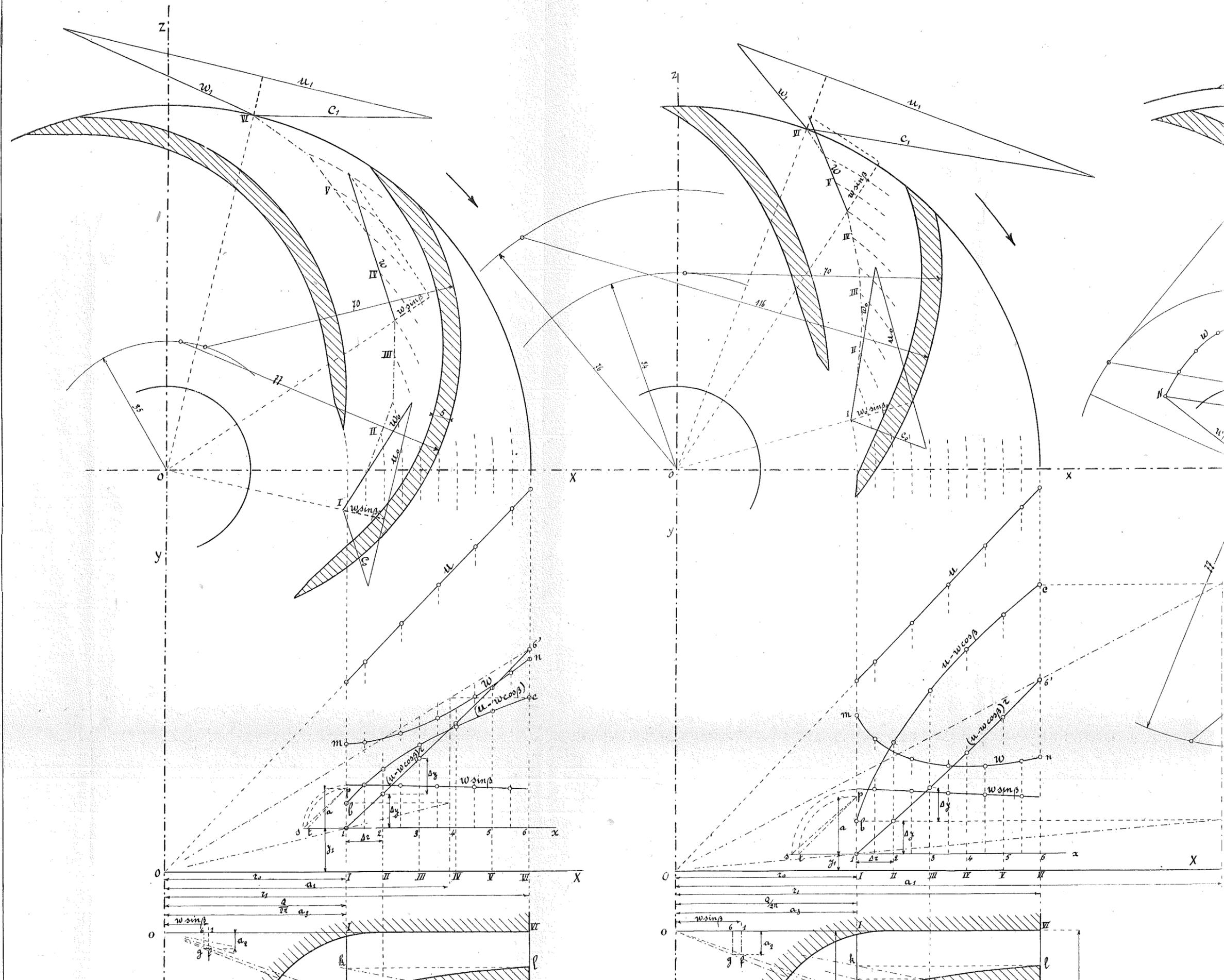
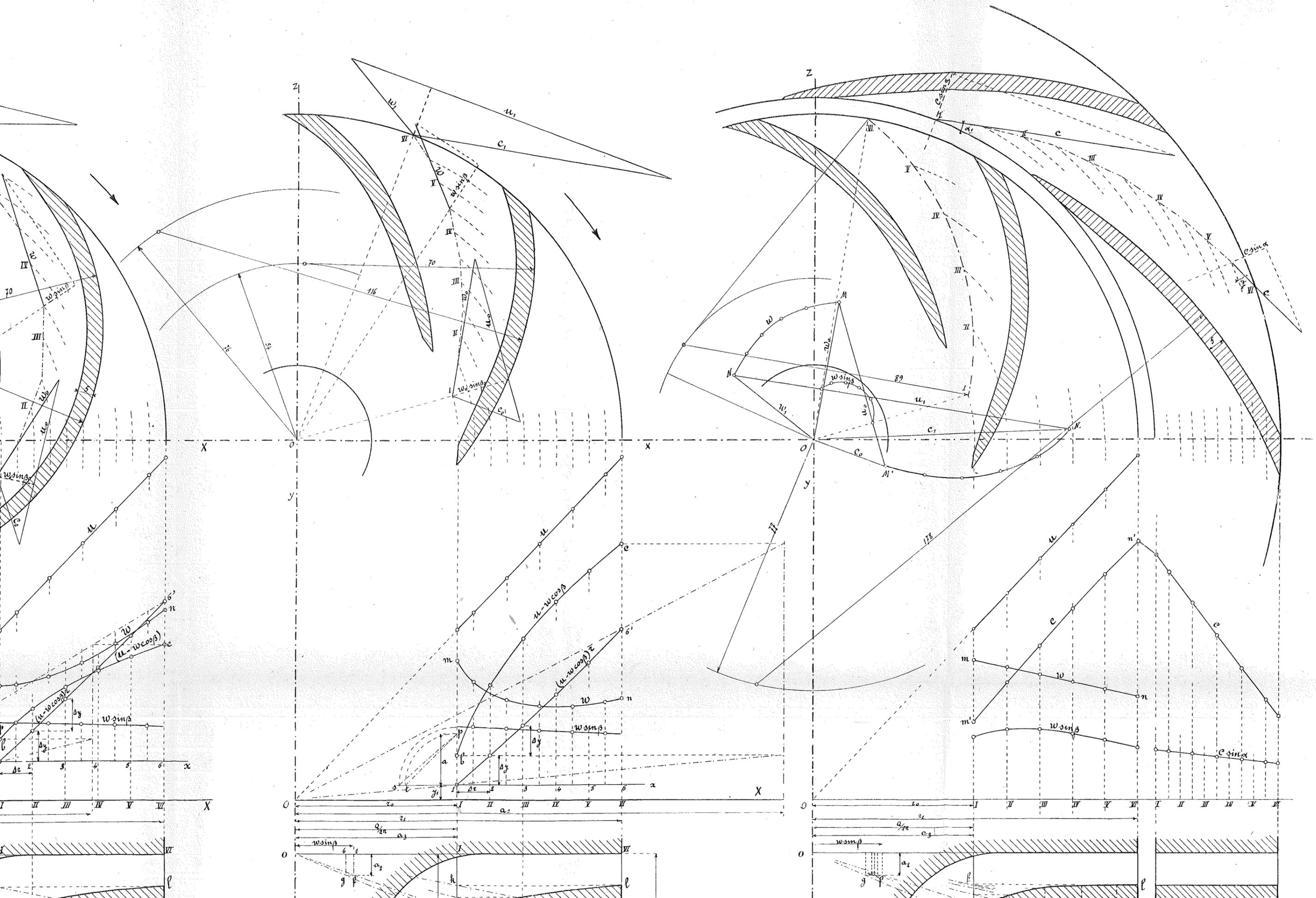


Fig. 4bis.





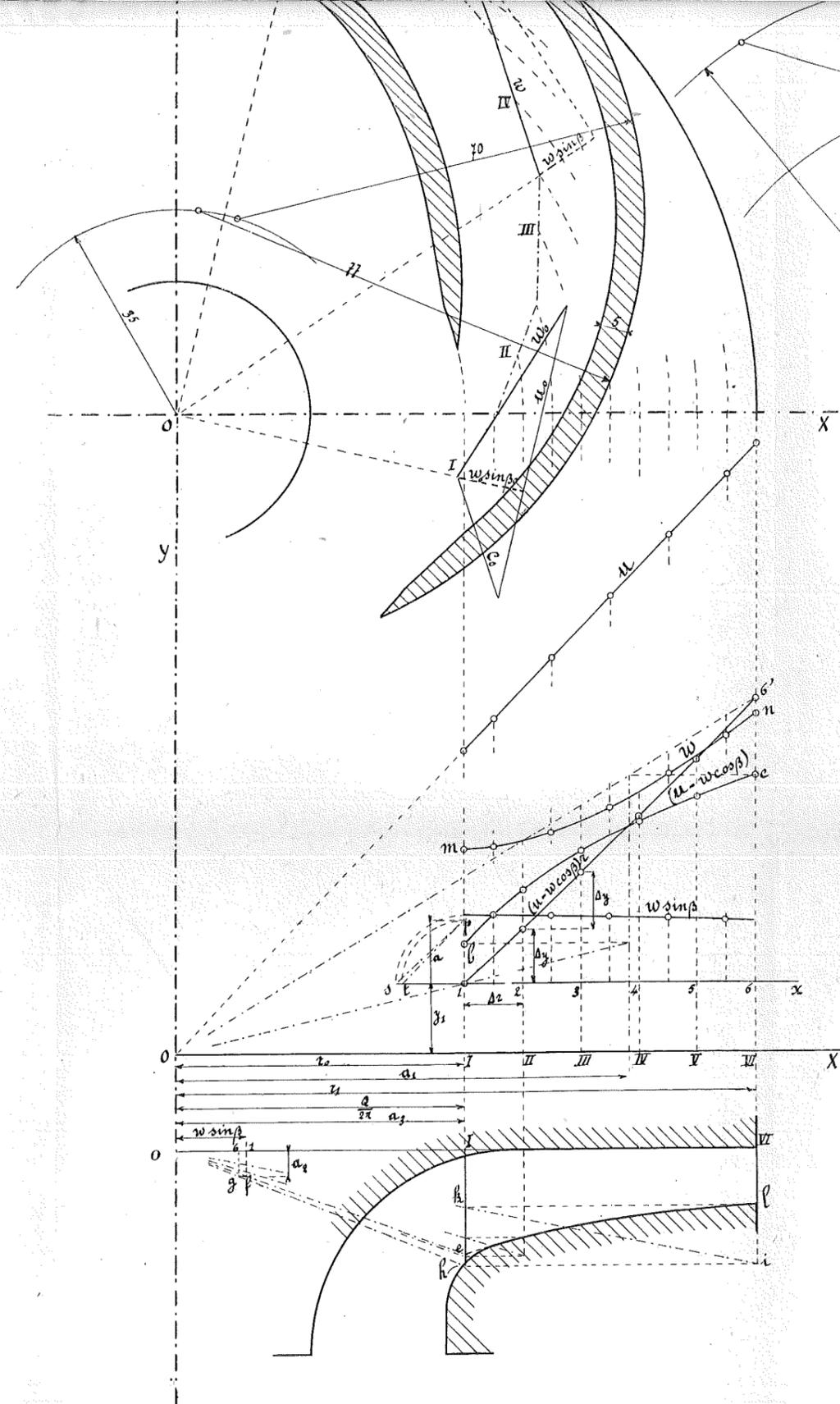


Fig. 25.

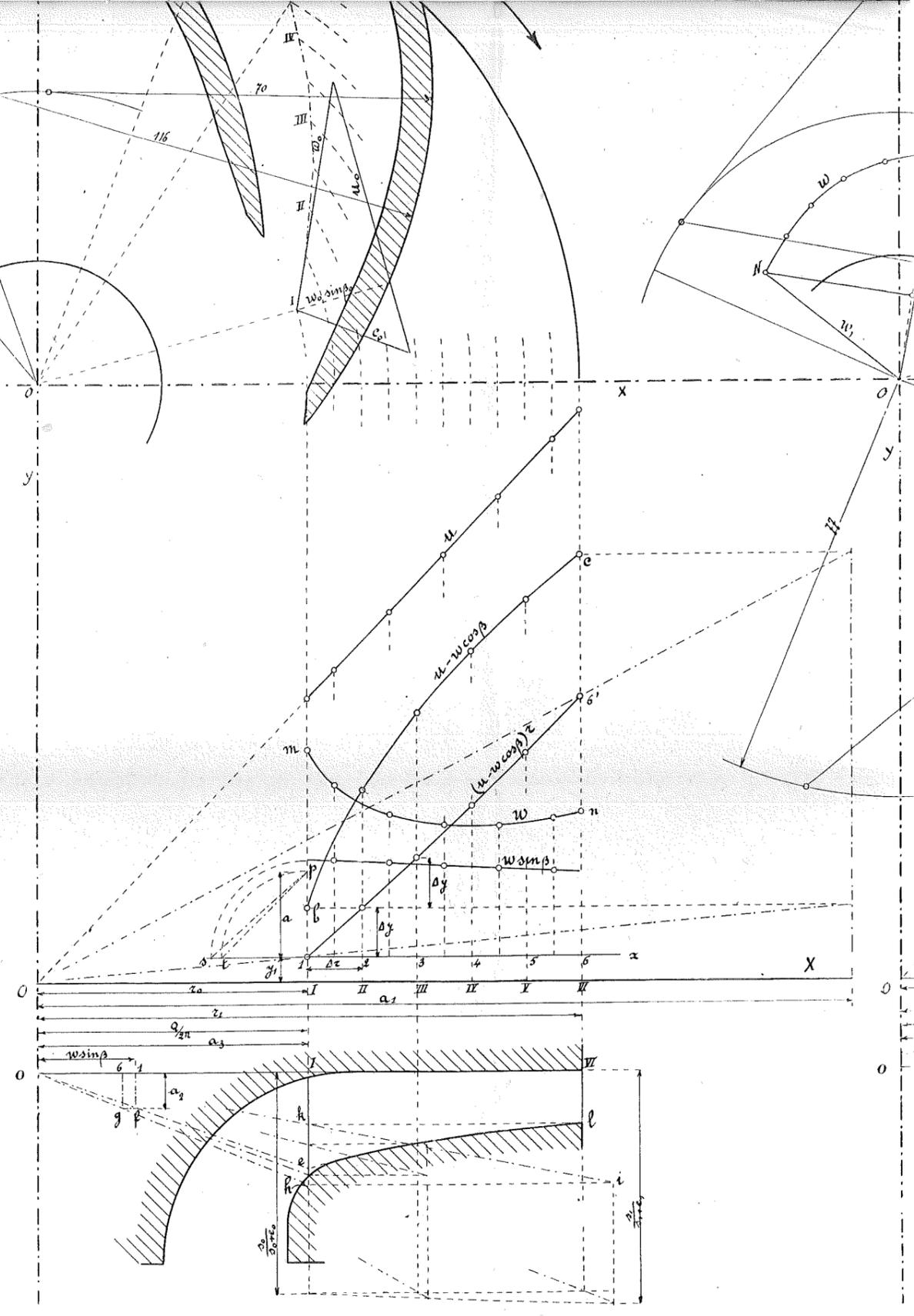


Fig. 26.

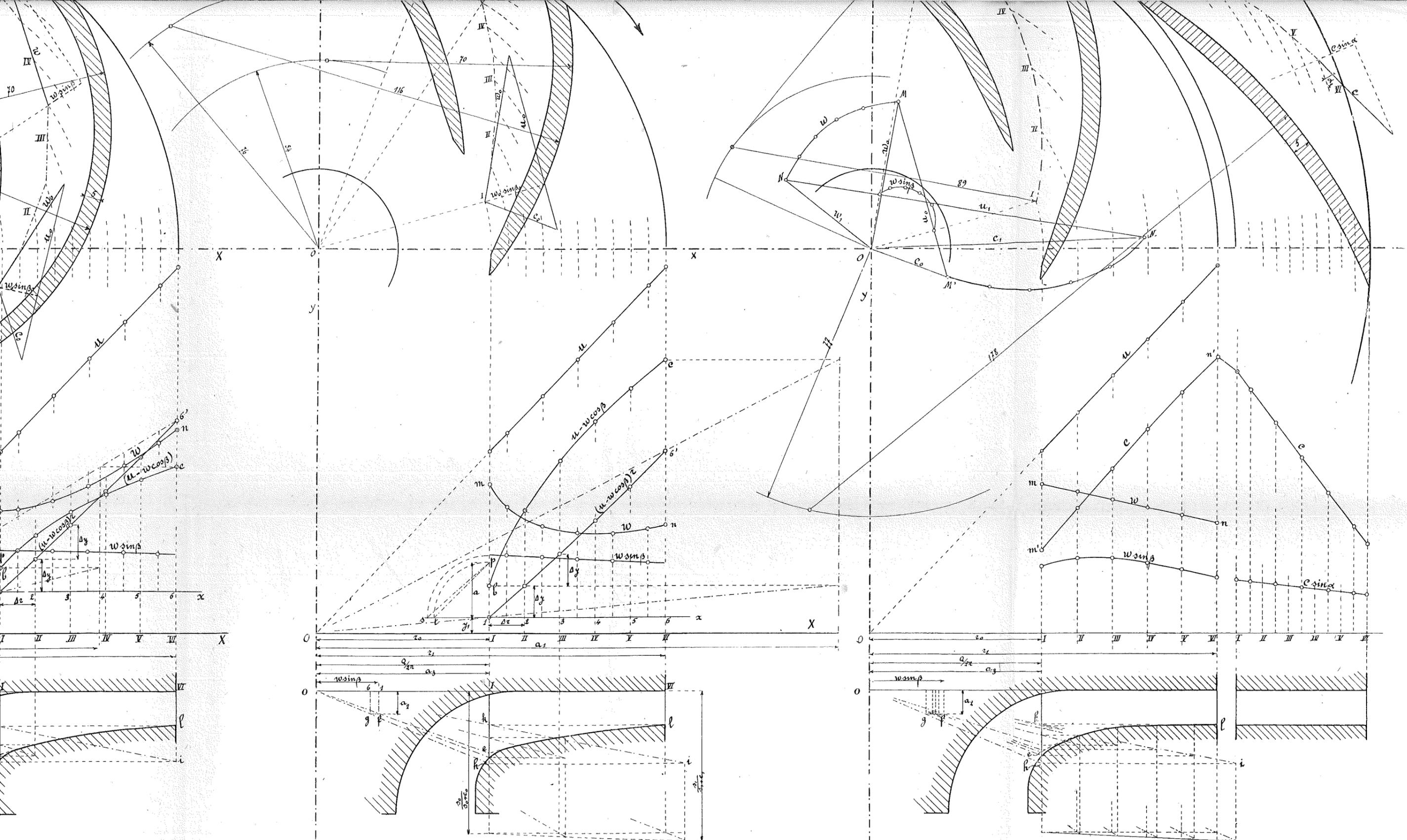


Fig. 26.

Fig. 27.