

Ch. HANOCQ

Ingénieur civil
Professeur émérite de l'Université de Liège

MÉCANIQUE DES FLUIDES
APPLIQUÉE A L'ÉTUDE
DES COQUES ET DES AILES, DE L'HÉLICE
ET DE L'AVION
ET DU VENTILATEUR HÉLICOÏDE

FASCICULE II

Université de Liège
SST - Sciences Appliquées et Mathématiques
1, Chemin des Chevreuils; Bât B52/4
B-4000 LIEGE

LIEGE
IMPRIMERIE GEORGES THONE
1956

AVANT-PROPOS

Le présent fascicule est tiré d'une étude parue dans le n° 4 de 1955 et le n° 1 de 1956 de la revue *Mécanique*, organe de la Société belge des Mécaniciens.

Il fait suite à la publication en 1954, d'un fascicule intitulé *Mécanique des fluides appliquée à l'étude des coques et des ailes* (1).

C'est en utilisant cette base comme point de départ, que nous avons rappelé ici les relations qui conduisent à la détermination de la traînée des corps sans portance, puis à celle de la traînée et de la portance des ailes.

Pour pouvoir aborder le calcul de l'avion, nous avons rappelé une étude que nous avons fait paraître en 1912, dans un ouvrage intitulé *Les Hélices aériennes*, édité par la Librairie Ch. Béranger à Paris, épuisé depuis longtemps.

Pour ne pas allonger l'exposé, dans la revue *Mécanique*, nous nous sommes borné à donner les courbes tirées de la théorie, respectivement pour la poussée P_1 , et pour le travail dépensé par seconde \mathcal{E}' , et cela pour différentes valeurs du pas relatif

Nous y avons joint les courbes du rendement. Fidèle à une méthode que nous avons utilisée pendant plus de trente ans, dans notre enseignement sur la Construction des Machines, en particulier sur les Turbo-machines, nous avons eu le souci constant de montrer, par l'application des formules tirées de la théorie à des exemples concrets, le parti que l'on pouvait tirer des équations que nous avons établies.

Pour permettre à ceux qui voudraient refaire le calcul des courbes caractéristiques de l'hélice, et en poursuivre l'application aux ventilateurs hélicoïdes que nous traitons dans la Cin-

quième Partie, nous avons tiré de l'ouvrage de 1912, la résolution des intégrales qui mènent aux valeurs explicites des fonctions α_1 et β_1 et déterminent respectivement la poussée P_1 et la puissance \mathcal{E}' absorbée par l'hélice.

En abordant ici la théorie des *Ventilateurs hélicoïdes à faible nombre d'aubes*, nous avons eu en vue plus particulièrement, d'apporter une preuve de plus de la valeur des considérations émises dans les deux fascicules, celui de 1954 et le présent de 1956, en partant du théorème de la quantité de mouvement.

Le fait que nous avons pu passer directement peut-on dire, de la théorie de l'hélice à la théorie du ventilateur hélicoïde, et vérifier d'une manière à peine vraisemblable, par une série d'expériences portant sur trois ventilateurs, les courbes caractéristiques déduites de cette théorie, nous paraît devoir entraîner les plus sceptiques à la conviction qu'une signification mathématique s'attache aux relations fondamentales établies tant pour l'aile que pour l'hélice, qu'il s'agisse de l'exposé de 1954 ou de celui de 1956.

Le vrai qui apparaissait encore comme invraisemblable se confond par les contrôles indéfiniment répétés des déductions de la théorie avec le vrai expérimental INATTAQUABLE celui-là.

Professeur
de Cours de Construction des Machines
(1918-1950).

Prix décennal
des Mathématiques appliquées
(1922-1932).

Président-Fondateur
de la Société Belge des Mécaniciens
(1938-1946).

(1) Editeur : Vaillant-Carmanne, place Saint-Michel, Liège.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DES PERTES DUES À LA DÉVIATION
DANS LE DÉPLACEMENT DES CORPS SANS PORTANCE,
LE CYLINDRE ET LA SPHÈRE

INTRODUCTION

§ 1. CAS SIMPLE DE L'ÉCOULEMENT PLAN
AUTOUR DU CYLINDRE

Le sentiment général est que l'on a affaire, dans ce domaine de l'écoulement autour d'un cylindre, à un phénomène si compliqué, qu'il est vain de vouloir, par des moyens simples, atteindre à la vérité.

Ceux qui ont abordé le problème par la voie de la théorie classique, en sont particulièrement convaincus.

Il est vrai que cela ne les empêche pas de faire confiance à la loi de similitude géométrique, qui suppose essentiellement l'existence d'un phénomène d'écoulement éminemment simple.

Nous savons bien qu'ils entourent leur conviction de réserves assez nombreuses, mais toutes réserves faites, il sont bien forcés d'accepter la valeur pratique SANS RESTRICTION.

Comment en serait-il autrement quand on voit que des centaines de millions sont dépensés chaque année, pour opérer sur des modèles au $\frac{1}{10}$ et même au $\frac{1}{50}$?

Examinons donc avec confiance, le cas simple d'un cylindre ayant une profondeur illimitée, enveloppé par un flux d'épaisseur $2e_1$ à l'entrée (fig. 1), dont la vitesse est c .

Ce flux va contourner l'obstacle en s'incurvant vers le haut (et vers le bas, s'il s'agit de la partie inférieure du flux dévié), jusqu'en B, puis changeant de courbure, il va se mettre en dépression le long de l'arc BB_1 pour reprendre à partir de B_1 une incurvation vers le haut qui permettra aux éléments fluides de s'orienter à la sortie, suivant la direction d'entrée.

L'hypothèse de l'envergure infinie permet de ramener le phénomène à un écoulement plan, et si nous faisons l'hypothèse d'un fluide parfait, et d'une paroi sans frottement, nous retrouverons à la sortie tous les éléments animés de la même vitesse c qu'à l'entrée.

L'effort appliqué au cylindre n'est pas nul pour cela. Si nous envisageons une tranche de

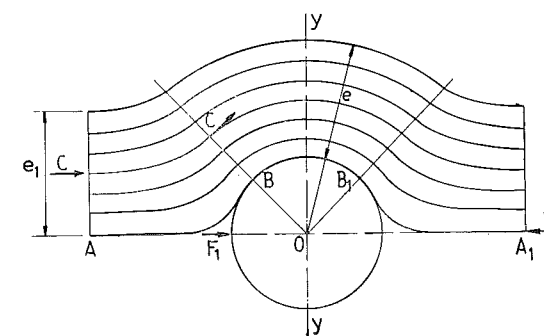


FIG. 1

fluide de profondeur L , nous pourrions calculer la masse M qui s'écoule par seconde, en écrivant :

$$M = \frac{\delta}{g} (eL) \times c. \quad (1)$$

En B où la courbure est nulle et où partant la vitesse se retrouve égale à c en tous les points⁽¹⁾, nous pourrions connaître l'orientation du vecteur vitesse pour tous les points du plan OB, c'est-à-dire, pour tous les éléments de la masse en mouvement.

En vertu du théorème de la quantité de mouvement, la force F , appliquée à l'arc d'entrée, aura pour valeur (fig. 2) :

$$F = M(c - c_2) = M(c - c \sin \alpha) = Mc(1 - \cos \alpha_1) \quad (2)$$

la variation de la vitesse dans la direction de c , vitesse d'entrée, ayant pour expression :

$$c' - c_2 = c(1 - \cos \alpha_1). \quad (3)$$

Ainsi, quelle que soit la complexité du phénomène qui se produit dans la masse fluide

⁽¹⁾ On pourrait nous demander si tous les points du plan OB prolongé au-delà de B correspondent bien au point d'inflexion pour tous les éléments. Nous répondons que, dans le mouvement turbulent, tout se passe comme s'il en était ainsi.

comprise entre la section d'entrée A et la section OB en B, section où la courbure des filets devient nulle, la valeur de F_1 est connue et donnée par la relation (2).

C'est en nous référant aux notations de la figure 2, que nous avons écrit les relations ci-dessus; mais le parallélogramme des vitesses pourrait aussi bien être transporté sur la figure 1, du moment où nous admettons qu'en régime turbulent, tous les points d'inflexion sont contenus dans ce plan.

Avant de poursuivre plus à fond cette étude

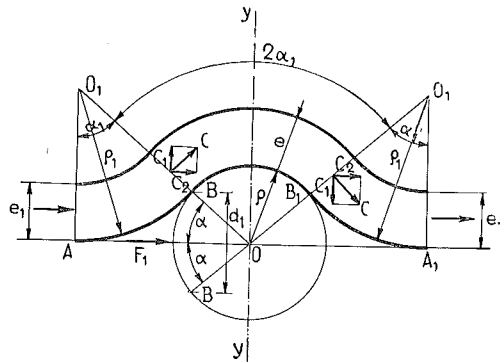


FIG. 2

du cylindre nous voudrions montrer que nous ne commettrons pas d'erreur, en raisonnant comme si nous avions affaire à un écoulement à filets concentriques de centre O_1 .

§ 2. ANALYSE DU CAS LE PLUS SIMPLE D'UN JET FRAPPANT UN PLAN À ANGLE DROIT

Pour rester concret, examinons tout d'abord

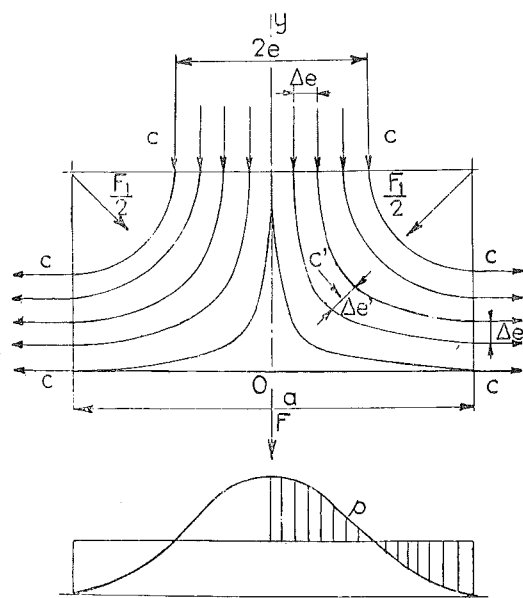


FIG. 3

le cas le plus simple qui puisse se concevoir, celui du plan frappé perpendiculairement par un jet d'épaisseur $2e$ (fig. 3).

En vertu du théorème de la quantité de mouvement, la force F appliquée à la plaque, pour une profondeur du jet égale à L , a pour valeur :

$$F = Mc \quad (4)$$

M étant la masse déviée par seconde, le long de l'envergure L , c étant la vitesse du flux, et cela en vertu de la relation (3), α_1 étant ici égal à 90° .

Pour un élément d'épaisseur Δe

$$F = mc$$

m étant la masse élémentaire qui s'écoule par seconde sous l'épaisseur Δe . Tous les filets comme on le voit, jouent le même rôle, au point de vue de la poussée quelle que soit la courbure prise par chacun d'eux; cela revient à dire que la résultante F resterait la même si tous les filets traçaient des trajectoires concentriques, laissant une zone morte sous le filet le plus intérieur, tangent au plan (fig. 4).

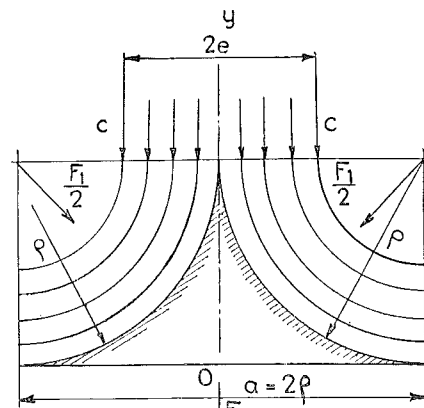


FIG. 4

Or, le long du filet intérieur règne une pression effective qu'il est facile d'évaluer (¹):

$$p = \frac{\delta e}{g} c^2 \quad (5)$$

La valeur de F a donc pour expression :

$$F = 2 p L \varphi = 2 \frac{\delta}{g} e L c^2 \quad (6)$$

Elle peut se mettre sous deux formes :

$$F = Mc \quad (7)$$

(¹) Cette relation est évidente si l'on suppose que le fluide envisagé peut être considéré comme incompressible.

Nous avons montré dans le fascicule de 1954, qu'elle restait vraie, même pour un fluide compressible.

ou :

$$F = \left(\frac{\delta}{g} S c^2 \right) \times C \quad (8)$$

avec :

$$C = \frac{2e}{a} \quad (9)$$

Toutes deux sont indépendantes du rayon ρ .

Ainsi, si la distribution des pressions sur la surface ne nous intéresse pas, si seule l'évaluation de l'effort F est en cause, nous pouvons substituer un flux fictif au flux réel, flux fictif constitué par un ensemble de filets concentriques d'épaisseur totale $2e$.

Remarque. — Le fait que l'on peut substituer l'écoulement à filets concentriques à l'écoulement réel, implique selon nous, que le changement de courbure doit bien se produire dans un plan tel que cc de la figure 3. Pour ceux qui jugeraient ce raisonnement insuffisant, il reste toujours l'argument que, si cette hypothèse était fautive, les coïncidences qui se révéleront par la suite, seraient inconcevables.

§ 3. APPLICATION DE LA RELATION (2) À L'ÉTUDE DES PERTES DANS UN AUBAGE

On pourrait croire qu'il s'agit, dans la présentation que nous venons de faire, du théorème de la quantité de mouvement, d'une vue

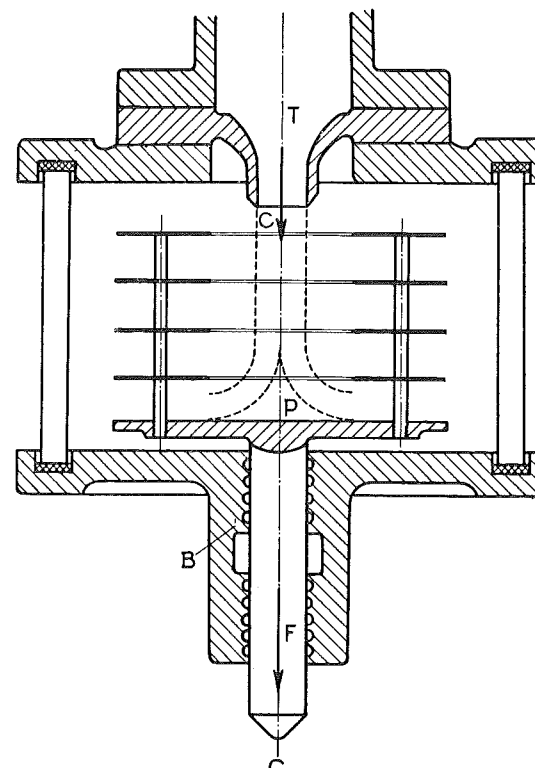


FIG. 5

théorique qui ne trouve qu'une vérification insuffisante, quand on l'applique à un fluide réel.

Nous avons reproduit, figure 5, d'une façon schématisée, l'appareil utilisé par un groupe d'ingénieurs mécaniciens anglais entre 1921 et 1928 (¹), pour déterminer la valeur de c à la sortie d'une tuyère, ou d'un aubage de turbine à vapeur orienté de façon que les jets, en sortant de cet aubage, frappent à angle droit la plaque de fond P.

Cette plaque constitue avec les ailettes parallèles horizontales, un ensemble mobile dans le sens vertical, grâce à un bourrage hydraulique B, qui ne présente qu'une très faible résistance.

La mesure de F peut donc se faire avec précision au moyen d'une balance sur laquelle appuie le pointeau C.

Connaissant la pression et la température à l'entrée de la tuyère, ainsi que la pression régnant dans l'enveloppe, il est possible de déterminer la vitesse théorique d'écoulement c_{th} . D'autre part, par la mesure de F , il est facile de voir qu'il est possible de déterminer la vitesse réelle c d'écoulement en appliquant la relation (4).

La masse M qui s'écoule par seconde est, en effet, connue exactement par la pesée de l'eau provenant de la vapeur ayant traversé la tuyère, vapeur qui a été condensée dans un appareil séparé.

On peut donc déduire de la mesure de M et de la mesure de F le rapport φ des deux vitesses

$$\varphi = \frac{c}{c_{th}} \quad (10)$$

φ est le coefficient utilisé dans le calcul des aubages de turbines à vapeur; c'est lui aussi qui permet l'évaluation à priori, du rendement qui sera atteint.

La valeur de φ oscille entre 0,975 et 0,950 pour fixer les idées, avec les tracés d'aubage les plus parfaits, et il s'avère que les rendements calculés sur cette base, trouvent leur confirmation indiscutable, lorsqu'on passe aux essais de la turbine elle-même.

Il apparaît donc que le théorème de la quantité de mouvement reste applicable à un flux réel comme la vapeur ou l'air, non pas avec une certaine approximation, mais avec une rigueur que l'on peut qualifier de MATHÉMATIQUE.

Il n'est pas toujours facile d'habituer son esprit à une vue aussi simpliste; encore faut-il savoir s'y contraindre, puisque contre les faits

(¹) Voir à ce sujet les numéros de la Revue *Engineering*; *First report of steam nozzles research Committee*, 21 janvier 1921, 23 mars et 20 avril 1923, 23 mai 1924, 15 et 22 mai 1925, 27 janvier et 3 février 1928.

expérimentaux bien établis, il n'est pas possible de montrer quelque mauvaise humeur.

C'est ainsi que nous nous croyons autorisé par la suite, à substituer au flux réel, le flux fictif à trajectoires concentriques, lorsque nous voulons connaître exclusivement l'action du flux sur l'obstacle.

Nous avons pu, par une déduction logique des faits expérimentaux que nous ne reproduisons pas ici, aller plus loin et considérer comme une relation vraie et générale

$$\frac{e_1}{\rho_1} = 0,365. \quad (11)$$

Nous demanderons que l'on nous fasse crédit pour cette relation, afin de ne pas allonger outre mesure notre exposé.

Devant la constance des vérifications expérimentales que nous avons établies sur cette base, nous pouvons dire en tout cas avec les sceptiques : « Tout se passe tout de même comme si cela était vrai. »

§ 4. APPLICATION DE LA RELATION (2) AU DIÈDRE

Utilisons cette propriété du flux à filets concentriques pour établir la valeur de $2F_1$ dans le cas du flux dévié par deux plaques formant entre elles un angle $2\alpha_1$, la bissectrice du dièdre ainsi formé, coïncidant avec la direction du flux (fig. 6). Nous pourrions substituer au flux réel le flux fictif formé d'éléments concentriques, d'épaisseur e_1 , de rayon ρ_1 .

Pour calculer la réaction F pour chacun des deux demi-flux, nous partirons de la pression p dans la zone morte (formule 5) et nous considérerons F comme la résultante de deux forces F' et F'' appliquées l'une à la surface fictive AE, l'autre à la surface réelle EB; la première est équilibrée par la force née du demi-flux opposé; la seconde appliquée à la paroi d'étendue aL , donnera lieu à une composante F_1 égale à :

$$F_1 = (aL) \sin \alpha_1 \times p = (aL) \frac{\delta e_1}{g \rho_1} c^2 \sin \alpha_1. \quad (12)$$

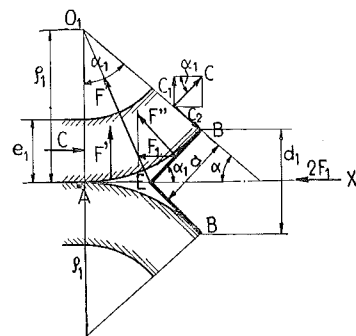


FIG. 6

Si nous désignons par d_1 la distance des deux points de tangence B, il viendra :

$$\frac{d_1}{2} = a \sin \alpha_1 \quad (13)$$

et partant la réaction totale $2F_2$ pourra s'écrire :

$$2F_1 = (d_1 \times L) \frac{\delta}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho_1} = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) \times C \quad (14)$$

avec :

$$C = \frac{e_1}{\rho_1} \quad (15)$$

S désigne la section au maître-couple du dièdre formant l'obstacle, C le coefficient de résistance qui caractérise l'obstacle.

La réaction est donc connue, dès que l'on est en mesure de fixer la valeur de $\frac{e_1}{\rho_1}$ ou si l'on veut, de déterminer le rayon de l'arc d'approche ρ_1 tangent au plan, puisque e_1 est une donnée.

Or le rapport $\frac{e_1}{\rho_1}$ est fixé par la relation (11).

Ainsi la réaction n'est pas nulle, même si nous raisonnons sur un fluide parfait.

L'existence de cette réaction n'implique d'ailleurs aucune perte, puisque la vitesse de sortie reste égale à la vitesse d'entrée.

Où réside, en apparence, la contradiction ?

C'est que, dans l'hypothèse où le dièdre serait remorqué dans un flux parfait au repos, la même image du phénomène pourrait encore apparaître par la pensée, tout au moins, comme satisfaisante, bien que sa nature en serait profondément modifiée : la vitesse c deviendrait une vitesse relative; seule la composante e_1 apparaîtra comme une vitesse réelle.

Le travail \mathcal{C} dépensé pour remorquer l'obstacle pourrait se calculer en écrivant :

$$\mathcal{C} = 2F_1 \times c \quad (16)$$

ou d'une façon plus explicite, en utilisant la relation (12) :

$$\mathcal{C} = \left(e_1 L \frac{\delta}{g} c \right) c^2 \frac{d_1}{\rho_1} = \frac{M}{2} c^2 \frac{d_1}{\rho_1}$$

Remplaçant c par la valeur $\frac{c_1}{\sin \alpha_1}$, il viendra :

$$\mathcal{C} = \frac{M c_1^2}{2} \frac{d_1}{\rho_1} \frac{1}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{M c_1^2}{2} \quad (17)$$

le facteur $\frac{d_1}{\rho_1} \frac{1}{\sin^2 \alpha_1}$ étant égal à 1, quand il s'agit d'angles α_1 faibles.

Ainsi l'énergie dépensée par seconde pour remorquer l'obstacle est égale à l'énergie apparue

$$\frac{M c_1^2}{2}$$

par seconde dans le fluide au repos.

Cette énergie est perdue dans la masse par les tourbillons qui y prennent naissance, même s'il s'agit d'un fluide se comportant, par ailleurs, comme un fluide parfait.

En d'autres termes, l'image que nous nous étions faite du phénomène ne peut subsister au-delà de la section BB (fig. 6), lorsqu'on la trans-

pose du mouvement absolu au mouvement relatif.

La théorie hydrodynamique basée sur la notion du fluide parfait, ne peut évidemment introduire l'hypothèse du fluide parfait « qui tourbillonne », et c'est de là que vient son impuissance.

CHAPITRE PREMIER

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DES DÉDUCTIONS TIRÉES DE LA THÉORIE POUR LE CYLINDRE

§ 1. APPLICATION DE LA RELATION (2) AU CYLINDRE

Reprenons à présent l'étude du phénomène de l'écoulement devant l'obstacle formé par un cylindre dont l'axe perpendiculaire au dessin, se prolonge indéfiniment.

Les éléments qui constituent la veine d'épaisseur $2e_1$ (fig. 7) s'orientent comme nous l'avons déjà fait ressortir, vers le haut, et passent en un certain point B par une courbure nulle pour reprendre au-delà de B un mouvement incurvé vers le bas à la différence de ce qui se passe dans le cas du dièdre examiné dans le chapitre « Introduction ».

Substituons au flux réel le flux fictif à élé- qu'on n'a en vue que la recherche de la poussée résultante sur le cylindre.

La continuité implique $e_1 = e$; or la théorie classique elle-même, établit que

$$\frac{e}{\rho \alpha} = \text{constante} = \pi. \quad (18)$$

Cette relation conduit à

$$\rho_1 \alpha_1 = \rho \alpha \quad (19)$$

soit

$$\rho_1 = \rho \frac{\alpha}{\alpha_1} = 2\rho \quad (20)$$

puisque géométriquement

$$\alpha = 2\alpha_1. \quad (21)$$

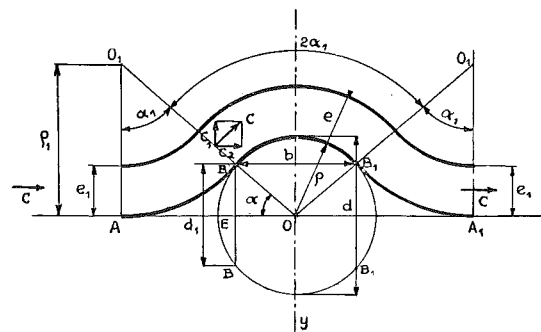


FIG. 7

Le rayon ρ_1 est donc connu en fonction de ρ .

S'il s'agit d'un flux d'épaisseur illimitée, dévié par l'obstacle (ce qui correspond au cas réel rencontré en aviation), l'expérience démontre que tout se passe comme si l'on avait affaire à un flux d'épaisseur limitée e_1 , dont tous les éléments seraient déviés du même angle α_1 ; c'est cette épaisseur qui figure dans la relation classique (18) (1).

Dans ces conditions, lorsqu'on a affaire à un flux d'épaisseur illimitée, cas concret d'application, l'image du phénomène représenté par la figure 7, peut subsister, et l'on peut appliquer la relation (11) pour déterminer e_1

$$e_1 = 0,365 \rho_1 = 0,365 \times 2\rho = 0,730 \rho. \quad (22)$$

La figure 7 est donc entièrement déterminée pour le cas tout au moins où la vitesse c peut être considérée comme constante en chaque point à l'entrée, qu'il s'agisse d'un flux d'épaisseur limitée, ou d'un flux d'épaisseur illimitée.

Or, le long de l'arc AB toute perte est exclue (2), si bien que c'est en toute rigueur que l'on peut déterminer le point d'inflexion en écrivant :

$$\rho_1 = (\rho_1 + \rho) \sin \alpha = 1,5 \rho_1 \sin \alpha. \quad (23)$$

D'où la valeur de $\sin \alpha$ et α

$$\sin \alpha = \frac{1}{1,5} = 0,672 \quad \text{et} \quad \alpha = 42^\circ. \quad (24)$$

Nous montrerons plus loin que cette valeur de 42° est bien celle qui résulte des mesures manométriques effectuées pour déterminer le

(1) La relation classique donnant la portance P :

$$P = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) c_2 \quad \text{avec} \quad c_2 = k' \sin \alpha$$

contient le rapport k' qui, pour l'envergure infinie, prend la valeur

$$k' = \frac{e}{a} = \frac{e}{\rho \alpha} = \pi.$$

(2) Les expériences anglaises sur la recherche du coefficient ϕ , que nous avons rappelées plus haut, le montrent à l'évidence.

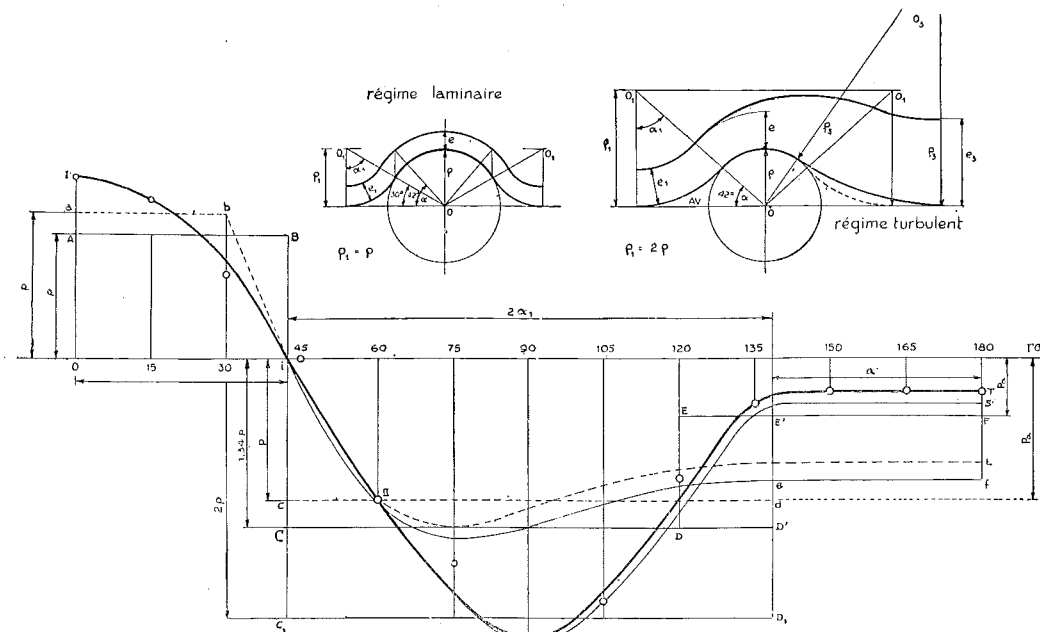


FIG. 8

diagramme de la pression effective p tout le long de la périphérie d'une section droite dans le cylindre (voir fig. 8).

La pression dans la zone morte étant donnée par la relation (5) la valeur de $2F_1$, effort appliqué à la surface projetée BB_1 , pourra s'écrire :

$$2F_1 = (d_1 \times L) \frac{\delta}{g} \frac{e_1}{\rho_1} c^2 = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) \times C \quad (25)$$

avec

$$C = \frac{d_1}{d} \times \frac{e_1}{\rho_1} = 0,672 \times 0,365 = 0,245. \quad (26)$$

C'est la valeur expérimentale observée pour la face avant BB_1 , à 2 % près (0,250 au lieu de 0,245).

L'existence de cette force $2(2F_1)$ pour l'ensemble des faces avant et arrière, n'implique aucune perte :

Le corps restant au repos, le point d'application de ces deux forces ne subit aucun déplacement.

Imaginons par contre, un cylindre remorqué avec la même vitesse c , dans un fluide au repos : nous ne pourrions retrouver la même image du phénomène; la vitesse c au point de vue du mouvement relatif, reste bien ce qu'elle était dans le premier cas, mais seule la composante c_1 est une vitesse réelle.

Au point d'inflexion, cette composante c_1 ne peut se transformer en énergie potentielle de pression : elle doit donc disparaître par tourbillonnements.

Ainsi en B le tourbillon s'amorce et la vitesse absolue redevient égale à zéro.

Que se passe-t-il au-delà de B ? Si la dépression s'établit qui fait « coller » la veine à la paroi, une déflexion des éléments vers le bas, par rapport à la direction de c en B, s'établit de telle façon qu'en B_1 chacun de ces éléments a acquis une vitesse absolue c orientée en sens inverse de la première, et qui sera perdue comme celle-ci, par tourbillons.

La perte totale sera donc égale à :

$$2 \times \frac{Mc_1^2}{2}$$

c'est-à-dire le double de celle observée dans le cas du dièdre.

Il y aura donc égalité entre l'énergie dissipée par tourbillonnement et l'énergie dépensée pour la remorque du cylindre.

Ainsi dans le cas du cylindre remorqué, la poussée sur le cylindre est strictement double de la poussée sur la face avant, B_1 étant nécessairement le symétrique de B.

Dans le cas du cylindre immobile dans un flux de vitesse c , au contraire, la poussée n'est pas le double parce que la perte par tourbillons au premier point d'inflexion en B, réduit la vitesse c d'écoulement à la composante c_2 si bien que la dépression arrière n'est pas égale à la surpression avant.

Non seulement il n'y a pas égalité en valeur absolue, mais le point d'inflexion B_1 est déplacé : il n'est plus le symétrique de B, puisque la continuité exige

$$e_1 c = e c \quad (27)$$

et que e ayant nécessairement grandi, le rayon de courbure du flux qui va se redressant à l'arrière, doit nécessairement grandir en vertu de la relation (11).

Le dessin correspondant au régime turbulent situé dans le coin de droite de la figure 8, montre l'allure du phénomène.

C'est schématisé ce que l'on constate dans la réalité; et alors que, pour le cylindre remorqué, la traînée est le double de la résistance avant, dans le cas du cylindre au repos dans le flux de vitesse c , la résistance totale n'atteint que

1,27 fois

la poussée avant, soit pour C total relatif au cylindre :

$$C = 1,27 \times 0,245 = 0,310 \quad (1).$$

§ 2. ANALYSE DES RÉSULTATS D'EXPÉRIENCES

Pour ne pas allonger cet exposé, nous nous bornerons à reproduire (fig. 8) le diagramme qui donne les résultats de mesure de pression effectuée au moyen d'un manomètre, en différents points équidistants sur la périphérie du cercle de centre O, donnant la section droite du cylindre.

Nous avons porté α en abscisse, p en ordonnée.

Les points blancs donnent les valeurs observées, et nous avons réuni par une courbe continue en trait fort, ces différents points, en tenant compte aussi CORRECTEMENT que possible de leur dispersion.

On voit que le point de nulle pression correspond bien à 42° .

Si nous traçons la courbe des pressions p en fonction non plus de α , mais de $r \sin \alpha$ (fig. 9) nous obtiendrons en surfaçant l'aire comprise entre I et i, et en divisant le résultat trouvé par l'abscisse o i, la valeur de la pression moyenne p_m , car

$$p_m = \frac{F_1}{L \times \frac{d_1}{2}} = \frac{\int_0^\alpha p \cos \alpha d\alpha}{\int_0^\alpha p (d \sin \alpha)} \quad (28)$$

On trouve ainsi pour valeur de C correspondant à la surface avant projetée BB_1 que nous désignerons par C_{AV}

$$C_{AV} = 0,250. \quad (29)$$

C'est à 2 % près la valeur que nous avons déduite de la théorie (relation 26) exposée plus haut.

(1) La valeur indiquée, comme relevant de l'essai au tunnel est généralement plus faible, mais il ne faut pas perdre de vue que l'allure de la courbe au-delà du premier point d'inflexion peut varier fortement avec l'état de turbulence du flux.

C'est la seconde coïncidence satisfaisante que nous notons, mais nous n'en resterons pas là.

Poursuivons pour cela l'analyse des faits observés au-delà du premier point d'inflexion, et tout d'abord entre les deux points d'inflexion.

La dépression théorique p , si la vitesse c se maintient, sera le double en valeur absolue de la surpression avant, puisque

$$e = e_1 \quad \text{et} \quad \rho_1 = 2\rho$$

$$p = \frac{\delta}{g} \frac{e}{\rho} c^2 = 2 \left(\frac{\delta}{g} \frac{e_1}{\rho_1} c^2 \right). \quad (30)$$

En réalité, par suite de la disparition de la composante c_1 (1) par tourbillons en B (fig. 6), la vitesse c est ramenée à la composante c_2 :

$$c_2 = c \cos \alpha_1 = c \sin \alpha = 0,666 c. \quad (31)$$

Pour rester dans nos possibilités d'analyse, imaginons que la vitesse c_2 apparaisse, avec sa valeur ci-dessus, dès le point B et se maintienne constante le long de l'arc BB_2 : la pression réelle p_x pourra s'évaluer par la relation :

$$-p_x = \frac{\delta}{g} \frac{c_2^2}{\rho} = \frac{\delta}{g} c^2 \times 0,666 \frac{e_1}{\rho}$$

$$= 1,33 \frac{\delta}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho_1} \quad (32)$$

puisque la continuité exige :

$$e_2 c_2 = e_1 c. \quad (33)$$

Cela conduit à :

$$p_x = -1,33 p. \quad (34)$$

La dépression théorique le long de l'arc BB_1 est donc représentée, sur la figure 9, par la droite C_1D_1 .

Théoriquement, la droite C_1D_1 devrait se prolonger tout le long de l'arc $2\alpha_1$; mais l'arc de fuite ne peut plus être égal à l'arc d'approche puisque la continuité exige que (fig. 8, au-dessus) :

$$e_3 = c_2 = \frac{1}{0,666} e_1 = 1,5 e_1. \quad (35)$$

Pour l'arc de fuite, nous devons donc utiliser le rayon ρ_3 (fig. 8, dessin de droite) :

$$\rho_3 = \frac{e_3}{0,365} = \frac{1,5 e_1}{0,365} = 1,5 \rho_1.$$

Nous en déduisons que la pression le long de

(1) Si nous n'admettions pas la disparition de la composante par les tourbillons qui se produisent en B, il n'y aurait aucune correspondance entre les résultats observés au tunnel et les résultats obtenus avec le cylindre remorqué; cela voudrait dire que les essais au tunnel ne donnent aucun résultat valable pour les applications qui toutes, correspondent à l'obstacle remorqué. On sait qu'il n'en est pas ainsi.

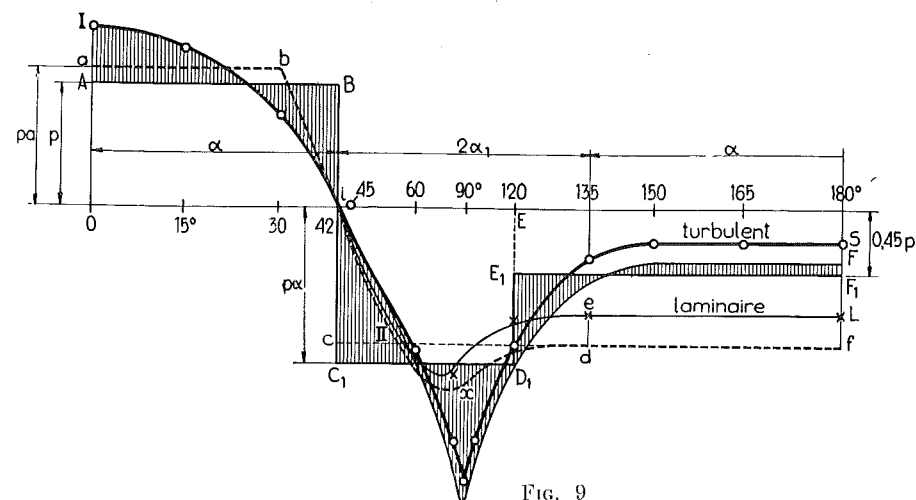


FIG. 9

cet arc est égale à :

$$p_3 = \frac{\delta}{g} c_3^2 \frac{e_3}{\rho_3} = \frac{\delta}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho_1} \times 0,666^2 = 0,45 p \quad (36)$$

étant donné que

$$\frac{e_3}{\rho_3} = \frac{e_1}{\rho_1}$$

et que

$$c_3 = c_2 = 0,666 c.$$

Nous pourrions également calculer α_3 , puis que :

$$\rho_3 = (\rho + \rho_3) \cos \alpha_3 = 1,5 \rho_1. \quad (37)$$

Comme ρ est égal à $\frac{1}{2} \rho_1$,

$$\cos \alpha_3 = \frac{1,5}{2} = 0,75,$$

soit $\alpha_3 = 41^\circ$.

Que peut-on déduire du diagramme expérimental à cet égard ?

En utilisant la courbe expérimentale en trait fort de la figure 8 corrigée pour tenir compte des pertes par frottement sur l'arc BB_1 , nous obtiendrons la courbe en trait faible de la figure 9.

On pourra calculer la pression moyenne en déterminant le rectangle équivalent à l'aire limitée par cette courbe s'étendant de i à E.

On verra ainsi que le rectangle $iC_1D_1E_1E$ vaut l'aire délimitée entre les points d'abscisse i et E par la courbe expérimentale, et que p_x ainsi trouvé, est bien égal à la valeur calculée ci-dessus, 1,33 p.

Pour ce qui concerne l'angle calculé α_3 on voit sur la figure 9 qu'il n'atteint que 30° et non 41° , puisque :

$$(90^\circ + \alpha_3) = 131, \quad (38)$$

alors que le point d'abscisse E correspond à 120° .

Il ne faut pas s'attendre évidemment à une véritable superposition de toutes les valeurs calculées et observées, étant donné que le tracé de la courbe expérimentale a dû être corrigé pour tenir compte du terme frottement, et qu'à partir du point d'inflexion B, l'épaisseur du flux grandit plus ou moins rapidement suivant la loi de décroissance de c_2 , et que, dans notre raisonnement, nous avons admis, le passage brusque de

e_1 à e_2 .

Si nous traçons, à présent, la droite E_1F_1 horizontale définissant le rectangle équivalent pour l'arc de sortie, nous voyons qu'elle se superpose d'une façon plus que satisfaisante avec celle calculée (relation 36)

$$p_x = 0,45 p.$$

Cette coïncidence ne s'est produite toutefois que parce que nous avons admis qu'au second point d'inflexion, la composante c_1 (fig. 2) n'était pas absorbée par les tourbillons, comme cela s'était produit au premier point d'inflexion.

Cela est parfaitement possible dans le cas de l'écoulement le long de l'obstacle AU REPOS : l'énergie perdue par kilogramme de fluide écoulé, ne serait alors représentée que par :

$$\frac{1}{2g} (c^2 - c_3^2) = \frac{1}{2g} c_1^2 \quad (39)$$

c'est-à-dire égale à celle qui est dissipée par tourbillons au premier point d'inflexion.

En est-il toujours ainsi ? Nous avons fait observer plus haut que la courbe de pression au-delà du premier point d'inflexion était fortement influencée par l'état de turbulence du flux enveloppant l'obstacle, ce qui revient à dire que pour des causes infimes, des différences importantes peuvent apparaître. Ce qui est certain, c'est que dans le cas de l'obstacle remorqué, il ne peut en être ainsi : la perte de

§ 3. CONCLUSIONS

la composante verticale est inévitable, aux deux points d'inflexion, ce qui conduit à la conclusion : qu'il ne peut y avoir superposition des deux images :

a) celle représentant le corps au repos enveloppé du flux de vitesse c ,

b) l'autre représentant le corps remorqué avec une vitesse c , dans un flux au repos.

Nous avons été amené à aller plus loin dans cette affirmation, en faisant cette remarque que la vitesse relative le long de l'arc BB_1 , dans le cas du corps remorqué, reste évidemment égale à c puisqu'il s'agit ici de la vitesse relative, et cela malgré la disparition de l'énergie apparue et perdue par tourbillons au point B.

Dans ces conditions, pour l'obstacle remorqué, le point B_1 est le symétrique de B, par rapport à la verticale OY , et la perte d'énergie à l'arrière est strictement égale à la perte d'énergie à l'avant.

Le lecteur ne s'étonnera pas si nous lui disons que nous avons eu quelque peine à nous arrêter à ces conclusions qui paraissent en contradiction avec ce qui est admis généralement. Pour nous, elles apparaissent, à présent, tout à fait évidentes.

Désireux de rassurer ceux qui ne nous suivent qu'avec peine, nous ajouterons tout de suite, que, quand il s'agit non plus du cylindre, mais du cylindre caréné à l'allongement optimum, la différence entre les deux exemples envisagés est négligeable, puisqu'elle ne dépasse par 2 %.

Nous pouvons souligner, en effet, que, si pour le cylindre, la perte $\frac{Mc_1^2}{2}$ est égale au $0,45 \frac{Mc^2}{2}$ valeur de l'énergie totale mise en jeu dans la déviation (puisque $c_1 = 0,672 c$), pour le cylindre caréné $\frac{Mc_1^2}{2}$ n'atteint que $0,01 \frac{Mc^2}{2}$.

Nous n'examinerons pas ici, le cas du régime laminaire qui conduit aux résultats expérimentaux fournis par la courbe $iIIeL$ (fig. 9), très différents de ceux observés en régime turbulent.

Puisque nous avons à compter cette fois avec des pertes par frottement plus importantes proportionnellement (par rapport à l'énergie mise en jeu), nous avons admis que la courbe expérimentale passe de $iIIeL$ à $iIIxdf$. De cette façon nous avons retrouvé toutes les coïncidences que nous venons de signaler entre valeurs observées et valeurs calculées, aussi bien pour le régime laminaire que pour le régime turbulent.

Dans le fascicule de 1954, nous avons utilisé la même méthode pour l'analyse des résultats observés sur la sphère et nous pouvons dire que nous avons pu énoncer les mêmes conclusions, avec la même rigueur.

Lorsqu'il s'agit du cylindre ou de la sphère, le facteur frottement joue un rôle presque négligeable : la surface qui entre en jeu est, en effet, très faible puisque elle ne s'étend que le long de l'arc BB_1 s'il s'agit d'un cylindre, sur la calotte sphérique BB_1 s'il s'agit de la sphère, et d'autre part le facteur déviation prend dans ces deux cas, une importance très grande.

La résistance globale à l'avancement peut donc se calculer par la formule (25) en multipliant le résultat par 2 si le corps est remorqué, par 1,27 environ si le corps est au repos.

Pour établir ce dernier chiffre, 1,27, on doit noter que la surface arrière s'étend sur un arc 60° mais ne supporte qu'une dépression égale à $0,45 p$, tandis qu'à l'avant sur l'arc compris entre 42° et 60° , règne une dépression qui atteint une valeur moyenne de $1,33 p$.

La valeur de C pour la face avant que nous avons désignée par C_{AV} , ne dépend strictement pas des dimensions.

Par contre, pour la partie BB_1 , c'est par approximation que l'on peut considérer le terme frottement comme inexistant.

En conséquence, tant pour la valeur de C que pour la valeur de C_{AV} , le nombre de Reynolds n'intervient pas. La valeur globale de la résistance sera strictement proportionnelle à $(S \frac{\delta}{g} c^2)$

quelles que soient les dimensions : elle sera donc proportionnelle à la section au maître-couple, au poids spécifique δ , et au carré de la vitesse c .

Pour les corps carénés, il ne saurait en être ainsi ; nous verrons au chapitre suivant, que la résistance totale est la somme de deux termes, l'un, se rapportant à la déviation, qui reste indépendante des dimensions, l'autre, se rapportant au frottement qui lui dépend du coefficient de Reynolds et partant des dimensions.

Avant de passer à l'étude de l'allongement optimum pour les corps carénés, nous voudrions signaler les belles expériences de M. Escande (*) sur l'écoulement dans une tuyère fortement divergente.

Elles font apparaître de manière spectaculaire, le phénomène d'écoulement d'une masse fluide contournant un obstacle (en l'occurrence la paroi divergente de la tuyère) en s'incurvant librement le long de celle-ci, comme nous l'avons admis dans l'étude du cylindre.

Présenté en vues cinématographiques, le résultat est impressionnant, et pour les lecteurs qui ont bien voulu nous suivre, il apporte une

(*) M. L. Escande, Membre de l'Institut de France, Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse, Directeur de l'Institut Mécanique des fluides de Toulouse (Notice sur les Travaux scientifiques de M. L. Escande, Editeur Privat, rue des Arts, 14, à Toulouse, 1953).

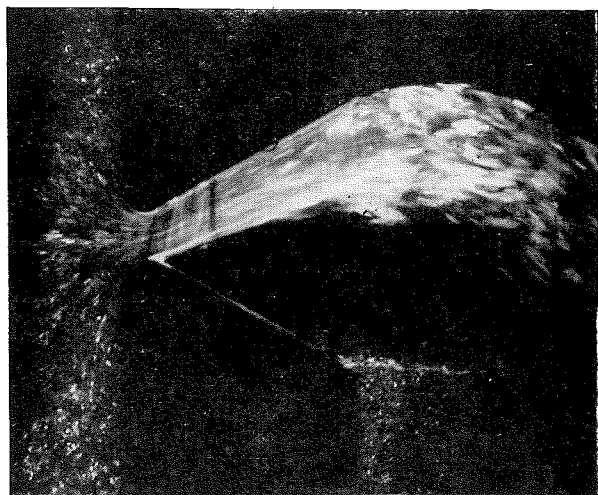


FIG. 10

preuve supplémentaire de la valeur des considérations émises sur le mode d'écoulement du fluide autour du cylindre, à l'origine de cette étude.

Nous reproduisons (fig. 10 et fig. 11) les photographies de l'écoulement à travers une tuyère à parois latérales parallèles au plan de projection, les parois supérieure et inférieure étant très fortement divergentes.

En complément de chacune des photographies, nous avons reproduit avec précision à l'échelle, les particularités observables sur les photographies, de l'écoulement sous une charge $(h-h_s)$, grâce à l'utilisation d'une poudre d'aluminium répandue dans la masse qui s'écoule, et dont les grains, par réflexion de la

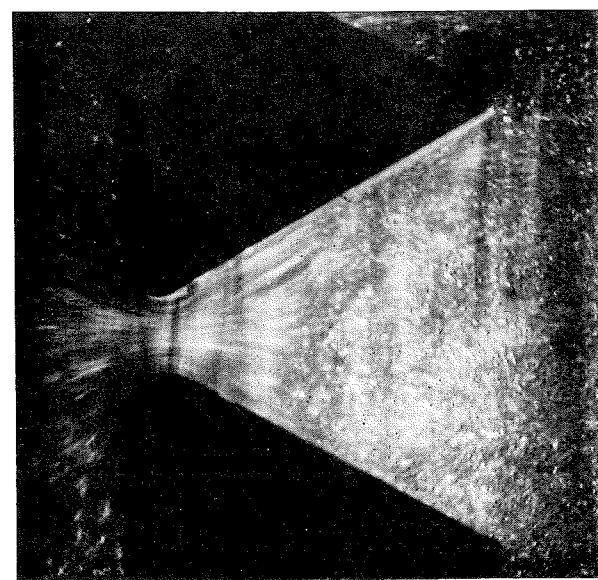


FIG. 11

lumière projetée, tracent les trajectoires suivies par les éléments fluides.

Nous ne voudrions pas nous attarder à une analyse trop minutieuse de ces deux cas d'écoulement qui ne sont réalisables qu'en utilisant une succion d'air en P et P₁, dans le cas de la figure 13, en P seulement dans le cas de la figure 12.

Car la seule différence entre les deux cas expérimentés, c'est, soulignons-le, que dans le cas de la figure 12, on n'a provoqué de dépression qu'en un seul point, en P.

C'est la figure 12 qui nous intéresse au point de vue où nous nous plaçons ici : le flux sollicité par la succion « colle » à la paroi supérieure, et prend, dès la sortie de la section convergente, la forme incurvée de rayon r' .

Le jet qui se forme ainsi a une épaisseur initiale e' et en suivant la paroi supérieure, il va s'évasant nécessairement, puisque la hauteur de charge qui était h au niveau de l'axe, n'est plus que $(h-h'')$ dans la section en B.

On peut voir que les éléments qui ont suivi la paroi supérieure, atteignent un niveau h_s voisin de h , montrant combien les pertes ont été faibles; et pour ceux qui trouvent cela inattendu, nous leur ferons remarquer qu'au surplus, ce jet traverse la masse fluide au repos, car tout le bassin aval est rempli d'eau jusqu'à un niveau variable, mais qui peut atteindre h_s .

La courbure du filet inférieur est nettement marquée et l'on peut dire que l'on ne commet pas d'erreur appréciable, en adoptant pour rayon r' de cette courbure, celle que l'on déduit de la relation fondamentale (11)

$$\frac{e_1}{\rho_1} = \frac{e}{2\varphi} = 0,365$$

soit, en utilisant les notations de la figure 12, $e' = 0,730 \varphi'$ ou $r' = e' + \varphi' = 1,73 \varphi'$ (40)

ou encore

$$r' = 2,36 e'$$

La dépression qui se produit naturellement en P ne se maintient que si l'on crée un appel de l'air dissous dans l'eau; faute de pouvoir éliminer cet air, le décollement se produit et le phénomène de la remontée du fluide le long de la paroi supérieure cesse d'exister.

Sans vouloir commenter, pour le moment, le tracé que nous avons effectué en pointillés sur les figures 12 et 13 à l'amont du col, nous dirons que r_1 a été calculé en utilisant la relation (11) transformée pour tenir compte que le rayon ρ_1 de la relation (11) doit être remplacée par $2\rho_1$, étant donné qu'il s'agit ici du flux dévié par la face convexe, et non par la face concave ce qui conduit à

$$e = 0,730 \rho$$

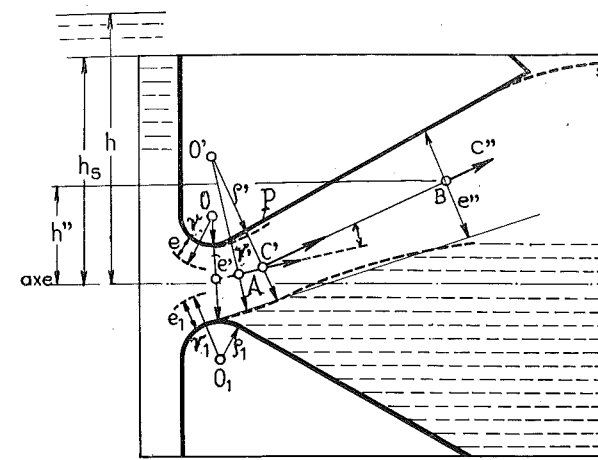


FIG. 12

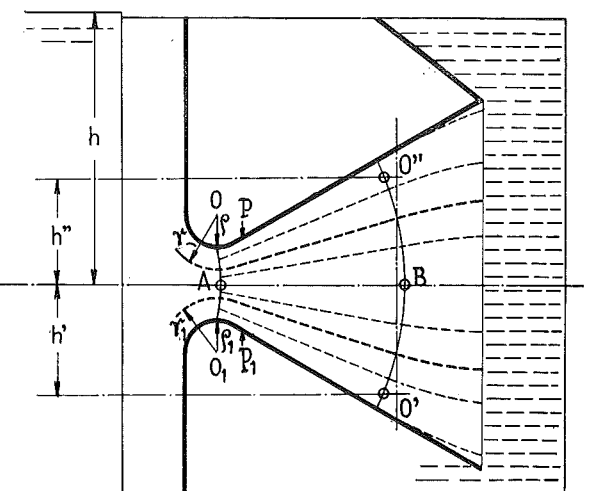


FIG. 13.

ρ étant le rayon du congé dessinant la paroi supérieure du col de la tuyère.

Sur la figure 13, le tracé des deux arcs de rayon r et r_1 , tend à délimiter une zone centrale marquée nettement sur la photographie correspondante de la figure 11 et qui est due selon nous, à la dépression qui règne dans la section rétrécie de la tuyère, en raison de la grande récupération d'énergie cinétique qui se produit entre la section OO_1 et la section $O''O'$.

Le déplacement par filets concentriques ne correspond pas strictement à la réalité, mais à l'échelle du dessin il n'y a pas de différence appréciable entre l'écoulement vrai et l'écoulement supposé à épaisseur constante, cette épaisseur étant calculée suivant la relation (11).

Si, à partir de A et jusqu'en B (fig. 12), l'épaisseur ne reste pas constante, c'est parce

que, dans le cas que nous traitons ici, et qui ne correspond qu'imparfaitement au flux contour-nant le cylindre, la hauteur de chute va se réduisant progressivement de A à B, et que partant, la vitesse doit aller nécessairement en diminuant.

Ainsi et ce sera notre conclusion ultime de cette analyse des faits physiques observés, le phénomène de l'écoulement le long de l'obstacle, obéit à des lois très simples qui expliquent l'existence de la loi de similitude géométrique sans restriction, à partir du moment où l'on peut admettre que le frottement ne joue aucun rôle appréciable :

« L'épaisseur déviée est proportionnelle aux dimensions et en tous les points homologues, règnent la même pression et la même vitesse. »

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE DES PERTES DUES À LA DÉVIATION
DANS LE DÉPLACEMENT DES CORPS CARÉNÉS

CHAPITRE PREMIER

VALEUR DU COEFFICIENT DE RÉSISTANCE GLOBALE
POUR UN CORPS CARÉNÉ, SANS PORTANCE

Si nous cherchons à diminuer la résistance à l'avancement d'un corps sans portance, nous devons chercher à réduire la composante c_1 de la vitesse c au point d'inflexion (fig. 7) puisque, d'après ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, cette composante est perdue par tourbillonnements.

Il est aisé de voir qu'en enveloppant le cylindre ou la sphère d'une gaine fusiforme en contact avec le maître-couple, on réduit la composante c_1 aux points d'inflexion BB_1 (fig. 14).

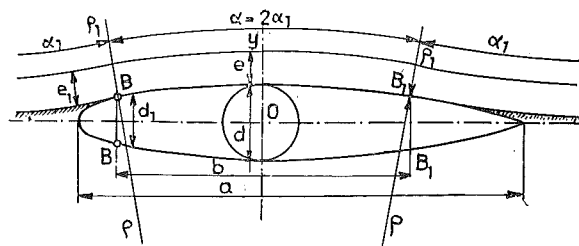


FIG. 14.

Cette réduction est d'autant plus grande que l'allongement est plus grand.

Nous entendons par allongement $\frac{1}{m}$ le rapport de la longueur a de l'enveloppe à l'épaisseur au maître-couple, s'il s'agit d'un cylindre, épaisseur que nous avons désignée par d dans ce qui précède ; nous poserons donc

$$\frac{1}{m} = \frac{a}{d} \quad (40)$$

§ 1. CORPS CARÉNÉS DÉRIVÉS DU CYLINDRE

Evaluons tout d'abord, la première partie de la résistance à l'avancement, due à la déviation. En appliquant la condition de continuité, nous

(¹) Suite de l'étude publiée dans le vol. I, n° 5, p. 22.

pourrons écrire en vertu de la relation fondamentale (18)

$$\rho_1 \alpha_1 = \rho \times 2 \alpha_1 \quad (41)$$

soit

$$\rho_1 = 2 \rho \quad (42)$$

L'arc d'approche de rayon ρ_1 étant déterminé, la valeur de d_1 s'ensuit, car il est facile d'établir qu'à l'égalité $\rho_1 = 2 \rho$ correspond la relation

$$d_1 = \frac{2}{3} d \quad (43)$$

Lorsqu'on envisage le cas de l'obstacle remorqué, nous avons vu que l'on devait admettre une symétrie des phénomènes avant et arrière, si bien qu'il suffira pour calculer l'effet d'ensemble de doubler l'effort résultant de la surpression sur la face avant, pour obtenir la résistance totale provoquée par l'obstacle.

Pour le cas de l'obstacle immobile nous pouvons ajouter que l'erreur est négligeable en utilisant le même raisonnement, pour autant que l'on ait affaire à des allongements voisins de l'allongement optimum.

Nous pourrons donc écrire pour le terme T_1 dû à la déviation

$$T_1 = 2 (d_1 \times L) \frac{\delta}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho_1} \quad (44)$$

Pour ce qui concerne le frottement, nous ne ferons intervenir que la surface comprise entre les deux points d'inflexion, et nous écrirons

$$T_2 = 2 k (b \times L) \delta c^2 \quad (45)$$

admettant ainsi que la traînée due au frottement est proportionnelle à la surface touchée par les filets orientés entre B et B_1 (¹), proportionnelle au poids spécifique δ et au carré de la vitesse. De là l'expression de la résistance totale T .

(¹) L'analyse que nous avons effectuée des expériences exécutées au bassin des carènes de Wageningen montre que la surface active est limitée à la surface comprise entre les points d'inflexion. (Voir à ce sujet le fascicule de 1954.)

$$T = \left(\frac{\delta}{g} S c^2 \right) \left[2 \frac{d_1}{d} \frac{e_1}{\rho_1} + 2 g k \left(\frac{b}{d} \right) \right] \quad (46)$$

Le coefficient $2 g k$ que nous représenterons dans la suite par $2 k_1''$ afin d'utiliser des notations employées antérieurement, dans l'étude du coefficient de frottement, n'est autre que le coefficient de Froude.

Nous en avons donné la valeur, en fonction du coefficient de Reynolds pour le cas des surfaces lisses et aussi pour le cas des surfaces rugueuses, dans le fascicule de 1954.

Pour exprimer T en fonction de $\frac{1}{m}$, nous désignerons par x le rapport

$$x = \frac{a}{b} \quad (47)$$

de telle façon que

$$\frac{1}{m} = \frac{b}{d} \times x \quad (48)$$

x pouvant varier suivant le tracé entre 1,3 et 2,0 mais plus fréquemment entre 1,5 et 1,7.

Nous trouverons ainsi la traînée totale T , en fonction de $\frac{1}{mx}$ et de deux coefficients C_1 et C_2

$$C_1 = \frac{4}{3} \frac{e_1}{\rho_1} \quad (49)$$

$$C_2 = 2 k_1'' \frac{1}{mx} \quad (50)$$

Pour exprimer le premier terme en fonction de $\frac{1}{mx}$, il suffit d'établir que

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{3} \frac{d}{b^2} \quad (51)$$

et de noter comme un fait expérimental que l'épaisseur $e_1 = e$ reste commandée par l'épaisseur au maître-couple, ce qui en vertu de la relation (22) donne :

$$e = e_1 = 0,365 \rho_1 = 2 \times 0,365 \rho = 0,365 d \quad (52)$$

C'est en admettant ce fait, que l'on retrouve par le calcul, les valeurs expérimentales de la traînée due à la déviation, jusqu'à l'allongement correspondant à l'allongement optimum.

Ainsi pour les allongements inférieurs à l'allongement optimum

$$C = \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)^2 + 2 k_1'' \frac{1}{mx} \quad (53)$$

Si nous égalons à zéro la dérivée, nous trouverons

$$\left(\frac{1}{mx} \right)_1 = \sqrt[3]{\frac{2 \times \frac{8}{9} \times 0,365}{2 k_1''}} = 6,15 \quad (54)$$

en adoptant pour $2 k_1''$ la valeur 0,00279 qui convient pour les surfaces lisses et les valeurs du coefficient de Reynolds Re de l'ordre de

$$Re = 2 \times 10^6 \quad (55)$$

Ces valeurs sont celles réalisées normalement au tunnel dans les essais sur les profils d'ailes que nous avons analysés.

En passant nous ferons observer que cette valeur de $2 k_1'' = 0,00279$ convient aussi pour des surfaces de rugosités courantes lorsque le coefficient de Reynolds atteint des valeurs de l'ordre 10^7 et plus.

Pour les allongements supérieurs à l'allongement optimum, l'épaisseur e du flux influencé qui d'après la relation (52) est restée constante, et qui a donné à $\frac{e}{b}$ la valeur

$$\frac{e}{b} = \frac{e}{d} \times \frac{d}{b} = 0,365 (mx)_1 = 0,06 \quad (56)$$

ne diminue plus, mais se met à croître avec la profondeur b suivant la loi générale fixée par la relation (18)

$$\frac{e}{\rho z} = \frac{e}{b} = 0,365 (mx)_1 \quad (57)$$

Dans ces conditions C prend la valeur

$$C = \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)_1 mx + \frac{2 k_1''}{mx} \quad (58)$$

puisque le premier terme peut s'écrire, en vertu des relations (49), (51) et (56)

$$C_1 = \frac{4}{3} \frac{e_1}{\rho_1} = \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)_1 mx \quad (59)$$

C'est en utilisant ces deux relations (53) et (58) que nous avons tracé la courbe I de la

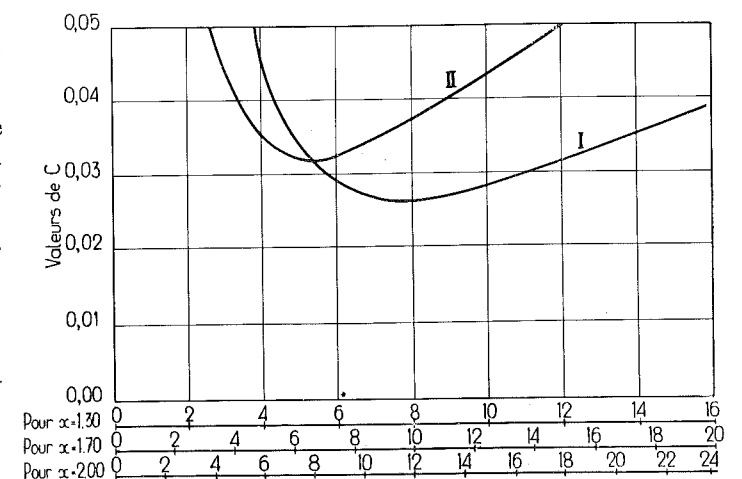


FIG. 15.

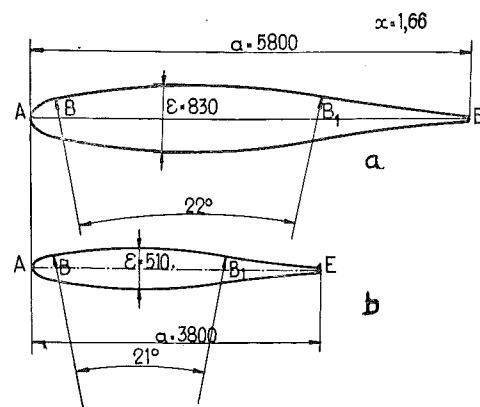


FIG. 16.

figure 15 pour $x=1,3$, la première partie de la courbe jusqu'au minimum donnant les valeurs fournies par la relation (53), l'autre relevant de la relation (58).

Nous avons indiqué l'échelle qu'il faudrait adopter lorsque les valeurs réalisées de x , sont respectivement

$$x=1,7 \quad \text{et} \quad x=2,0.$$

L'allongement optimum calculé est égal à 8 pour $x=1,3$, 10 pour $x=1,7$,

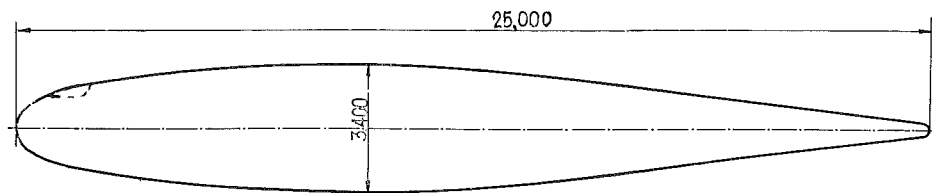


FIG. 17.

la valeur de x fixant en quelque sorte l'allure du profil de plus en plus parabolique.

En suivant cette méthode, nous avons dessiné deux profils d'aile redressée, correspondant respectivement à un allongement $\frac{1}{m}=7,0$ et à $\frac{1}{m}=7,5$, le rapport x étant pris égal à 1,70; ils correspondent à des profils que nous adopterons pour l'aile d'avion dont nous calculerons toutes les dimensions, à la fin de cette étude, en partant des données fondamentales.

Le coefficient C qui correspond aux ailes de la figure 16 est égal, d'après la formule (53) à

$$C=0,029. \quad (60)$$

§ 2. CORPS CARÉNÉS DÉRIVÉS DE LA SPHÈRE

En suivant la même méthode, nous trouverons le coefficient de traînée totale pour les solides de révolution dérivés de la sphère.

d étant le diamètre de la sphère, on pourra écrire :

1. Pour les allongements inférieurs à l'allongement optimum

$$C_r = \frac{16}{27} \times 0,76 \times 0,365 (mx)^2 + 2 \frac{2k_1''}{mx}; \quad (61)$$

2. Pour la région des allongements supérieurs à l'allongement optimum

$$C_r = \frac{16}{27} \times 0,76 \times 0,365 (mx)_1 mx + 2 \frac{2k_1''}{mx} \quad (62)$$

$(mx)_1$ représentant comme dans la formule précédente relative au cylindre caréné, l'inverse de l'allongement optimum, le coefficient 0,76 étant introduit pour tenir compte de ce que le rapport des pressions moyennes

$$\frac{P_r}{P} = \frac{\int_0^a pd(\sin^2 \sigma)}{\int_0^a pd(\sin \sigma)} = 0,76 \quad (63)$$

n'est pas égal à l'unité (voir à ce sujet le fascicule de 1954).

En vue de préparer l'application de ces notions au calcul de l'avion, nous avons tracé (fig. 17), à l'échelle de $\frac{1}{200}$, la coque de 3,400 m de diamètre au maître-couple, pour l'allongement optimum qui est de $\frac{1}{m}=7,0$ lorsque $x=1,70$.

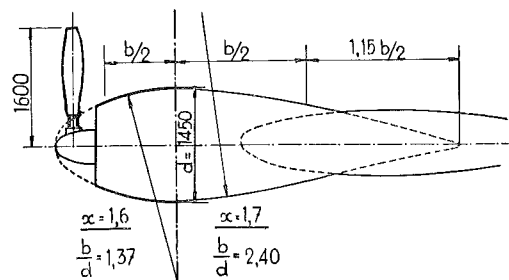


FIG. 18.

Le coefficient de résistance C_r qui correspond à ce tracé est égal d'après le diagramme de la figure 15 à

$$C_r = 0,32. \quad (64)$$

Les moteurs qui équipent l'avion doivent être carénés; le carénage doit avoir 1,450 m de diamètre au maître-couple.

La construction ne s'accommode pas d'un tracé symétrique: il est plus aisé de prolonger le carénage arrière, que le carénage avant.

Nous proposons le profil suivant, de la figure 18 :

1. Pour l'avant

$$\frac{1}{mx} = 1,37 \quad (\text{avec } x=1,6)$$

$$\frac{1}{2} C_r = 0,0440 + 0,0038 = 0,0478;$$

2. Pour l'arrière

$$\frac{1}{mx} = 2,40 \quad (\text{avec } x=1,7)$$

$$\frac{1}{2} C_r = 0,0143 + 0,0066 = 0,0209;$$

soit pour l'ensemble

$$C_r = 0,0687. \quad (65)$$

Les valeurs que nous venons de calculer de $\frac{1}{2} C_r$ résultent directement de l'application de la relation (61).

Nous utiliserons les coefficients (64) et (65) tels que nous venons de les établir, bien qu'ils fassent abstraction de la perturbation apportée :

1. Dans le tracé de la figure 17 par la partie pointillée qui assure la visibilité au pilote ;
2. Dans le tracé de la figure 18 par l'absence de la partie avant (tracée en pointillé).

Le fait de ces deux modifications au tracé théorique du carénage, n'est certainement pas favorable et si nous avions pu en tenir compte par le calcul nous l'aurions fait. Les valeurs (64) et (65) représentent donc des valeurs minima.

Nous pouvons toutefois ajouter qu'avec les grandes dimensions de l'avion dont nous nous proposons d'exécuter le calcul, ces perturbations sont faibles proportionnellement, car les calculs effectués sur cette base conduisent à l'évaluation exacte des performances connues pour cet avion.

§ 3. CONCLUSIONS

En terminant le chapitre I, nous faisons remarquer que pour la sphère et le cylindre le facteur frottement ne jouait qu'un rôle négligeable, si bien que le coefficient de résistance était pratiquement indépendant des dimensions. Il n'en est plus de même pour les corps caré-

nés, pour lesquels le coefficient de résistance est fonction de deux facteurs, le facteur de déviation qui ne fait pas intervenir les dimensions mais seulement les proportions, le facteur frottement qui, lui, dépend du nombre de Reynolds.

Ces relations montrent que si l'on est en mesure d'évaluer le terme dû au frottement, le terme dû à la déviation peut se déduire directement par différence du coefficient de résistance global établi par l'expérience.

Le coefficient qui résulte ainsi de la différence ne dépend pas comme nous venons de le montrer du nombre de Reynolds et il est le même pour tous les corps géométriquement semblables.

Il ne s'agit pas là de vues personnelles établies sur un raisonnement à première vue élémentaire et empirique. Les expériences entreprises par Wageningen sur un modèle de navire de 4,500 m correspondant à une valeur de

$$m = \frac{1}{5,5},$$

ont montré de façon péremptoire, comme nous l'avons fait ressortir dans le fascicule de 1954, que le terme dû à la déviation ne dépend pas des dimensions: la Direction a traduit d'ailleurs les résultats en diagrammes logarithmiques permettant de calculer la puissance absorbée par cette partie de la résistance, pour tous les navires géométriquement semblables, ce qui implique que le coefficient de résistance C_1 est considéré comme indépendant des dimensions. Non seulement nous avons pu vérifier la valeur de ces formules en les appliquant à l'étude d'une vingtaine de profils essayés au tunnel par les principaux laboratoires du monde, mais nous avons pu généraliser les formules pour les appliquer à l'étude de la coque du navire.

Ces considérations qui laisseront sceptiques un grand nombre de lecteurs, doivent être regardées comme inattaquables, et nous comptons leur en donner une preuve supplémentaire dans la 4^e Partie, que nous consacrerons, pour terminer, au calcul des dimensions générales d'un avion, ne faisant intervenir strictement que les valeurs déduites de la théorie que nous venons d'exposer, après l'avoir étendue au préalable :

Dans le chapitre III, à la portance et à la traînée d'une aile ;

Dans le chapitre IV, au coefficient de résistance globale d'une aile d'avion, puis de l'avion lui-même ;

Dans la 3^e Partie, à la force de traction et à la puissance absorbée par une hélice considérée comme une suite d'ailes en rotation, les valeurs numériques de ces deux facteurs résultant exclusivement des relations théoriques établies pour l'aile prise isolément.

VALEURS DE LA PORTANCE ET DE LA TRAÎNÉE RELATIVES À UNE AILE MINCE

§ 1. CAS DU FLUX FRAPPANT OBLIQUEMENT UNE SURFACE PLANE

Analysons d'abord le phénomène qui se produit lorsqu'on oriente le jet d'épaisseur e (fig. 19) sur un plan incliné d'un angle α sur la direction du jet.

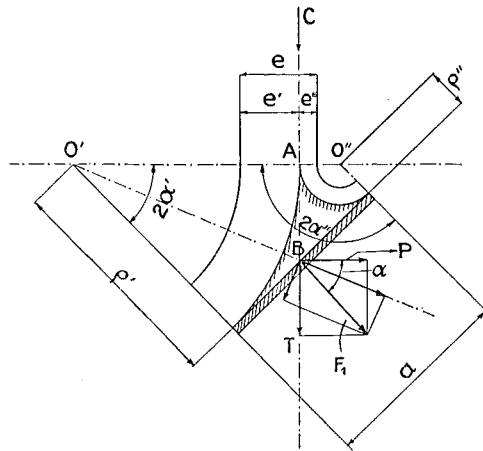


FIG. 19.

Celui-ci doit se diviser en deux flux l'un d'épaisseur e' , l'autre d'épaisseur e'' , orientés en sens opposés, et cela de telle façon que la pression, qui règne dans la zone morte B, corresponde à la fois à la pression le long du filet intérieur orienté vers le bas, et à la pression qui s'établit le long du filet intérieur orienté vers le haut, ce qui implique :

$$\frac{e'}{\rho'} = \frac{e''}{\rho''} = k_1' \quad (66)$$

En tenant compte de cette relation, nous pourrions calculer a et F_1 :

$$\frac{e' + e''}{e'} = \frac{e}{e'} = \frac{\rho' + \rho''}{\rho'} = \frac{a}{\sin \alpha} \frac{1}{\rho'} \quad (67)$$

D'où

$$F_1 = aL \frac{\delta}{g} \frac{e'}{\rho'} c^2 = (L \times e) \frac{\delta}{g} c^2 \sin \alpha \quad (68)$$

ce qui conduit pour la composante P perpendiculaire à la direction du flux à l'entrée :

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{g} S c^2 \right) \frac{e}{a} \sin 2\alpha = \frac{1}{2} M \sin 2\alpha \quad (69)$$

S désignant la surface plane frappée par le flux, M la masse déviée par seconde par le plan.

Cette dernière relation, vraie pour les valeurs de α supérieures à 20° , ne correspond pas aux

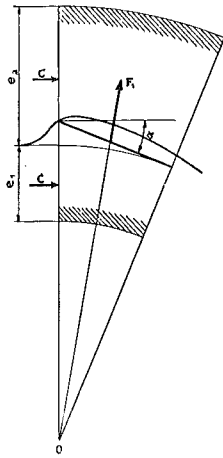


FIG. 20.

valeurs observées pour les angles inférieurs à 20° .

§ 2. CAS DU FLUX LONGEANT À LA FOIS LA FACE CONCAVE ET LA FACE CONVEXE

A partir d'un angle tel que 20° , le phénomène change d'aspect : l'importance du flux d'épaisseur e'' devient de plus en plus faible à mesure que α diminue, au point que pour l'angle de 20° , le rebroussement disparaît.

Les choses se passent alors comme il est indiqué figure 20, si l'on ne considère que l'épaisseur e_1 du flux longeant le plan par la face inférieure.

Dans l'hypothèse où le flux est d'une épaisseur $e_1 + e_2 = e$, le flux longeant la face con-

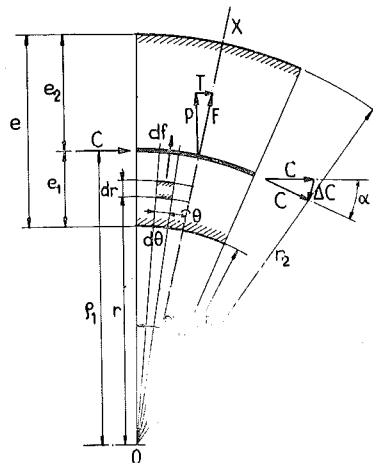


FIG. 21.

vexe, s'incurvera, se mettant en dépression, pour suivre celle-ci jusqu'à la sortie.

Pour nous débarrasser provisoirement dans l'analyse du phénomène de la déviation, de la perturbation créée à l'entrée par la déviation brusque des filets longeant la face supérieure, nous supposons que le plan est remplacé par une plaque courbe dont la tangente, au bord d'entrée, serait orientée dans la direction du flux (fig. 21).

Utilisant comme nous l'avons fait jusqu'ici la notion du flux à filets concentriques qui conduit aux mêmes résultats au point de vue des réactions sur le plan courbe, que le flux réel, nous pourrions écrire, en nous référant au triangle des vitesses à la sortie, fixant la variation vectorielle de la vitesse entre la sortie et l'entrée,

$$F = \left[\frac{\delta}{g} (Le) c \right] \Delta C = \frac{\delta}{g} (Le) c \times 2 c \sin \frac{\alpha}{2}$$

soit pour la composante P perpendiculaire à la direction du flux à l'entrée :

$$P = F \cos \frac{\alpha}{2} = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) c_z \quad (70)$$

avec

$$c_z = k' \sin \alpha, \quad (71)$$

et

$$k' = \frac{e}{a} \quad (72)$$

Pour la traînée T nous pourrions écrire :

$$T = F \sin \frac{\alpha}{2} = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) c_x \quad (73)$$

avec

$$c_x = 2 k' \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (74)$$

Lorsqu'on opère au tunnel avec une masse d'air pratiquement illimitée, par rapport à la

profondeur a , la continuité du phénomène d'écoulement exige qu'un redressement à l'arrière se produise, dont les effets sont les suivants (fig. 22) :

1. Redressement à l'arrière à partir de l'angle $(\beta + \gamma)$, l'angle de déviation total étant de ce fait ramené de $\alpha = 2\beta$ à $\alpha = (\beta + \gamma)$;

2. Action du flux redressé sur l'arc $(\beta - \gamma)$ qui, opposée à la force F , ramène celle-ci à une valeur plus faible, dont les composantes P et T peuvent se mettre sous la forme ci-dessus, mais avec des valeurs de

$$c_z = k' F(z) \sin \alpha \quad (75)$$

$$c_x = 2 k' F(x) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (76)$$

les facteurs $F(z)$ et $F(x)$ étant des fonctions qui prennent une valeur déterminée à partir du moment où les angles qui définissent l'aile, sont déterminés.

Pour une aile mince à une seule courbure, caractérisée par l'angle 2β (fig. 22), les expériences au tunnel montrent de façon irréfutable que

$$k' = \pi \frac{k}{k + 0,8} \quad (77)$$

$$F(z) = 0,75 \quad (78)$$

le facteur k représentant le rapport de l'envergure L de l'aile, à la profondeur a

$$k = \frac{L}{a} \quad (79)$$

La relation est connue sous le nom de formule de Betz et l'on voit que pour l'envergure infinie

$$k' = \frac{e}{a} = \pi \quad (80)$$

Les valeurs de $F(z)$ et $F(x)$ ne dépendent pas du carénage et nous pouvons dire de la façon la plus formelle que tout se passe au tunnel, comme si l'épaisseur du flux influencé e était constante pour une profondeur donnée a .

De là l'intérêt du procédé que nous avons employé, de faire porter l'analyse sur le cas de l'obstacle frappé par un flux d'épaisseur constante, puisque les relations trouvées ainsi valent pour le cas d'une aile, essayée au tunnel dans un flux d'épaisseur illimitée.

Remarque I. — La formule de Betz ne vaut que pour une aile de forme rectangulaire, en projection horizontale; en admettant que l'épaisseur du flux influencé reste constante dans la partie centrale comprise entre a et b (fig. 23) et qu'elle décroît suivant les ordonnées d'une ellipse, entre aA et bB , nous avons établi une relation qui donne à 1 % près, les valeurs fournies par la formule de Betz.

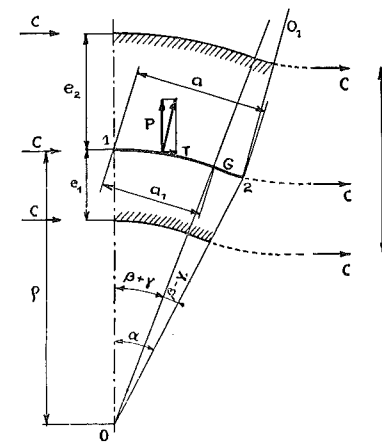


FIG. 22.

Remarquant que pour $k=6$, la valeur de λ est égale à $0,25 L$ ou ce qui revient au même

$$\lambda = 0,25 \times 6 a = 1,5 a \quad (81)$$

et admettant que cette valeur de λ reste constante pour toutes les envergures si a ne varie pas, nous avons écrit

$$k' = \pi \left[1 - \frac{\lambda}{a} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (82)$$

et retrouvé ainsi les valeurs fournies par la formule (77) à $\pm 1\%$ près, depuis $k=2$ jusque $k=\infty$.

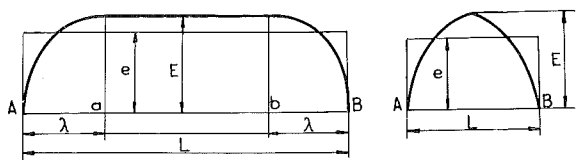


FIG. 23.

Lorsque l'aile se présente en projection horizontale comme un rectangle, il est plus commode de se servir de la formule de Betz ; mais si pour une aile trapézoïdale, les deux formules sont en défaut, la deuxième peut être transformée en tenant compte de ce que le phénomène de réduction de l'épaisseur influencée, ne joue que sur le bout de l'aile dont la profondeur est faible par rapport à la profondeur moyenne. En appliquant le raisonnement au cas particulier de l'aile trapézoïdale qui sera la forme d'aile utilisée dans le calcul de l'avion, nous avons trouvé

$$k' = 0,985 \pi \quad (83)$$

la valeur de k étant égale à $9,5$. Avec la formule de Betz nous eussions obtenu $0,922$.

Lorsqu'on passe de l'aile mince à l'aile épaisse carénée, on pourrait dire que l'efficacité du flux influencé est réduite de l'épaisseur même de l'aile ; cela conduit à introduire un facteur de réduction de $\left(1 - \frac{m}{\pi}\right)$ dans le calcul de k'

$$k' = \pi \frac{k}{k + 0,8} \left(1 - \frac{m}{\pi} \right) \quad (84)$$

$\frac{1}{m}$ représentant l'allongement, c'est-à-dire le rapport de la profondeur a à l'épaisseur ϵ de l'aile

$$\frac{1}{m} = \frac{a}{\epsilon} \quad (85)$$

Cette relation valable pour les ailes à projection rectangulaire, comme toutes celles étudiées

au tunnel, donne des valeurs trop élevées pour les ailes trapézoïdales ; nous avons adopté pour le calcul du facteur de réduction dans le cas de notre aile trapézoïdale

$$\sqrt{1 - \frac{m}{\pi}} = 0,98. \quad (86)$$

Remarque II. — Nous avons tracé (fig. 24)

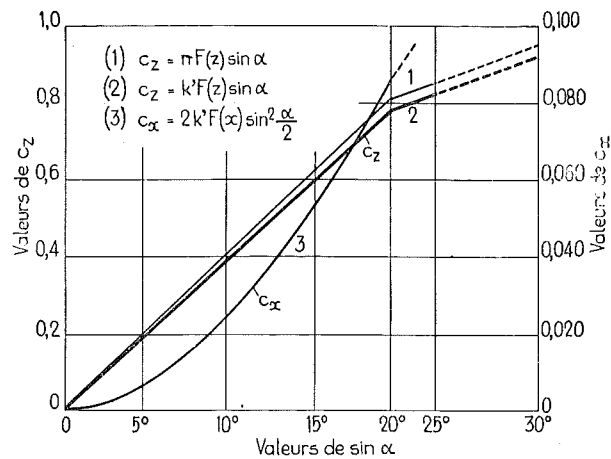


FIG. 24.

les diagrammes des valeurs de c_z et c_x pour une aile à une seule courbure, en fonction de $\sin \alpha$: la courbe en trait faible se rapporte à $k'=\pi$, la courbe en trait fort correspond à

$$k' = \pi \times 0,985 \times 0,98 = 3,05 \quad (87)$$

qui correspond à l'aile envisagée plus haut.

La partie pointillée tracée pour les valeurs supérieures à 20° , a été obtenue en remplaçant dans la relation (71) $\sin \alpha$ par $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$, comme l'implique la relation (69).

Remarque III. — On trouvera dans le fasci-

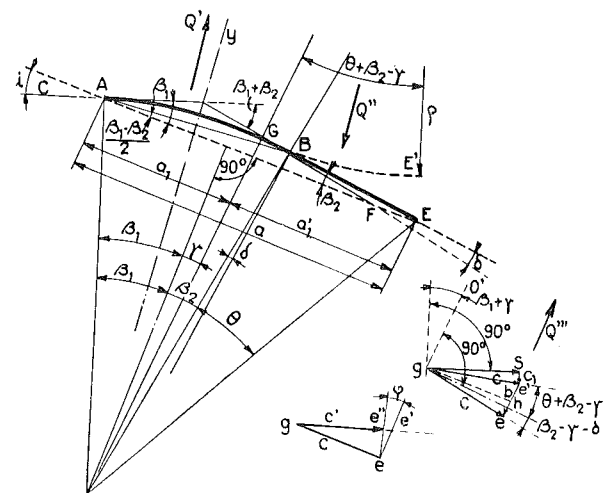


FIG. 25.

cule de 1954, les valeurs explicites de $F(z)$ et $F(x)$.

Pour le plan $F(z)=0,750$.

Pour l'aile à une seule courbure $F(z)=0,830$.

Pour l'aile en arc de parabole $F(z)$ et $F(x)$ sont plus faibles, mais le calcul montre que $F(z)$ et $F(x)$ doivent être remplacés par

$$F(z) \frac{\Phi}{\Phi_1} \text{ et } F(x) \frac{\Phi}{\Phi_1}$$

les facteurs Φ et Φ_1 ayant pour valeurs respectives, Φ_1 se rapportant à l'aile à une seule courbure,

$$\Phi = \frac{\beta_1 + \gamma}{\beta_1 + \beta_2} \quad (88)$$

$$\Phi_1 = \frac{\beta_1 + \gamma}{\beta_1 + \beta_2} = 0,75 \quad (89)$$

$\left(\frac{\gamma}{\beta_1}\right)$ étant égal à $0,5$ pour l'aile à une seule courbure (fig. 26) qui implique $\beta_1 = \beta_2$.

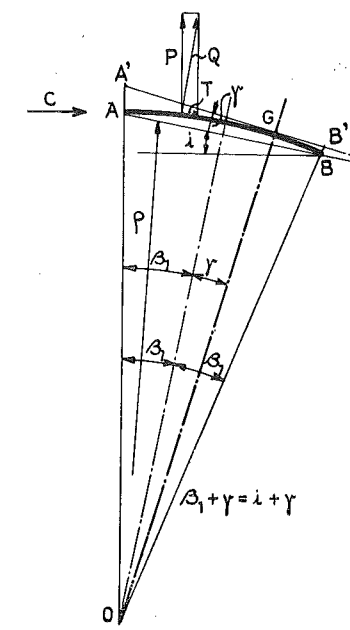


FIG. 26.

CHAPITRE III

VALEUR DU COEFFICIENT DE RÉSISTANCE TOTALE POUR UNE AILE D'AVION

§ 1. VALEUR DE c_x'

Dans l'étude de l'aile que nous venons d'esquisser, le coefficient de résistance propre c_x est rapporté à la surface sustentatrice S de l'aile.

Lorsque nous voudrions utiliser les formules donnant les valeurs du coefficient C en fonction de la section au maître-couple, nous aurons à écrire

$$c_x' = Cm \quad (90)$$

puisque

$$C(\epsilon L) = c_x'(a \times L).$$

D'où la relation

$$c_x' = 0,08 m^2 + \frac{0,00279}{1,50} = 0,00310 \quad (91)$$

pour une aile dont l'allongement est supérieur à 8 et dont la valeur de x peut être prise égale à $1,5$.

Pour un allongement inférieur à 8 , il faudra utiliser la formule (53) et non la formule (58) comme ci-dessus,

$$c_x' = \frac{8}{9} \times 0,365 x^2 m^3 + \frac{2 k_1''}{x} \quad (92)$$

ce qui pour un allongement $7,5$ (profil donné par la fig. 16b) conduit à

$$c_x' = 0,00217 + 0,00158 = 0,00375 \quad (93)$$

§ 2. VALEUR DE c_x''

Lorsque l'aile, supposée ici à simple courbure, ne se présente dans la position de la figure 26, de telle façon que la tangente à l'entrée corresponde à la direction de la vitesse c , mais dans une position telle que celle de la figure 27, une perturbation supplémentaire apparaît, provoquée par ce que nous avons appelé, le maître-couple apparent dont l'épaisseur est h , pour la position de nulle portance (fig. 28).

En désignant par $\frac{1}{m_1}$ l'allongement apparent

$$\frac{1}{m_1} = \frac{a}{h} = \frac{\beta_1}{\left(\frac{\beta_1 + \gamma}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma}{\beta_1}\right)^2} \times \frac{1}{\beta_1} \quad (94)$$

nous avons établi que pour une aile mince

$$C_a = 1,01 k \quad (95)$$

avec k normal égal à $0,024$.

Lorsqu'une perturbation se présente à l'entrée k peut prendre une valeur jusqu'à 10 fois plus grande et davantage.

Pour l'aile d'allongement $\frac{1}{m}$, on peut donc écrire :

$$c_x'' = 1,01 k \left(1 + n \frac{m}{m_1} \right) \quad (96)$$

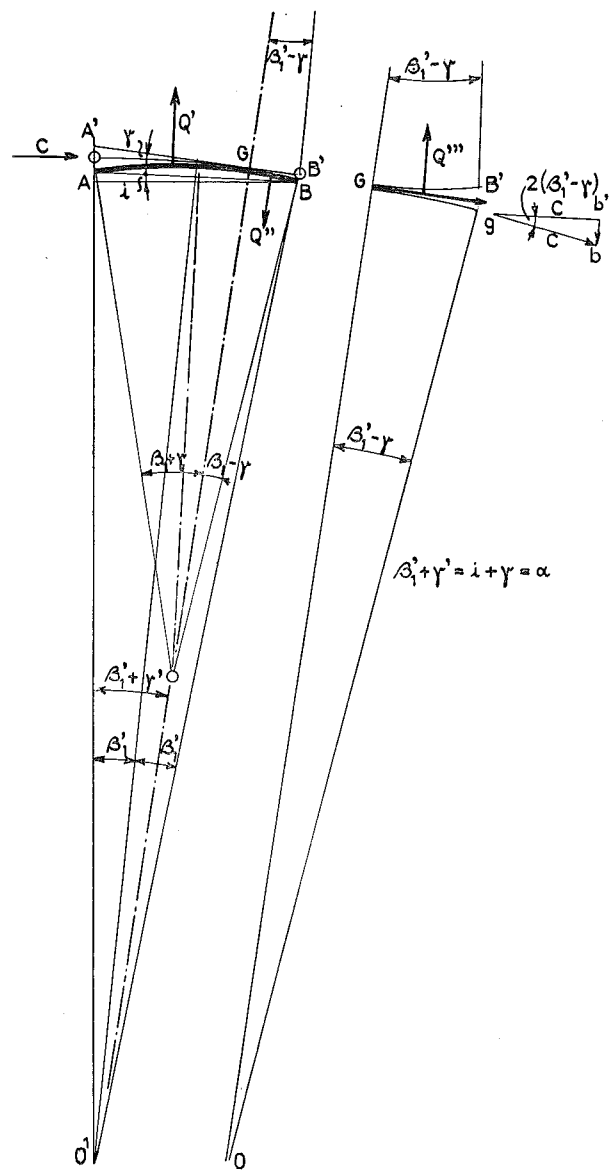


FIG. 27.

le terme entre parenthèses étant là pour tenir compte de la présence d'une aile épaisse carénée, $\frac{1}{m}$ étant l'allongement de cette aile.

L'analyse d'une vingtaine de profils nous a permis de faire ressortir que c_x'' n'était pas le même pour l'aile normale et pour l'aile à face ventrale plane : pour la première n peut être pris égal à $\frac{1}{3}$ tandis que pour la seconde n doit être pris égal à $\frac{2}{3}$.

Cette relation donne c_x'' pour la position de nulle portance, mais pour une position définie par l'angle de déviation α , nous avons montré que l'on pouvait calculer c_x'' avec une approximation suffisante, au moyen de la formule

$$c_x'' = 1,01 k \times 0,6 \left(1 + n \frac{m}{m_1}\right) \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \quad (97)$$

c_x'' passant à une valeur nulle pour l'angle de déviation $\alpha = \beta + \gamma$.

Nous désignerons dans ce qui va suivre par b , la valeur de

$$b = 1,01 k \times 0,6 \left(1 + n \frac{m}{m_1}\right). \quad (98)$$

§ 3. VALEUR DU COEFFICIENT DE RÉSISTANCE TOTALE C_x

Nous désignerons par C_x le coefficient de résistance totale de l'aile, c'est-à-dire la résistance propre de l'aile donnée par la relation (76), augmentée de la résistance de profil et de la résistance due au maître-couple apparent :

$$C_x = c_x + c_x' + c_x'' = 2 k' F(x) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + c_x' + c_x'' \quad (99)$$

Cette valeur permettra de calculer la résistance à l'avancement de l'aile.

$$T' = \left(S \frac{\delta}{g} c^2\right) C_x \quad (100)$$

et le rapport de la résistance réelle à la résistance théorique T que nous pouvons évaluer en fonction de P en écrivant

$$T = P \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx P \sin \frac{\alpha}{2} = \left(S \frac{\delta}{g} c^2\right) 2 k' F(z) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (101)$$

Nous trouverons ainsi

$$\frac{T'}{T} = \frac{F(x)}{F(z)} + \frac{c_x' + c_x''}{2 k' F(z) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

En développant $\sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$, et en confondant les cosinus avec l'unité.

$$\frac{T'}{T} = \frac{F(x)}{F(z)} - \frac{b}{2 k' F(z) \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{c_x' + b \sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2}}{2 k' F(x) \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (102)$$

Lorsque nous aurons affaire à un avion, nous aurons à ajouter au terme c_x' la valeur des résis-

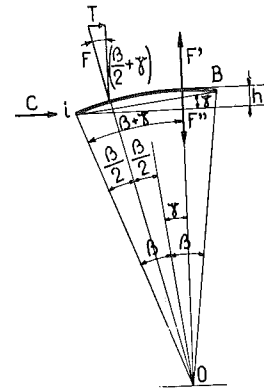


FIG. 28.

tances dues aux parties non portantes, ce qui nous conduira à

$$c_x' + \Sigma \frac{S'}{S} \times C' = a \quad (103)$$

S' désignant la section au maître-couple d'une partie quelconque sans portance de l'avion, C' le coefficient de résistance propre à cette partie.

Le rapport $\frac{T_t}{T}$ se présentera alors comme une fonction du second degré en $\sin \frac{\alpha}{2}$ que nous désignerons par R_t

$$R_t = \frac{T_t}{T} = k_3 - \frac{k_2}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{k_1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (104)$$

les valeurs de k_3 , k_2 et k_1 ayant respectivement pour valeur

$$k_3 = \frac{F(x)}{F(z)} \quad (105)$$

$$k_2 = \frac{b}{2 k' F(z)} \quad (106)$$

$$k_1 = \frac{a + b \sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2}}{2 k' F(z)} \quad (107)$$

On remarquera que la résistance totale T_t peut s'écrire en fonction de P d'après la formule (101)

$$T_t = P R_t \sin \frac{\alpha}{2} = \left(S \frac{\delta}{g} c^2\right) 2 k' F(z) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \times R_t = \left(S \frac{\delta}{g} c^2\right) K'_0 \quad (108)$$

$$K'_0 = k_3 \times 2 k' F(z) \sin^2 \frac{\alpha}{2} - k_2 \sin \frac{\alpha}{2} + k_1 \quad (109)$$

montrant que le terme qui tient compte des pertes par frottements et tourbillonnements, est indépendant de $\sin \frac{\alpha}{2}$.

Nous avons calculé les valeurs de k_3 , k_2 , k_1 valant pour l'avion que nous calculerons dans la suite (voir chapitre VI); cela conduit à

$$R_t \sin \frac{\alpha}{2} = 0,600 \sin \frac{\alpha}{2} - 0,00435 + \frac{0,00224}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (110)$$

Nous avons tracé (fig. 29) le diagramme de

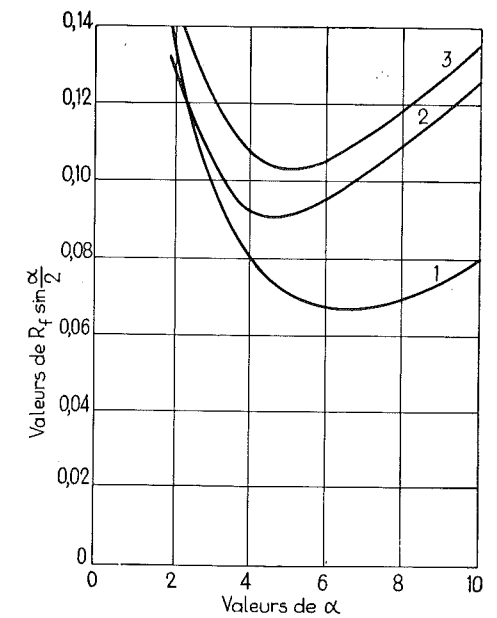


FIG. 29.

$R_t \sin \frac{\alpha}{2}$ en fonction de $\sin \frac{\alpha}{2}$; on voit que la courbe 1 passe par un minimum pour

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{k_1}{k_3}} = \sqrt{\frac{0,00224}{0,600}} = \sqrt{0,00374} = 0,0612 \quad (111)$$

soit

$$\frac{\alpha}{2} = 3 \frac{1}{2}^\circ ; \quad \alpha = 7^\circ$$

On voit que la courbe est très plate et que l'on se rapproche du minimum en adoptant des angles compris entre 7 à 8°. Nous verrons que l'on retrouve les performances de l'avion calculé, en adoptant pour la pleine charge l'angle de $7 \frac{1}{2}^\circ$. Comme pendant l'étape la charge varie de 15% par suite de la disparition du combustible, cette valeur de l'angle tombe elle aussi de 15%, ce qui ramène l'angle de vol à $6 \frac{1}{2}^\circ$. Le

constructeur comme on le voit à adopter pour angle moyen du vol de croisière, l'angle strictement optimum.

N. B. — La courbe 2 a été tracée avec les valeurs des constantes convenant pour une pale de d'hélice. La courbe 3 correspond aux coefficients adoptés pour le tracé des courbes de rendement de l'hélice utilisée dans le projet établi à la fin de cette étude.

TROISIÈME PARTIE

ÉTUDE DE L'HÉLICE

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE DE L'HÉLICE EN TRANSLATION

§ 1. VALEURS DE LA POUSSÉE P_1 ,
DE LA PUISSANCE ABSORBÉE \mathcal{C}'
ET DU RENDEMENT η

Pour aborder l'étude de l'avion, force nous est d'exposer les bases de la théorie de l'hélice⁽¹⁾ que nous avons établie en 1911.

Nous avons regardé l'hélice comme constituée d'une suite d'ailes en rotation.

Examinons ce qui se passe pour une d'entre elles, à une distance R de l'axe de l'hélice, là où la vitesse tangentielle peut être représentée par

$$u = \omega R. \quad (112)$$

La figure 30 montre une coupe faite dans l'aile à la distance R de l'axe rotation yy' , supposé perpendiculaire au plan horizontal.

Supposons tout d'abord que ce soit le fluide qui se déplace dans la direction de l'axe avec une vitesse c ; la vitesse relative d'entrée sera égale à w_0 de telle façon que

$$\bar{c} = \bar{w} + \bar{u}_0 \quad (113)$$

Le flux de profondeur dR sera dévié par l'élément AB de la pale et sortira en B avec la vitesse w_1 égale en intensité à la vitesse d'entrée w_0 . (C'est l'hypothèse admise dans toute l'étude de l'aile en translation que nous avons exposée dans le fascicule de 1954 et que nous avons résumée ici.)

En combinant la vitesse w_1 avec la vitesse c , nous obtiendrons la vitesse relative résultante w qui, combinée à son tour avec la vitesse d'entraînement, donnera la vitesse absolue de sortie c_1

$$\bar{c}_1 = \bar{w}_1 + \bar{c} + \bar{u} = \bar{w} + \bar{u}. \quad (114)$$

Remarquons que nous obtiendrons la même valeur dans l'hypothèse où l'hélice se déplacerait en translation suivant l'axe, avec une vitesse \bar{c} .

Les triangles des vitesses que nous avons tracés en contrebas de la figure 30, répondent à cette hypothèse :

$$\bar{c} + \bar{u} = \bar{w}_0 \quad (115)$$

$$\bar{w}_1 + \bar{u} + \bar{c} = \bar{c}_1. \quad (116)$$

En comparant les deux tracés, on voit que le vecteur \bar{c}_1 (en pointillé) est égal et parallèle au vecteur \bar{c}_1 en trait fort.

En passant nous ferons remarquer que la loi de continuité ne peut être satisfaite que si le veine formée par l'ensemble des éléments déviés par l'hélice, est libre de se contracter en formant un cône convergent vers la sortie, puisque le flux supposé au repos dans l'hypothèse de l'hélice en translation, prend à la sortie une vitesse dont la composante axiale est égale à c_1' (fig. 30a).

Avec l'hélice non enveloppée, cette condition est évidemment remplie.

Du fait de la déviation que nous venons d'analyser, naît une force dont les composantes sont l'une perpendiculaire à la direction du flux dévié de l'angle α , l'autre tangente à cette direc-

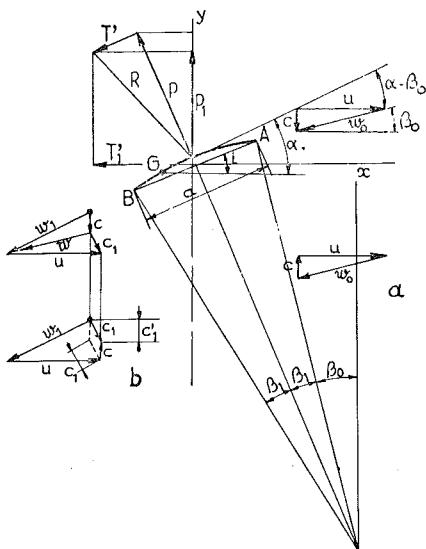


FIG. 30.

tion; nous les avons désignées par P et T' , comme dans l'étude de l'aile.

Projetées sur la direction de l'axe et sur la vitesse u de rotation, elles donneront respectivement deux résultantes :

L'une P_1 qui correspond à la poussée ou à la traction de l'hélice ;

L'autre T_1' qui donnera la valeur de la résistance au déplacement de la pale dans la direction tangentielle :

$$P_1 = P \cos \beta_0 - T' \sin \beta_0 \quad (117)$$

$$T_1' = P \sin \beta_0 + T' \cos \beta_0. \quad (118)$$

En faisant appel aux formules (70), (73) et (108) établies pour l'aile, nous pourrions écrire

$$dP = k' k'' F(z) \frac{\delta}{g} w_0^2 \sin(\alpha - \beta_0) R dR \quad (119)$$

$$dT' = 2 k' k'' \cdot F(z) \frac{\delta}{g} w_0^2 \sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2} R dR \times R, \quad (120)$$

si nous désignons par

$$k' = \frac{c}{a} \quad (121)$$

$$a = k'' R \quad (122)$$

admettant ainsi que a varie comme R et que la surface élémentaire désignée par S dans la théorie de l'aile, est ici $k'' R dR$.

Pour effectuer les intégrations, il nous suffira d'exprimer

$$w_0, \quad \sin(\alpha - \beta_0), \quad \sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2}, \quad \cos \beta_0$$

en fonction de R ; cela nous conduira à écrire :

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{c}{u} = \frac{c}{\omega R} \quad (123)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{2 \pi R} \quad (124)$$

$$w_0^2 = c^2 + \omega^2 R^2 \quad (125)$$

p désignant le pas de l'hélice.

En résolvant les différentes intégrales qui

s'introduisent ainsi dans les expressions de P_1 et de T_1' , nous avons trouvé :

$$P_1 = nkF(z) \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^4 \alpha_1, \quad (126)$$

$$\mathcal{C}' = nkF(z) \frac{\delta}{g} \omega^3 R_1^5 \beta_1 \quad (127)$$

\mathcal{C}' désignant le travail par seconde développé pour actionner l'hélice, k étant mis pour

$$k = k' k'' \quad (128)$$

α_1 et β_1 étant des fonctions de m et de x

$$m = \frac{P}{2 \pi R} \quad (129)$$

$$x = \frac{\omega R_1}{c} \quad (130)$$

indépendantes de R , n désignant le nombre de pales.

Le rendement de l'hélice sera exprimé par la relation

$$\eta = \frac{P_1 \times c}{\mathcal{C}'} = \frac{P \omega R_1 \times x}{\mathcal{C}'} = \frac{\alpha_1 x}{\beta_1}. \quad (131)$$

Ces relations ont été vérifiées dès 1912 par les expériences du capitaine Dorand qui venait de communiquer le premier, les résultats des essais obtenus par lui sur des hélices en translation, en utilisant des hélices actionnées par moteur électrique, placé sur un wagon qu'on laissait descendre sur un plan incliné.

Nous avons tracé dès cette époque, les courbes de α_1 , β_1 et η pour différentes valeurs de m , en fonction de x , et nous avons montré ainsi qu'il existait une valeur optimum du pas relatif m ($m=0,6$).

Les diagrammes de la figure 31 donnent les résultats du calcul quand on adopte pour

$$k_3 = 1,5, \quad k_2 = 0,018, \quad k_1 = 0,0027.$$

Nous reprendrons ces calculs à propos de l'hélice de l'avion que nous nous proposons de calculer, de manière à établir d'une façon mathématique la valeur du coefficient k qui dépend nécessairement du contour adopté pour l'hélice.

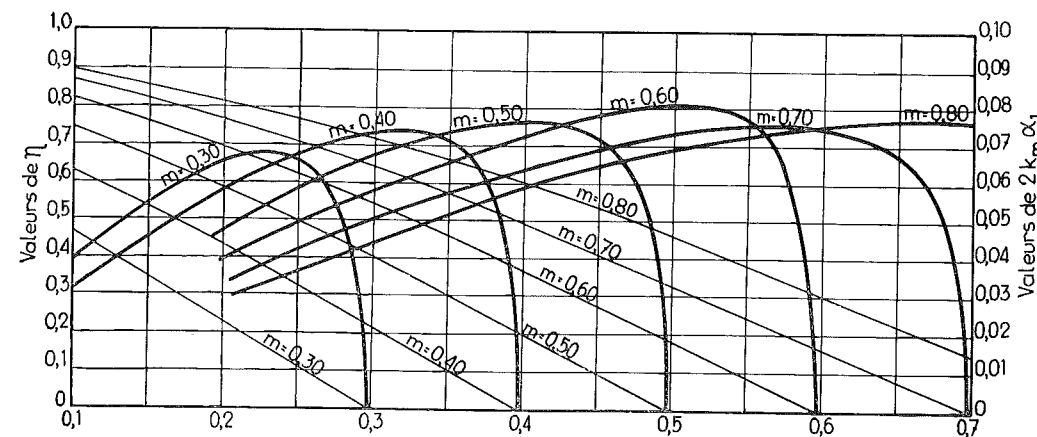


FIG. 31.

(1) Voir Revue Universelle des Mines, 5^e série, tome XXXVII, 1912, 1^{er} et 2^e numéros.

Dans notre étude de 1911, nous avons montré que l'hélice à angle d'attaque constant ne conduisait pas à un rendement sensiblement supérieur à celui de l'hélice à pas constant, le gain étant de l'ordre de 1 à 1 $\frac{1}{2}$ %.

Remarque. — Les formules établies montrent que toutes les hélices géométriquement semblables conduisent aux mêmes valeurs de α_1 et β_1 , ce qui est constamment vérifié par les essais.

Le rendement dépend des valeurs données aux coefficients k_3, k_2, k_1 pour chaque valeur de m . Nous verrons comment on peut calculer ces derniers en fonction du tracé du contour et du profil des sections.

Pour ce qui est du contour, les formules ont été établies strictement dans l'hypothèse où le contour serait figuré en élévation, par un triangle dont le sommet se trouverait au centre O de rotation.

Mais on peut remarquer que α_1 et β_1 ne dépen-

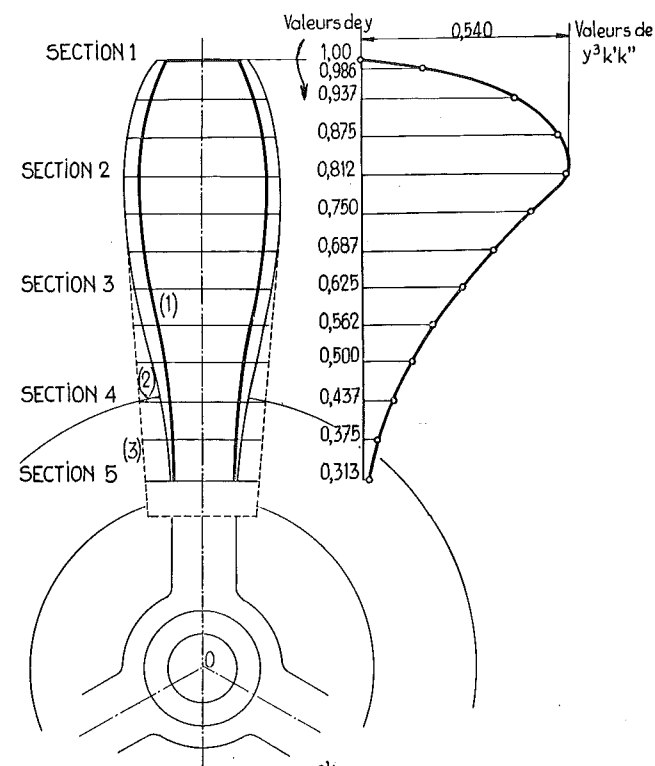


FIG. 32.

dent pas de R et que partant, on peut dériver les valeurs de P_1 et \mathcal{C}' par rapport à R et tenir compte par intégration graphique du contour adopté en faisant varier k' et k'' avec R :

$$dP_1 = nk'k'' F(z) \times 4 R^3 dR \left[\frac{\partial}{\partial R} \omega^2 \alpha_1 \right] \quad (132)$$

$$\frac{d\mathcal{C}'}{\omega R_1} = nk'k'' F(z) \times 4 R^3 dR \left[\frac{\partial}{\partial R} \omega^2 \beta_1 \right] \quad (133)$$

Nous allons aborder ce problème.

§ 2. TRACÉ DE L'HÉLICE

Le tracé se complique d'une question de résistance des matériaux étant donné que les vitesses périphériques atteignent des valeurs de l'ordre de 250 m par sec.

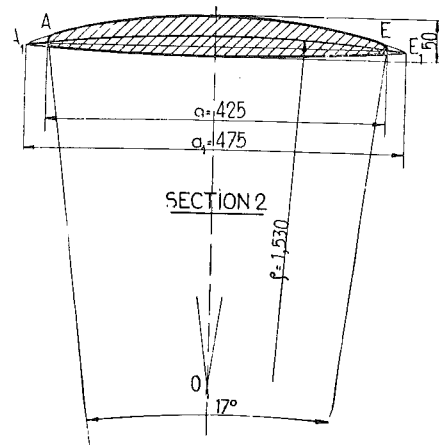


FIG. 33.

Nous nous contenterons d'adopter, pour la section où $0,8 R_1$ qui est généralement la section de plus grande profondeur a , un tracé tel que celui de la figure 33 exécuté au $\frac{1}{10}$ et dont l'épaisseur ϵ est de 50 mm pour une hélice de $R_1 = 1,600$ m dont la vitesse périphérique est de 270 m.sec.

L'hélice étudiée (fig. 32) est celle qui correspond à une valeur de $m = 0,6$, c'est-à-dire celle qui conduit au rendement maximum maximum.

La projection du contour, en élévation, lors-

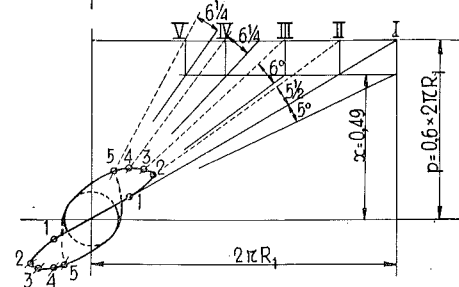


FIG. 34.

que les différentes sections sont ramenées dans le plan de projection, se présente comme l'indique le contour en trait faible de la figure 32, mais il n'est pas arbitraire.

Si nous voulons réaliser l'efficacité maximum au point de vue de la propulsion, nous devons réaliser l'hélice de façon que le flux dévié par l'une des pales n'interfère pas avec le flux dévié par la pale voisine. Pour cela il faut que, a_n désignant la profondeur au rayon R_n , on ait l'égalité (fig. 34)

$$d_n = \frac{2 \pi R_n}{n} \times \sin \alpha = \pi a_n.$$

D'où

$$k_n'' = \frac{a_n}{R_n} = \frac{2}{n} \sin \alpha \quad (134)$$

n étant le nombre de pales, α l'angle des pales donné par la relation

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2 \pi R_n} = \frac{p}{2 \pi R_1} \times \frac{R_1}{R_n} = m \frac{R_1}{R_n} \quad (135)$$

En fonction de m, k_n'' peut donc s'écrire

$$k_n'' = \frac{2}{n} y \frac{m}{y^2 + m^2} \quad (136)$$

en posant :

$$y = \frac{R_n}{R_1} \quad (137)$$

Appliquée à l'hélice caractérisée par $m = 0,6, n = 3$, le calcul conduit au contour de la figure 32, en trait faible, depuis la section où $y = 0,8$ jusqu'à la section où $y = 0,3$ (courbe 2).

Pour le tracé au-delà de 0,8, nous avons utilisé une courbe d'allure elliptique passant par le point 1 d'extrémité où, arbitrairement, nous avons adopté

$$a = 0,210 \text{ m}, \quad \epsilon = 0,017.$$

au lieu de 230 indiqué sur la figure ci-dessous, a_1 devant être coté 230 et non 245.

Pour cette section, nous avons adopté une face inférieure plane et une courbure du dos telle que l'arc bissecteur passant par le point médian de l'épaisseur ϵ , tracée en trait fin figure 35, conduite à un angle au centre de $(\beta_1 + \beta_2) = 17^\circ$, valeur fixée par le rapport

$$\frac{f}{a} = \frac{8,5}{230} = 0,037.$$

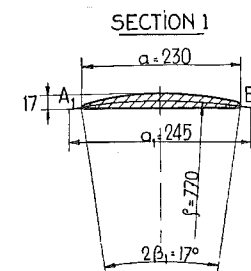


FIG. 35.

En procédant ainsi nous ramenons l'écart entre l'angle α donné par le pas (31° pour $m = 0,6$ à la périphérie) et l'angle actif qui fixe le pas réel, à un angle assez faible puisqu'il est représenté par l'angle γ , c'est-à-dire dans notre cas 4° .

Ceci veut dire que si l'on veut réaliser une hélice à pas constant, nous aurons à faire pivoter les sections tracées en partant du pas constant 0,6, d'un angle de 4° , à la périphérie.

Si nous conservons cet angle $(\beta_1 + \beta_2) = 17^\circ$ pour tracer les sections suivantes, nous aurons à donner à partir de la section correspondant à $y = 0,85$, une courbure à la face inférieure. La figure 33 montre la solution lorsque l'épaisseur imposée atteint 0,050 m, l'arc bissecteur, si l'on ménage des congés de 2 mm, étant fixé par le rapport $\frac{f}{a} = 0,037$, soit $f = 0,037 \times 0,450 = 17$.

Le rayon ρ de cet arc de cercle est égal à

$$\frac{0,450}{0,296} = 1,53,$$

0,296 étant donné par les tables appropriées pour $\frac{f}{a} = 0,037$.

A partir de cette section, les sections deviendront de plus en plus biconvexes jusqu'à devenir symétrique par rapport au plan défini par l'hélicoïde de pas relatif $m = 0,6$; à ce moment il n'y aura plus de correction à faire subir à l'angle α défini par le pas, le profil réagissant comme un plan caréné, l'angle de déviation restant par conséquent égal à l'angle α du plan médian de la pale.

En fonctionnement normal, c'est-à-dire aux environs du rendement maximum, les angles de déviation $(\alpha - \beta_0)$ ne dépassent pas 8° , et dans ces conditions, le profil plan caréné n'est pas inférieur aux autres profils.

Pour ne pas descendre en dessous de l'allongement 5 pour les sections voisines du moyeu, nous avons adopté des valeurs plus grandes que celles fixées par la relation (136) et indiquées par la courbe (3) mais pour le calcul de l'efficacité nous nous sommes tenu aux valeurs de k'' déduites de cette relation (136).

Le tracé ainsi déterminé permet par intégration graphique de fixer la valeur de

$$\int_0^1 y^3 k' k'' dy \quad (138)$$

en adoptant pour k' la loi elliptique à partir de $y = 0,8$, rectiligne et égale à π en dessous de $y = 0,8$.

En adoptant la loi elliptique à partir de $y = 0,8$, nous avons voulu nous rapprocher de ce que nous avons constaté pour l'aile rectangulaire; ce n'est que par l'analyse de nombreux

essais que l'on pourrait situer le point de départ de cette chute de k' .

Réserve faite de cette hypothèse, nous pouvons dire que nous n'avons fait qu'une application stricte de la théorie pour obtenir l'intégrale (138) et écrire :

$$P_1 = nkF(z) \frac{\partial}{\partial \sigma} \omega^2 R_1^4 \alpha_1 \quad (138bis)$$

$$\mathcal{C}' = nkF(z) \frac{\partial}{\partial \sigma} \omega^3 R_1^5 \beta_1 \quad (139)$$

avec pour valeur de k , si $m=0,6$, $n=3$ pales

$$k = (k'k'')_m = 4 \times 0,2 = 0,800$$

la valeur 0,2 résultant de l'intégration graphique (138) (exactement 0,196).

§ 3. TRACÉ DE LA COURBE DU RENDEMENT

Il nous reste pour pouvoir calculer numériquement P , \mathcal{C}' et η à évaluer

$$F(z), \quad k_3, \quad k_2, \quad k_1.$$

I. Pour ce qui concerne $F(z)$, la théorie établit qu'elle prend la valeur 0,750 pour le plan caréné, 0,830 pour le profil courbe à une seule courbure.

Cela suppose que le flux à la sortie fait un angle $(\beta_1 + \gamma)$ avec l'angle d'entrée et que le redressement des filets à l'arrière réduit la poussée et la traînée de l'aile, dans la proportion

$$\frac{\beta_1 + \gamma}{\beta_1 + \beta_2}$$

Dans le cas de l'hélice nous pourrions dire que c'est la valeur $(\beta_1 + \gamma)$ qu'il conviendrait d'adopter si on pouvait la concevoir à une pale ; mais la succession du passage des pales empêche le redressement à la sortie et fait que l'angle de déviation n'est plus $(\beta_1 + \gamma)$ mais $(\beta_1 + \beta_2)$.

Ceci veut dire qu'en suivant la théorie stricte de l'aile, nous avons dans le cas de l'hélice sous-estimé la valeur de $F(z)$: si $(\beta_1 + \gamma)$ passe à $(\beta_1 + \beta_2)$ $F(z)$ passe de 0,75 à 1,00 ; le redressement ne se produisant plus à la sortie 1,00 passe à 1,33. C'est donc $F(z)=1,33$ que nous devons adopter et la théorie des ventilateurs publiée en 1947⁽¹⁾ nous conduit à la même conclusion.

Dans le tracé des courbes de 1911, nous avons donné à

$$k_3 = \frac{F(x)}{F(z)} = 1,5 \quad (140)$$

A vrai dire à cette époque un peu lointaine, nous n'avons donné aucune signification physique à ces coefficients : nous nous étions borné à les déduire des essais sur des ailes minces, en

⁽¹⁾ Ouvrage édité par Georges Thone intitulé : *Homage de la Faculté des Sciences appliquées à l'Association des Ingénieurs sortis de l'Ecole de Liège, à l'occasion de son centenaire.*

comparant la valeur réelle de T' à la valeur théorique T .

Cette valeur de 1,5 ressortait de cette comparaison et c'est sur cette base que nous avons tracé les courbes reproduites figure 31.

A présent que nous possédons un outil plus affiné, nous prendrons pour k_3 la valeur 1,33 et pour les valeurs k_2 et k_1 celles qui correspondent aux relations (91), (98), (106) et (107)

$$b = 1,01 k \times 0,6 \left(1 + n \frac{m}{m_1}\right) = 0,91 k \quad (141)$$

$$a = 0,008 m^2 + \frac{2 k_1''}{x} = 0,002 58 \quad (142)$$

puisque

$$\frac{1}{m_1} = \left(1 + \frac{\gamma}{\beta_1}\right)^2 \times \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{(0,75)^2} \times \frac{1}{0,148} = 12,$$

$$m = \frac{1}{8}, \quad x = 1,5$$

et que pour $2 k_1''$, on peut prendre pour des surfaces parfaitement polies et des grands nombres de Reynolds

$$2 k_1'' = 0,002 0 \quad (143)$$

Pour ce qui regarde k de la relation (95), nous avons vu dans l'analyse des résultats au tunnel sur les ailes, que normalement $k=0,025$ mais qu'il s'agit là d'une valeur minimum ; que dès qu'une perturbation importante se présentait à l'entrée (trop faible arondi de l'arête d'entrée, angle de déviation dépassant 20°) k pouvait atteindre des valeurs 10 fois et plus la valeur minimum.

Ici en raison des troubles apportés par le passage répété des aubes, il semble que pour nous rapprocher des valeurs utilisées antérieurement, il faudrait admettre pour k six fois la valeur minimum, soit

$$b = 0,91 k = 0,91 \times 0,025 \times 6 = 0,136 \quad (144)$$

D'où les valeurs de

$$k_2 = \frac{b}{2 k' F(z)} = \frac{0,136}{2 \pi \times 1,33} = 0,016 2 \quad (145)$$

$$k_1 = \frac{0,002 58 + 0,136 \sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2}}{2 \pi \times 1,33} = \frac{0,017 98}{8,35} = 0,002 16 \quad (146)$$

C'est sur cette base qu'ont été tracées les courbes de la figure 36 donnant le rendement η , α_1 et β_1 pour $m=0,6$.

Pour les valeurs de $m=0,5, 0,4$, et $0,3$ nous avons dû faire varier les valeurs de k_1 et k_2 ; étant donné que nous voulions cette fois connaître les caractéristiques de l'hélice à pas variable, réalisée par la rotation des pales, le contour restant forcément invariable ; ceci

implique forcément que les valeurs de a calculées pour $m=0,6$, sont trop grandes pour les valeurs de $m=0,5, 0,4$ et $0,3$ et que partant les pertes sont plus grandes pour ces dernières valeurs de m que si les proportions avaient été établies en partant de la relation (136) écrite pour $y=1$

$$k_1'' = \frac{2}{n} \frac{m}{1+m^2} \quad (147)$$

En d'autres termes, si k' peut être pris égal à π avec le tracé de la figure 32, il ne peut valoir pour les valeurs de m inférieures, que celles figurant au tableau I ci-contre.

TABLEAU I

m	k_1''	k'	k_2	k_1
0,6	0,294	$\pi \times \frac{0,294}{0,294} = 1,00 \pi$	0,016 2	0,002 16
0,5	0,256	$\pi \times \frac{0,256}{0,294} = 0,91 \pi$	0,017 8	0,002 37
0,4	0,230	$\pi \times \frac{0,230}{0,294} = 0,78 \pi$	0,020 8	0,002 77
0,3	0,199	$\pi \times \frac{0,199}{0,294} = 0,62 \pi$	0,026 1	0,003 48

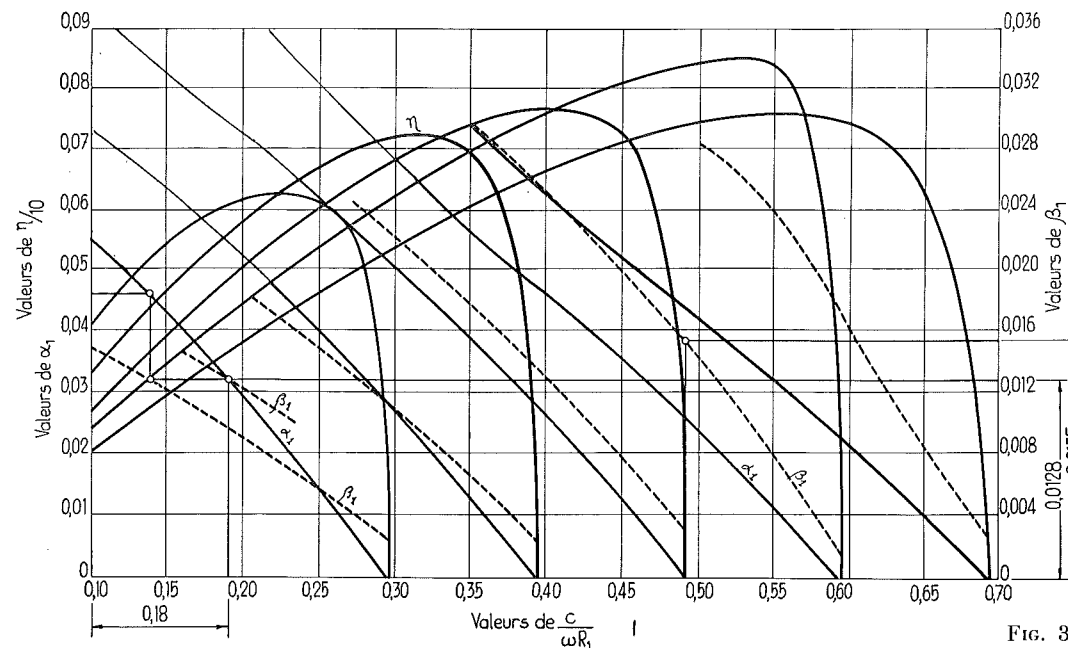


FIG. 36.

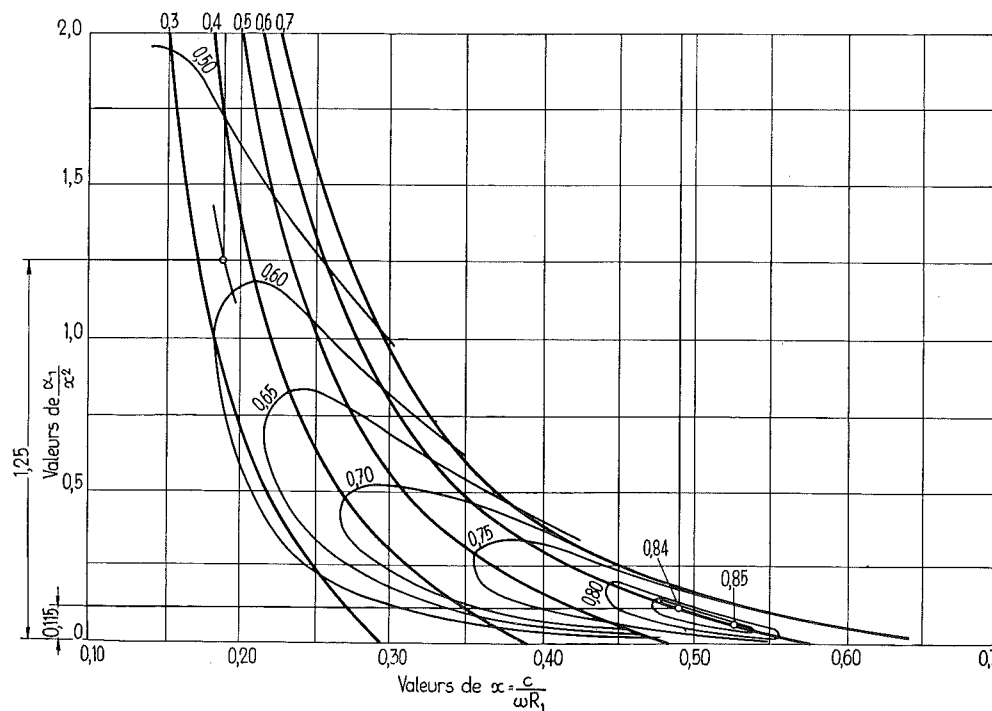


FIG. 39.

D'après les relations (145) et (146) les valeurs de k_0 et k_1 sont inversement proportionnelles à k' ; d'autre part les valeurs limites de k_1'' sont données par la relation (147). Si à partir de cette limite le flux influencé ne croît plus, c'est dire que le coefficient de proportionnalité doit être réduit dans le rapport $\frac{0,256}{0,294}$ pour $m=0,5$ et ainsi de suite.

Il en résulte nécessairement un accroissement des pertes relatives.

La figure 36 donne les courbes résultant des calculs effectués sur cette base.

Elles montrent nettement que la valeur la plus favorable de m est égale à 0,6.

Les valeurs de P_1 diminuent plus rapidement que α_1 puisque pour passer de l'une à l'autre, il faut multiplier ces dernières par le facteur k' variable avec m suivant les indications de la colonne (3) du tableau I.

Lorsque l'hélice fonctionne au voisinage de $x=0$ les angles de déviation dépassent large-

ment 20°, surtout pour les valeurs de m dépassant 0,35.

Il en résulte une erreur, puisque ce n'est plus $\sin \alpha$ qu'il faut introduire dans les formules, mais $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. Pour tenir compte de ce fait nous avons, en 1911, calculé α_1 pour $x=0$ en tenant compte de cette remarque; il en résultait un abaissement de l'ordonnée à l'origine des courbes de α_1 , et pour le tracé définitif des diagrammes tant de la figure 31 que celui de la figure 36, nous avons fait converger les courbes de α_1 vers cette nouvelle origine; les parties corrigées ainsi dans la figure 36, ont été tracées en trait faible. On peut voir qu'elle n'affecte que la région du diagramme qui n'est pas utilisée dans la pratique.

A présent que nous disposons de tous les éléments nécessaires au calcul de l'avion, nous pouvons aborder ce problème crucial pour la théorie, en partant des données correspondant à un programme précis.

QUATRIÈME PARTIE

CALCUL DES DIMENSIONS GÉNÉRALES DE L'AVION

§ 1. COMMENT SE POSE LE PROBLÈME.

LES DONNÉES NÉCESSAIRES AU POINT DE DÉPART

Pour pouvoir résoudre le problème du calcul des dimensions générales d'un avion destiné à un service déterminé, il faut partir des trois données fondamentales :

- Le tonnage utile Q_u ;
- La vitesse du vol de croisière c ;
- L'altitude h admise pour ce vol de croisière ;
- La vitesse tolérée à l'atterrissage c_a ;
- La longueur de la piste d'envol.

*
**

Par comparaison (ou bien en utilisant les résultats d'un premier avant-projet), on peut établir :

- 1° Le poids mort de l'ensemble Q_m ;
- 2° Le poids du carburant à enlever pour franchir l'étape, compte tenu d'une réserve destinée à parer à des circonstances exceptionnelles Q_c .

La charge à enlever au moment du décollage devient donc

$$Q = Q_m + Q_c + Q_u \quad (147)$$

Q_u représentant le poids utile.

Pour le *Douglas DC 6* dont nous allons déterminer les dimensions principales y compris celles des hélices :

$$Q_u = 10\,000, \quad Q_m = 27\,000, \quad Q_c = 9\,000, \\ Q = 46\,000$$

la vitesse normale de croisière prévue à l'altitude de 5 000 m peut varier entre 360 et 460 km/heure (valeur moyenne 410 km) suivant la charge et les circonstances atmosphériques.

Les performances dont est capable l'avion, dépendent en particulier des caractéristiques des moteurs; voici les données pour le moteur :

2 400 HP à 2 800 t/m	jusqu'à l'altitude de 1 500 m
1 800 HP à 2 600 t/m	jusqu'à l'altitude de 2 500 m
1 700 HP à 2 600 t/m	jusqu'à l'altitude de 5 000 m
1 500 HP à 2 300 t/m	jusqu'à l'altitude de 5 000 m

Ces caractéristiques ne peuvent se concevoir qu'avec des moteurs munis d'un compresseur

qui est ici à simple étage, mais à deux vitesses.

Le diamètre d'encombrement des moteurs qui a une grande importance au point de vue des résistances passives, peut être pris, avec son carénage, égal à 1,450 m.

A ces données il faut ajouter les renseignements suivants qui résultent des conditions d'exploitation :

1. Envergure admise 36 m ;
2. Répartition des charges qui dicte le rapport entre la surface de l'aile et la surface de l'empennage horizontal arrière; ce rapport est ici égal à 4.

Pour le calcul des résistances passives, il est nécessaire de connaître :

1. Le diamètre au maître-couple de la coque, dicté par les nécessités de l'aménagement intérieur, ici, 3,400 m ;
2. La surface de l'empennage vertical arrière qui atteint ici 15 m².

La profondeur de l'aile à l'endroit de sa liaison avec la coque, de même que son épaisseur, sont dictées par des questions de résistance des matériaux, et il ne nous est évidemment pas possible de déterminer ces valeurs.

Pour que nous ne nous écartions pas, dès le départ, des valeurs admises par le constructeur, nous avons demandé à connaître :

1. La profondeur à l'endroit de la liaison avec la coque : 5,800 m ;
2. La profondeur à l'extrémité de l'aile : 1,800 m.

Nous n'avons pas cru pouvoir demander d'autres renseignements, et nous avons ainsi été forcé d'admettre les valeurs de ϵ , épaisseur de l'aile :

- 1° à l'encastrement : 0,850 m ;
- 2° à l'extrémité : 0,225 m,

de façon à réaliser l'allongement $\frac{1}{m}$ compris entre 7 et 8; nous nous trouvons ainsi vraisemblablement légèrement *au-dessus des valeurs réelles*. Nous ferons nos calculs en supposant $\frac{1}{m} = 7,5$, qui représente une valeur moyenne maximum.

§ 2. CHOIX DE LA COURBURE DES AILES ET DES ANGLES CARACTÉRISTIQUES

Dans l'utilisation de l'aile, on se voit obligé de faire varier l'angle de déviation α , en inclinant la direction AY de l'aile représentée figure 37, par rapport à la direction du déplacement horizontal (direction du vecteur c).

Pour le vol de croisière, il convient que cette direction AY soit peu différente de la direction du déplacement, de manière à réduire autant que possible l'importance du maître-couple apparent ; cela conduit à adopter un rapport de l'ordre de $\frac{\beta_2}{\beta_1} = 0,5$.

Comme pour assurer les manœuvres, il faut prévoir des volets qui serviront à l'atterrissage en vue d'augmenter l'angle de déviation, nous avons adopté le profil parabolique qui permet de placer l'articulation du volet à la naissance de la partie rectiligne arrière (fig. 25). On arrive à un bon tracé, volet abaissé, en choisissant θ de telle façon que

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 + \theta} = \frac{AB}{AE} = \frac{2}{3} \quad (148)$$

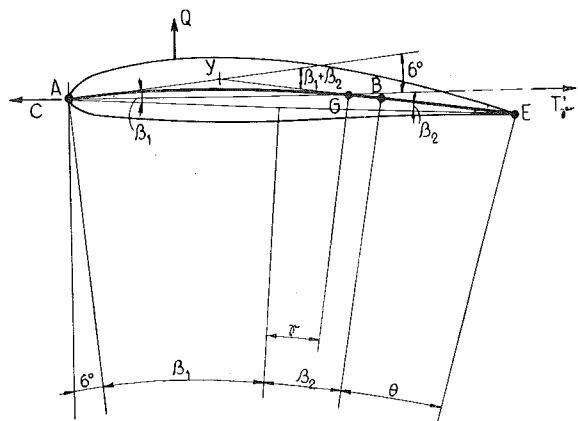


FIG. 37.

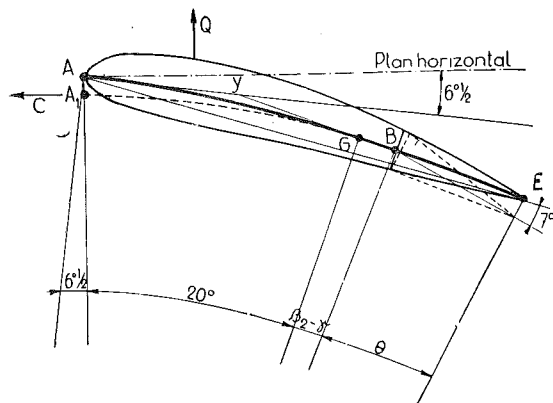


FIG. 38.

Cela nous amène à

$$\frac{\theta}{\beta_1} = 0,7 \quad \text{avec} \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} = 0,5$$

Pour le choix de β_1 , nous devons tenir compte de ce que, au moment du décollage, il faudra réaliser pour l'aile un angle de déviation

$$\beta_1 + \gamma = 20^\circ ;$$

cela conduit pratiquement à prendre

$$\beta_1 = 10^\circ ;$$

d'où

$$\beta_1 = 10^\circ, \quad \beta_2 = 5^\circ,$$

$$(\beta_1 + \beta_2) = 15^\circ, \quad \theta = 7^\circ.$$

La valeur de γ peut se déduire de la courbe expérimentale publiée dans le fascicule de 1954, en écrivant

$$\frac{\gamma}{\beta_1} = 0,7 \times \frac{\beta_2}{\beta_1} = 0,35 \quad \text{soit} \quad \gamma = 3 \frac{5}{10}^\circ$$

0,7 étant le chiffre relevé sur le diagramme.

Lorsque la direction AY se confond avec la direction du déplacement, l'angle de déviation est égal à $(\beta_1 + \gamma)$.

Pour la position dessinée figure 37, qui est celle du vol de croisière, l'angle de déviation doit être ramené à un angle très près de l'angle le plus favorable, qui est comme nous l'avons vu, de 7° .

Nous adopterons cet angle de 7° pour la charge moyenne, ce qui conduira à $7 \frac{1}{2}$ degrés

pour la pleine charge au départ et $6 \frac{1}{2}$ degrés

pour l'avion vidé de son carburant, tout au moins du carburant consommé pendant l'étape, la réserve restant intacte.

La direction AY fait donc avec l'axe horizontal, un angle de $13 \frac{1}{2} - 7 \frac{1}{2} = 6^\circ$.

Au décollage nous devons réaliser l'angle maximum 20° ; pour cela il faudra incliner l'axe de l'avion de $12 \frac{1}{2} (20^\circ - 7 \frac{1}{2}^\circ)$ comme l'indique la figure 38, avec le volet abaissé de 7° .

En utilisant les valeurs explicites de $F(z)$, $F(x)$ et $\frac{\Phi}{\Phi_1}$ qui sont établies dans le fascicule de 1954, nous avons calculé les valeurs suivantes :

$$\frac{\Phi}{\Phi_1} F(z) \sin \alpha \quad \text{pour} \quad 7 \frac{1}{2}^\circ$$

$$0,785 \times 0,130 = 0,102 \quad (149)$$

$$\frac{\Phi}{\Phi_1} F(z) \sin \alpha \quad \text{pour} \quad 20^\circ$$

$$0,785 \times 0,342 = 0,269 \quad (150)$$

$$\frac{\Phi}{\Phi_1} F(z) \sin \alpha \quad \text{pour} \quad 27^\circ$$

$$0,740 \times 0,453 = 0,336 \quad (151)$$

Ce dernier chiffre 0,336 a été, en fait, calculé en admettant que l'angle de déviation de 27° se faisait sentir sur les 0,8 de la surface de l'aile et sur la totalité de l'empennage horizontal arrière, alors que pour les 0,2 de la surface restante, l'angle de déviation était maintenu égal à 20° [la valeur de $F(z)$ pour la partie de l'aile utilisant le volet était de 0,850].

§ 3. CALCUL DE LA SURFACE S DE SUSTENTATION

Cette surface S doit être calculée pour permettre l'atterrissage à une vitesse de l'ordre de 150 km/heure, chiffre indiqué par le constructeur.

Pour retrouver la surface adoptée par le constructeur du DC 6, 170 m², nous devons appliquer la relation

$$\left(S \frac{\delta}{g} c_a^2 \right) k' \frac{\Phi}{\Phi_1} F(z) \sin 27^\circ = Q \quad (152)$$

Au niveau du sol $\frac{\delta}{g}$ peut être pris égal à 0,125 ; k' est égal à 3,05 [formule (87)] ; d'où

$$c_a^2 = \frac{46\,000}{0,125 \times 170 \times 3,05 \times 0,336}$$

$$= \frac{46\,100}{21,8} = (46,0)^2 \quad (153)$$

le facteur 0,336 étant celui calculé plus haut et repéré sous le n° 151.

La vitesse d'atterrissage serait ainsi de 166 km/heure.

Le constructeur indique 150 km/heure.

D'où vient la différence ? Très légitimement le constructeur envisage l'atterrissage en fin d'étape, quand l'appareil est allégé de 6 000 kg de carburant ; c'est donc 40 000 kg qu'il faudrait inscrire au numérateur de la fraction ci-dessus. Mais il y a plus : nous n'avons pas tenu compte de la surface de la coque comprise entre les ailes, qui comporte une surface de $(3,40 \times 5,80) = 19,6$ m² et qui est inclinée de $12 \frac{1}{2}$ degrés. Si on adopte la même valeur du coefficient $k' \frac{\Phi}{\Phi_1} F(z)$, le dénominateur doit être agrandi d'un chiffre supplémentaire

$$19,6 \times 0,125 \times 3,05 \times 0,785 \times \sin 12 \frac{1}{2}^\circ$$

$$= 5,89 \times 0,216 = 1,30.$$

D'où

$$c_a^2 = \frac{40\,000}{21,80 + 1,30} = \frac{40\,000}{23,1} = (41,5)^2 \quad (154)$$

ce qui correspond exactement à la vitesse indiquée par le constructeur de

150 km/heure.

§ 4. CALCUL DE LA TRAÎNÉE

La traînée de l'avion peut s'évaluer en écrivant :

$$T_i = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) K_0' \quad (155)$$

avec comme signification de K_0' la valeur donnée par la relation (108)

$$K_0' = 2 k' F(z) \frac{\Phi}{\Phi_1} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \times R_f \quad (156)$$

Déterminons la valeur de R_f .

Les valeurs explicites de $F(x)$ et de $F(z)$ montrent que

$$k_s = \frac{F(x)}{F(z)} = 0,600 \quad (157)$$

pour les formes adoptées pour l'aile.

Nous avons vu d'autre part que la relation (91), lorsqu'on tient compte des résistances passives des parties sans portance, doit s'écrire :

$$a = 0,08 m^2 + 0,00185 + \Sigma C' \frac{S'}{S} \quad (158)$$

Avec $m = \frac{1}{7,5}$ le premier terme vaut 0,00142.

Pour la somme des pertes correspondant aux parties sans portance, nous pouvons les évaluer comme suit :

1° Pour la coque d'après la formule (64)

$$D = 3,40 \text{ m}, \quad C_r = 0,032$$

$$\text{soit} \quad 0,032 \frac{9,10}{170} = 0,00172$$

2° Pour les quatre moteurs

$$\text{carénés d'après la formule (65)}$$

$$D = 1,45 \text{ m}, \quad C_w = 0,0687$$

$$0,0687 \frac{6,6}{170} = 0,00266$$

3° Pour l'empennage vertical avec

$$m = \frac{1}{8} \quad s = 2,10 \quad C = 0,0280$$

$$0,0280 \frac{2,1}{170} = 0,00035$$

$$\text{soit au total} \quad 0,00473$$

Cela conduit à la valeur de

$$a = 0,00800 \quad (159)$$

En ce qui concerne b , m_1 est égal dans notre

cas à $\frac{1}{12,6}$, k doit être pris égal à la valeur minimum 0,024

$$b = 0,015 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{12,6}{7,5} \right) = 0,0234 \quad (160)$$

Comme $k' = \pi \times 0,990 \times 0,98 = 3,05$ (formule 87)

$$2k' \frac{\Phi}{\Phi_1} F(z) = 2 \times 3,05 \times 0,785 = 4,80 \quad (161)$$

$$k_1 = \frac{0,00800 + b \sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2}}{4,80} = 0,00224 \quad (162)$$

$$k_2 = \frac{0,0234}{4,80} = 0,00485 \quad (163)$$

$$K_0' = 4,80 \left(0,600 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 0,00485 \sin \frac{\alpha}{2} + 0,00224 \right) \quad (164)$$

Le choix de l'angle n'est évidemment pas arbitraire : nous avons vu que l'angle de vol le plus favorable était de 7° ; pour le réaliser, il faut évidemment que la surface S adoptée, la valeur $\frac{\delta}{g}$ réalisée à la hauteur h choisie pour le vol de croisière, et enfin la vitesse c qui résulte de la puissance disponible et du rendement de l'hélice, conduisent à la relation, T_t étant l'effort de traction disponible

$$T_t = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) K_0' \quad (166)$$

K_0' étant calculé pour l'angle de 7° .

Comme le choix de cet angle a une grande importance, nous l'avons choisi aussi près que possible de l'angle le plus favorable $7 \frac{1}{2}^\circ$.

Cette valeur $7 \frac{1}{2}^\circ$ s'explique, nous le répétons, du fait qu'à la fin de l'étape, alors que la charge totale est réduite du poids du combustible consommé, l'angle de vol nécessaire devient $6 \frac{1}{2}^\circ$, ce qui revient à dire que nous avons choisi 7° pour la moyenne de la charge.

Avec la valeur de δ réalisée à l'altitude de 5 000 m, qui est de 1,87 fois plus faible que le poids spécifique au sol, on trouve pour K_0' avec

$$\alpha = 7 \frac{1}{2}^\circ \quad \text{soit} \quad \frac{\alpha}{2} = 3 \frac{3}{4}^\circ$$

$$K_0' = 0,0220$$

$$T_t = \frac{170 \times 0,125}{1,87} \times 0,0220 c^2 = 0,25 c^2 \quad (167)$$

Pour déterminer c , il faut faire intervenir la puissance disponible aux moteurs, et le rendement de l'hélice.

§ 5. CALCUL DE L'HÉLICE

Appliquant la relation qui donne la traction de l'hélice, nous pourrions écrire

$$T_t = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) K_0' = nk \frac{\delta}{g} (\omega R_1)^2 R_1^2 \alpha_1 \quad (168)$$

ce qui conduit à la relation

$$\frac{S}{R_1^2} \times K_0' \frac{1}{nk} = \frac{\alpha_1}{x^2} \quad (169)$$

où nk est mis pour $nkF(z)$ avec

$$n = 4 \times 3 = 12 \text{ pales} \\ F(z) = 1,33$$

suivant la remarque faite au paragraphe 3 de la 3^e Partie.

Nous avons dressé figure 39 (voir fig. 36) le diagramme de $\frac{\alpha_1}{x^2}$ en fonction de x , pour différentes valeurs de m , et nous avons réuni tous les points de même rendement.

On voit apparaître ainsi une région de maximum maximorum (0,85), qui ne peut être réalisée que pour des valeurs très faibles de $\frac{\alpha_1}{x^2}$.

Pour se rapprocher de 0,85, mettons pratiquement 0,84, il faut donc agir sur R_1 puisque dans la relation (169) S , K_0' et nk sont déterminés.

En admettant $R_1 = 1,60$ m, on trouve

$$\alpha_1 = 0,0115 \quad (170)$$

et sur le diagramme de la figure 39

$$m = 0,6, \quad x = 0,490, \quad \eta = 0,840.$$

Pour l'abscisse correspondante, on trouve dans le diagramme de la figure 36,

$$\beta_1 = 0,0155.$$

Or de la relation

$$Q = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) 2k' F(z) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (171)$$

à laquelle il faut satisfaire, nous pouvons tirer c^2 , la valeur de $\sin \frac{\alpha}{2}$ étant égal $\sin 3 \frac{3}{4} = 0,0657$.

$$c^2 = \frac{46\,000 \times 1,87}{170 \times 0,125} \times \frac{1}{4,80} \frac{1}{0,0657} = (113)^2 \quad (172)$$

Pour réaliser cette vitesse de 113 m soit 406 km/heure, étant donné que x doit atteindre 0,490, il faut obtenir une vitesse périphérique à l'hélice de

$$\omega R_1 = \frac{c}{x} = \frac{113}{0,490} = 231 \quad (173)$$

Pour cette vitesse périphérique, la puissance est donnée par la relation (139)

$$N_c = \frac{T_t}{75} = \frac{1}{75} nk \frac{\delta}{g} (\omega R_1)^3 R_1^2 \beta_1 \quad (174)$$

$$\text{soit} \quad N_c = 5\,560 \text{ HP} \quad (175)$$

Le rendement de l'hélice ainsi obtenu atteignant 0,84, cela correspond à une puissance utile de traction de

$$N_u = 0,84 \times 5\,560 = 4\,670 \text{ HP} \quad (176)$$

Nous avons évalué la traînée par la relation (167); avec $c = 113$ m, on trouve

$$N_a = 4\,800 \text{ HP} \quad (177)$$

C'est le chiffre exact indiqué par le constructeur et s'il diffère du chiffre ci-dessus, c'est que les calculs sont faits à la règle et que les lectures sur les diagrammes (36) et (39) après fixation des points caractéristiques, comportent une certaine approximation.

En remontant aux données, on verra que les quatre moteurs sont capables de développer à 5 000 m et 2 300 t/m la puissance de 6 000 HP, alors que nous n'atteignons que 5 700 en y ajoutant 2 1/2 % pour le rendement de l'engrenage indispensable, puisque l'hélice ne fait que

$$\omega = \frac{231}{1,60} = 144 \quad \text{soit} \quad 1\,380 \text{ t/m} \quad (178)$$

contre 2 300 t/m au moteur ; le rapport ressort ainsi à

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 0,6 \quad (179)$$

La consommation renseignée par le constructeur est de 1 050 kg ; si on admet 180 g par cheval effectif et par heure, notre calcul conduit à

$$1\,020 \text{ kg} \quad (180)$$

en ne tenant pas compte du surplus de consommation à la montée.

§ 6. ETUDE DE LA MONTÉE

Les moteurs ont été étudiés pour pouvoir tourner au sol à la vitesse de

$$2\,800 \text{ t/m} \quad (\omega = 293).$$

A ce régime ils fournissent une puissance de 2 400 HP chacun.

La vitesse périphérique des hélices, compte tenu du réducteur au rapport 0,6, est égale à

$$\omega R_1 = 293 \times 0,6 \times 1,60 = 280 \text{ m.sec} \quad (181)$$

(¹) Ce chiffre calculé sur la base d'une consommation horaire par cheval très faible, est néanmoins trop élevé, s'il doit être mis en comparaison avec le chiffre établi par contrôle sur une étape de six heures, par exemple. En effet, ce chiffre de 1 020 kg suppose une puissance constante maximum, alors que la charge Q diminuant au cours de l'étape, il ne faut faire intervenir que la puissance moyenne : dans notre cas (et pour l'étape de six heures) en chiffres ronds

$$5\,560 \times \frac{43\,000}{46\,000} = 5\,200$$

soit pour le chiffre corrigé 936 kg.

Cette vitesse de 280 m/sec au sol est voisine des 0,8 de la vitesse du son, vitesse qu'il convient de ne pas dépasser ; en vol normal le régime des moteurs est ramené à 2 300 t/m, si bien que la vitesse périphérique des hélices est de

$$280 \times \frac{2\,300}{2\,800} = 230 \text{ m.sec} \quad (182)$$

vitesse cette fois un peu inférieure à la vitesse du son à l'altitude de croisière de 5 000 m.

On voit que le constructeur a été amené à adopter partout les valeurs optima ou les valeurs limites :

Pour l'angle de vol (7°);

Pour l'altitude de croisière (5 000 m);

Pour les vitesses périphériques des hélices (230 m.sec à 5 000 m).

Nous avons vu que par l'utilisation du volet on peut descendre à 41,5 m.sec pour la vitesse d'atterrissage ; si on veut se passer du volet pour réduire la traînée, et garder l'angle de 20° , la vitesse de décollage sera de 50,5 m.sec

$$c^2 = \frac{46\,000}{0,125 \times 170 \times 4,80 \times \sin^2 10^\circ} \\ = \frac{46\,000}{18,0} = (50,5)^2 \quad (183)$$

A cette valeur de c correspond une valeur de

$$x = \frac{50,5}{280} = 0,180 \quad (184)$$

En ce qui concerne β_1 , on peut le calculer au moyen de la relation (184), en ayant soin de tenir compte que le coefficient k' qui y figure doit être réduit d'après le tableau I pour une valeur de m de l'ordre de 0,3, à 0,62 :

$$\beta_1 = \frac{9\,600 \times 0,98 \times 75}{0,125 (280)^3 \times (1,60)^2 \times 12 \times 1,06 \times 0,62} \\ = 0,0128 \quad (185)$$

En se servant des diagrammes des figures 36 et 39, on peut voir que pour $x = 0,18$, il faut choisir une valeur de m de l'ordre de 0,33, et que pour cette valeur de m , $\frac{\alpha_1}{x^2} = 1,25$ environ.

De cette valeur de $\frac{\alpha_1}{x^2}$, on peut déduire, au moyen de la relation (169)

$$K_0' = 1,25 \frac{1}{8,45} = 0,148 \quad (186)$$

Or lorsque l'avion prend une pente de $\sin \varepsilon$ et une accélération φ , la valeur de T_t donnée par la formule (108) est accrue de

$$Q \left(\sin \varepsilon + \frac{\varphi}{g} \right) \quad (187)$$

si bien que

$$T_t = QR, \sin \frac{\alpha}{2} + Q \left(\sin \varepsilon + \frac{\varphi}{g} \right) = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) K_0' \quad (188)$$

avec

$$K_0' = 2 k' F(z) \left[k_3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \left(k_2 - \sin \varepsilon - \frac{\varphi}{g} \right) \sin \frac{\alpha}{2} + k_1 \right] \quad (189)$$

Comme

$$2 k' F(z) = 4,80,$$

et que

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin 10^\circ = 0,174,$$

$$K_0' = 4,80 \left[0,0195 + \left(\sin \varepsilon + \frac{\varphi}{g} \right) 0,174 \right] = 0,148. \quad (190)$$

D'où

$$0,174 \left(\sin \varepsilon + \frac{\varphi}{g} \right) = \frac{0,148}{4,80} - 0,0195 = 0,0116 \quad (191)$$

soit pour

$$\sin \varepsilon + \frac{\varphi}{g} = 0,0665. \quad (192)$$

En supposant un angle de $3 \frac{1}{4}^\circ$ seulement $\sin \varepsilon = 0,0567$ soit pour φ la différence

$$\varphi = 9,81 \times 0,010 = 0,0981 \quad (193)$$

valeur manifestement faible.

Nous ne poursuivrons pas ces calculs; nous nous bornerons à indiquer la méthode qui permet, connaissant φ , de déterminer t pour passer de 50,5 à 60,0 m.sec par exemple et d'en déduire e

$$e = \frac{1}{2} \varphi t^2. \quad (194)$$

puis

$$h = e \sin \varepsilon. \quad (195)$$

De proche en proche il est ainsi possible de fixer le chemin parcouru e (sur la piste pour atteindre une hauteur h de sécurité de l'ordre de 50 m, et une vitesse c correspondante).

Non seulement dans ces calculs il faudrait réduire la puissance disponible avec la hauteur atteinte, mais faire varier dans les calculs la valeur de δ avec cette hauteur.

A la valeur de e ainsi calculée doit évidemment s'ajouter la valeur E parcourue par l'avion en roulant sur la piste pour atteindre la valeur $c = 50,5$; nous indiquerons plus loin un calcul approché de cette valeur de E .

Nous voulons souligner, avant de passer à ce paragraphe, pourquoi les valeurs calculées de e et de h , en partant du diagramme figure 39 nous

paraissent trop faibles par rapport aux valeurs réalisées par le constructeur.

Cela tient à ce que le fonctionnement de l'hélice pour les petites valeurs de x n'est plus aussi parfaitement conforme à l'image que nous nous en sommes faite, lorsque pour résoudre le problème, nous avons regardé la pale comme une aile en rotation.

Nous avons déjà signalé une correction que nous avons dû apporter aux valeurs de α_1 , pour tenir compte de ce que la formule en $\sin \alpha$ doit être remplacée par la formule en $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$

lorsque les angles α de déviation atteignent et dépassent 20° . En vérité nous n'avons pas poussé les calculs jusqu'aux valeurs corrigées de β_1 : première source d'erreur.

Ce qui est plus grave c'est que, dans les faibles valeurs de x , la vitesse d'approche de l'air balayé par l'hélice n'est plus nulle, mais prend une valeur appréciable c_0 , ce qui fait qu'une distinction est à introduire à partir de ce moment entre x_r et x

$$x_r = \frac{c - c_0}{\omega R_1} \quad (196)$$

$$x = \frac{c}{\omega R_1}.$$

Si nous disposions d'une documentation assez abondante sur les essais d'hélices en translation, il ne nous serait pas difficile d'établir par la voie expérimentale, la correction à apporter aux diagrammes des figures 36 et 39, en déplaçant les points des courbes η , α_1 et β_1 d'une quantité $x - x_r$, cette différence se rapprochant rapidement de zéro, lorsque x tend vers x_m , valeur de x qui correspond au rendement maximum de l'hélice envisagée. L'absence d'une telle correction ne conduirait pas encore à des différences très appréciables, si les courbes de $\frac{\alpha_1}{x^2}$ ne devaient être remplacées par les courbes de $\frac{\alpha_1}{(x_r)^2}$, ce qui doit conduire à des courbes beaucoup plus ascendantes, à partir de $x = 0,15$.

Disons clairement que, cette fois, nous ne pourrions trouver par le calcul les valeurs de $\sin \varepsilon$ et de φ qu'avec une approximation insuffisante, sans l'appui d'une analyse expérimentale bien faite, des hélices en translation.

Cette déclaration nous donne le droit, par contre, de souligner que c'est sans le secours d'aucun document expérimental que nous avons établi les calculs qui nous ont conduit :

- 1° A la vitesse d'atterrissage;
- 2° A la vitesse de croisière;
- 3° A la forme des pales et à leur nombre;
- 4° Au pas de l'hélice pour le vol de croisière;

5° Au diamètre de l'hélice, et à sa vitesse de rotation;

6° A la puissance utile et à la puissance effective, pour le vol de croisière.

§ 7. EXAMEN DE LA PÉRIODE DE DÉCOLLAGE

Le problème initial est de communiquer à cette masse $M = \frac{46\,000}{9,81}$ de l'avion, une vitesse de 50,5 qui correspond à la vitesse de décollage sous 20° d'angle.

Supposons que l'on adopte la valeur du pas $m = 0,3$. Pour $x = 0$, la valeur de β_1 mesurée au diagramme atteindra 0,0176; cette valeur d'après ce que nous venons de dire est trop élevée, mais acceptons-la comme telle; ωR_1 ne pourra atteindre 280 m mais seulement 250 m et la valeur de P_1 vaudra, α_1 étant égal à 0,091,

$$P_1 = 12 \times 1,06 \times 0,125 (250)^2 \times 1,60^2 \times 0,62 \times 0,091 \quad (197)$$

Le pas m étant maintenu égal à 0,3, la valeur de x allant grandissant, la vitesse de rotation se rapprochera de 2800 t/m et ωR_1 de 280 m.sec; à cette vitesse [formule (185)]

$$\beta_1 = 0,0128 \quad (198)$$

et x atteindra la valeur 0,14, d'après le diagramme de la figure 39.

Pour 0,14

$$\alpha_1 = 0,0450$$

(voir diagramme fig. 36) et partant

$$P_1 = 8\,750 \text{ kg.} \quad (199)$$

La vitesse c atteindra à ce moment

$$c = 0,14 \times 280 = 39,4. \quad (200)$$

Portons en ordonnées les valeurs de T_t et en abscisses les valeurs de c , nous tracerons une droite que nous prolongerons jusqu'à la vitesse $c = 50,5$, vitesse de décollage (fig. 40); nous ne nous écartons pas beaucoup de la réalité parce que si ωR_1 est constant, P_1 varie comme α_1 c'est-à-dire pratiquement suivant une loi linéaire en fonction de c , c étant proportionnelle à x pour ωR_1 constant.

De ces ordonnées, il conviendrait de déduire la valeur de la force due aux résistances passives; nous avons pu évaluer celles-ci à 800 kg pour la vitesse de 39,4 m.sec.

La courbe de la force motrice sera donnée avec une approximation que nous croyons suffisante, étant donné que nous n'extrapolons que jusqu'à l'abscisse 50,5, par une droite passant par les points 14 700 et 8 750 — 800 = 7 950.

Désignons par P_1 l'ordonnée au départ, par c_m la vitesse correspondant à l'intersection de la

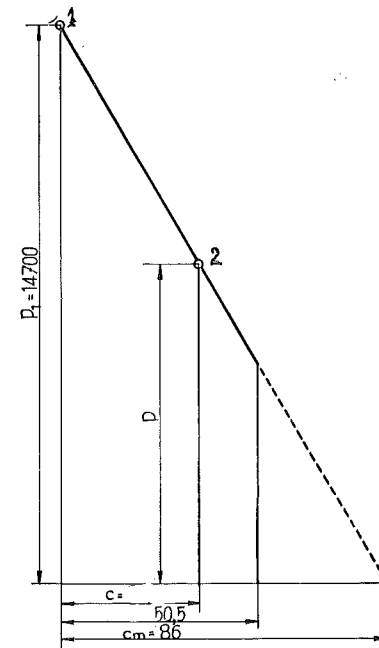


FIG. 40.

droite prolongée jusqu'à l'axe des abscisses.

Nous pourrions écrire

$$\frac{P}{P_1} = \frac{c_m - c}{c_m}. \quad (201)$$

D'où

$$P = P_1 \frac{1}{c_m} (c_m - c) = M \frac{dc}{dt} \quad (202)$$

M étant la masse de l'avion.

En intégrant de 0 à t , il viendra

$$\int_0^t dt = \frac{M}{P_1} c_m \int_0^c \frac{dc}{c_m - c} \quad (203)$$

soit

$$t = \frac{M}{P_1} c_m [-\ln(c_m - c)]_0^c = \frac{M}{P_1} c_m [\ln c_m - \ln(c_m - c)] \quad (204)$$

soit

$$t = \frac{M}{P_1} c_m \ln \frac{c_m}{c_m - c}. \quad (205)$$

La distance parcourue E , pour atteindre la vitesse $c = 50,5$, sera donnée par la relation

$$E = \int_0^t c dt. \quad (206)$$

Avec les données de la figure 40, $c_m = 86$, $P_1 = 14\,700$

$$M = \frac{46\,000}{9,81} = 4\,700$$

$$t = \frac{4\,700}{14\,700} \times 86 \times 2,30 \log \frac{86}{86 - c}$$

$$= 64,0 \log \frac{86}{35,5} = 64,0 \times 0,3838 = 24,9. \quad (207)$$

En traçant (fig. 41) la courbe c en fonction de t , nous avons obtenu

$$E = 770. \quad (208)$$

A cette distance E il faut ajouter, si on peut admettre un angle de pente de 4° , une distance

$$e = \frac{h}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{50}{0,070} = 710 \text{ m}$$

soit au total

$$E + e = 770 + 710 = 1480 \quad (209)$$

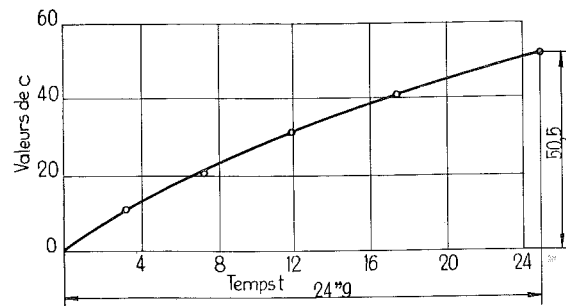


FIG. 41.

lorsqu'on veut atteindre 50 m d'élévation à la sortie de la piste de 1,500 km.

Il faut se rendre compte que, à la résistance



FIG. 42.

T_i normale de l'appareil, il a fallu ajouter une force de

$$Q \left(\sin \varepsilon + \frac{c}{g} \right) = 46\,000 \times (0,0697 + 0,010) = 3\,670 \quad (210)$$

bien que l'accélération ait été limitée à $9,81 \times 0,01 = 0,0981$.

Si cette accélération est maintenue constante, le temps écoulé avant d'avoir atteint la vitesse de régime 113 m.sec serait de

$$50,5 + 0,0981 \times t = 113 \quad (211)$$

soit

$$t = \frac{113 - 50,5}{0,0981} = 637''.$$

Pour atteindre la hauteur 5 000 m il faudrait une distance parcourue de

$$\text{distance} = \frac{5\,000}{0,07} = 71,5 \text{ km} \quad (212)$$

avec l'angle de pente adopté de 4° .

Nous voulons souligner que si nous étions parti de diagrammes corrigés dans la région des petites valeurs de x , les chiffres que nous venons de citer, auraient été un peu plus faibles et parlant plus favorables, bien qu'ils doivent être considérés comme donnant une idée assez fidèle de leur ordre de grandeur.

CINQUIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

DÉVELOPPEMENT DES CALCULS CONDUISANT AUX VALEURS EXPLICITES DE α_1 ET β_1 DE LA THÉORIE DES HÉLICES

Pour rendre explicites les valeurs de α_1 et β_1 , il faut appliquer les relations :

$$\sin(\alpha - \beta_0) \cos \beta_0 = \sin \alpha \cos^2 \beta_0 - \cos \alpha \sin \beta_0 \cos \beta_0 \quad (213)$$

$$\sin(\alpha - \beta_0) \sin \beta_0 = \sin \alpha \sin \beta_0 \cos \beta_0 - \cos \alpha \sin^2 \beta_0 \quad (214)$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta_0}{2} = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta_0) \text{ par approximation} \quad (215)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos(\alpha - \beta_0)) = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha \cos \beta_0 - \sin \alpha \sin \beta_0) \quad (216)$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{P}{2\pi R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{2\pi R}\right)^2}} \quad (217)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{2\pi R}\right)^2}} \quad (218)$$

$$\sin \beta_0 = \frac{\frac{c}{\omega R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}} \quad (219)$$

$$\cos \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}} \quad (220)$$

Toutes réductions faites, les deux formules (117) et (118) conduiront à

$$P_1 = nkF(z) \frac{\delta}{g} \omega^2 \left\{ \left(\frac{P}{2\pi R} - \frac{c}{\omega} + k_3 \frac{c}{\omega} \right) \times \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR - (2k_1 + k_3) \frac{c}{\omega} \times \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR + k_2 \left[\frac{P}{2\pi} \frac{c}{\omega} - \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right] \times \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR + k_3 \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \left(\frac{P}{2\pi} \right) \times \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR \right\} \quad (223)$$

$$\mathcal{C}' = nkF(z) \frac{\delta}{g} \omega^2 \left\{ \frac{c}{\omega} \left[\left(\frac{P}{2\pi} - \frac{c}{\omega} \right) - k_3 \frac{c}{\omega} \frac{P}{2\pi} \right] \times \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR + (2k_1 + k_3) \times \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR - k_2 \left(\frac{P}{2\pi} - \frac{c}{\omega} \right) \times \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR - k_3 \times \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \right\} \quad (224)$$

§ 1. RÉOLUTION DES INTÉGRALES

Résolvons séparément les intégrales ci-dessus :

$$\text{I.} \quad \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR;$$

$$\text{II.} \quad \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR;$$

$$\text{III.} \quad \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR;$$

$$\text{IV.} \quad \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR;$$

$$\text{V.} \quad \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR;$$

$$\text{VI.} \quad \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR;$$

$$\text{VII.} \quad \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR.$$

Pour simplifier les transcriptions, écrivons :

$$R_0 = nR_1, \quad (225)$$

$$\frac{P}{2\pi R_1} = m, \quad (226)$$

$$\frac{c}{\omega R_1} = x. \quad (227)$$

Intégrale I

En posant

$$R^2 + \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 = t^2,$$

nous aurons :

$$RdR = tdt, \\ \int \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} RdR = \int t^{-1} \times tdt = t.$$

D'où

$$\int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} RdR \\ = R_1 [(1+m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Intégrale II

$$\int \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR \\ = \int \left[1 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} RdR.$$

Posons

$$1 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} = t^2;$$

il viendra

$$dR = - \frac{R^3}{\left(\frac{p}{2\pi} \right)^2} tdt$$

et

$$R^2 = \frac{\left(\frac{p}{2\pi} \right)^2}{t^2 - 1}.$$

Par conséquent

$$\int \left[1 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} RdR \\ = - \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} \\ = \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \int \frac{(t^2-1-t^2) dt}{(t^2-1)^2} \\ = \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \left[\int \frac{dt}{t^2-1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2} \right].$$

Or

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2} l \frac{t-1}{t+1} \\ \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2} = \int t \frac{tdt}{(t^2-1)^2} \\ = - \frac{t}{2} (t^2-1)^{-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2-1}$$

(pour cette dernière, en intégrant par partie, et en écrivant $u=t$)

$$dv = \frac{tdt}{(t^2-1)^2}$$

Donc

$$\int \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR \\ = \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{4} l \frac{t-1}{t+1} + \frac{t}{2} (t^2-1)^{-1} \right]$$

et comme

$$\left[\frac{t-1}{t+1} \right]_1 = \frac{(1+m^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}} + 1}, \\ \left[\frac{t-1}{t+1} \right]_0 = \frac{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} - n}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} + n} \\ \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \frac{t}{2} (t^2-1)^{-1} = \frac{t}{2} R^2$$

il viendra finalement

$$\int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR = \frac{1}{2} R_1^2 f_1(m)$$

où

$$f_1(m) = \frac{m^2}{2} l \frac{[(1+m^2)^{\frac{1}{2}} - 1][(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} + n]}{[(1+m^2)^{\frac{1}{2}} + 1][(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} - n]} \\ + (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - n^2 (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Intégrale III

En posant

$$R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 = t^2,$$

nous aurons :

$$RdR = tdt, \\ \int \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR = \frac{1}{3} t^3 - \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 t.$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR = R_1^3 f_2(m) \\ f_2(m) = \frac{1}{3} [(1+m^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{3}{2}}] \\ - m^2 [(1+m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Intégrale IV

$$\int \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR \\ = \int \left[1 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR.$$

Posons

$$1 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} = t^2;$$

il viendra

$$dR = - \frac{R^3}{\left(\frac{p}{2\pi} \right)^2} tdt, \quad R^2 = \frac{\left(\frac{p}{2\pi} \right)^2}{t^2 - 1}, \\ \int \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = - \left(\frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{tdt}{(t^2-1)^3} \\ = \left(\frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} - \left(\frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^3}.$$

Or

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^3} = \frac{1}{2} \int t \frac{2tdt}{(t^2-1)^3} \\ = - \frac{t}{4} (t^2-1)^{-2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t^2-1)^2}$$

en intégrant par partie, et en écrivant

$$u = t \quad dv = \frac{2tdt}{(t^2-1)^3}.$$

Donc

$$\int \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR \\ = \left(\frac{p}{2\pi} \right)^4 \left[\frac{3}{4} \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} + \frac{t}{4} (t^2-1)^{-2} \right]$$

et comme nous avons trouvé, page 44, Intégrale II, que

$$- \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 \frac{dt}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{2} R_1^2 f_1(m) \\ \int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = \frac{3}{8} R_1^4 (-m^2 f_1(m) \\ + \frac{2}{3} [(1+m^2)^{\frac{1}{2}} - n^2 (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}]).$$

Intégrale V

En posant

$$R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 = t^2$$

$$\int \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \\ = \frac{t^5}{5} - 2 \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \frac{t^3}{3} + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^4 t$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR = R_1^5 f_3(m)$$

où $f_3(m)$ a pour valeur :

$$f_3(m) = \frac{1}{5} [(1+m^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{5}{2}}] \\ - \frac{2}{3} m^2 [(1+m^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{3}{2}}] \\ + m^4 [(1+m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Intégrale VI

Cette intégrale se résout directement, car elle est de la forme $\int x^m dx$

$$\int \left[R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} RdR = \frac{1}{3} \left[R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} RdR \\ = \frac{R_1^3}{3} [(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+x^2)^{\frac{3}{2}}].$$

Intégrale VII

En posant

$$R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 = t^2$$

il viendra

$$\int \left[R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR \\ = \int t \left[t^2 - \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} tdt = \frac{t^5}{5} - \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \frac{t^3}{3}.$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \left[R^2 + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR \\ = R_1^5 \left[\frac{1}{5} [(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2+x^2)^{\frac{5}{2}}] \right. \\ \left. - \frac{x^2}{3} [(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+x^2)^{\frac{3}{2}}] \right].$$

§ 2. CALCUL DES VALEURS DE α_1 ET β_1

Tous calculs faits, les valeurs explicites de α_1 et β_1 sont les suivantes :

$$\alpha_1 = m f_2(m) + (k_3 - 1) f_2(m) \\ + \frac{1}{2} k_2 m f_1(m) x - \left(\frac{1}{2} k_2 f_1(m) - k_3 m b \right) x^2 \\ - (2k_1 + k_3) \frac{x}{3} c_x \quad (228)$$

$$\beta_1 = -k_3 f_3(m) - \frac{3}{8} k_2 m \left(\frac{2}{3} a - m^2 f_1(m) \right) \\ - \left[(k_3 - 1) m f_2(m) - \frac{3}{8} k_2 \left(\frac{2}{3} a - m^2 f_1(m) \right) \right] x \\ - f_2(m) x^2 + (2k_1 + k_3) \left(\frac{1}{5} d_x - \frac{x^2}{3} c_x \right) \quad (229)$$

les lettres a, b, c, d, c_x et d_x ayant pour valeur :

$$a = (1+m^2)^{\frac{1}{2}} \quad a_1 = (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \\ b = (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} = a - a_1 \\ c = (1+m^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{3}{2}} \\ d = (1+m^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{5}{2}} \\ c_x = (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \\ d_x = (1+x^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2+x^2)^{\frac{5}{2}}.$$

D'autre part les fonctions $f_1(m), f_2(m)$ et $f_3(m)$ peuvent se calculer comme suit :

$$f_1(m) = \frac{m^2}{2} l \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a_1+n}{a_1-n} + (a - n^2 a_1) \quad (230)$$

$$f_2(m) = \frac{1}{3} c - m^2 b \quad (231)$$

$$f_3(m) = \frac{1}{5} d - \frac{2}{3} m^2 c + m^4 b \quad (232)$$

Remarque. — Pour le fonctionnement au point fixe, les valeurs de α_1 ainsi calculées s'écartent d'autant plus des valeurs réelles, que le pas p est plus grand. Cela résulte de ce que nous avons adopté pour calculer P , la relation

$$c_2 = k' \sin \alpha \quad \text{au lieu de} \quad c_2 = \frac{1}{2} k' \sin 2\alpha.$$

Nous avons donc repris le calcul de la valeur de α_1 pour $x=0$, en utilisant cette dernière relation et nous avons obtenu

$$\alpha_1' = m f_4(m) \quad (233)$$

avec

$$f_4(m) = \frac{1}{3} (1 - n^3) - m^2 (1 - n) + m^3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{m(1-n)}{m^2 + n}. \quad (234)$$

Pour faciliter les calculs, nous avons dressé le tableau I suivant, donnant en fonction de m ou de x , les valeurs numériques trouvées en appliquant les relations ci-dessus.

On trouve ainsi

$$\alpha_1 = m f_2(m) + m b x^2 - \frac{1}{3} x c_x \quad (235) \\ = \frac{1}{3} (m c - x c_x) + m b (x^2 - m^2).$$

Dérivons la fonction α_1 de façon à obtenir la tangente à la courbe, au point d'abscisse x :

$$\frac{d\alpha_1}{dx} = -(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} (1+x^2) + x^2 \right) + (n^2+x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} (n^2+x^2) + x^2 \right) + 2 b m x. \quad (236)$$

Si nous faisons dans cette relation $x=m$, $n=0$, nous obtiendrons pour

$$m=0,2 \quad -\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right)_m = 0,317 \\ m=0,3 \quad = 0,304 \\ m=0,322 \quad = 0,300 \\ m=0,367 \quad = 0,295 \\ m=0,4 \quad = 0,287.$$

TABLEAU I

x ou m	x^2 ou m^2	$m b$	$f_1(m)$	$f_2(m)$	$m f_2(m)$	$f_3(m)$	$f_4(m)$	$m f_4(m)$	$\frac{2}{3} a - n^2 f_1(m)$	$\frac{1}{3} x c_x$	$\frac{1}{5} d_x - \frac{x^2}{3} c_x$
0,000	0,000000	0,000000	1,000	0,333330	0,000000	0,200000	0,3333	0,000000	0,6666	0,000000	0,200000
0,050	0,002500	0,047562	0,992	0,332160	0,016608	0,199560	0,3310	0,016550	0,6650	0,016727	0,200390
0,075	0,005625	0,069585	0,985	0,330770	0,024807	0,199060	0,3283	0,024620	0,6630	0,025199	0,200920
0,100	0,010000	0,090500	0,982	0,328960	0,032896	0,198370	0,3248	0,032480	0,6602	0,033801	0,201656
0,125	0,015625	0,110260	0,963	0,327080	0,040885	0,197450	0,3204	0,040050	0,6563	0,042607	0,202560
0,150	0,022500	0,129180	0,953	0,324140	0,048621	0,196440	0,3157	0,047355	0,6525	0,051528	0,203700
0,175	0,030625	0,147035	0,940	0,311240	0,056213	0,195190	0,3103	0,054302	0,6481	0,060719	0,205030
0,200	0,040000	0,163960	0,928	0,318060	0,063612	0,193784	0,3043	0,060860	0,6428	0,070170	0,206506
0,225	0,050625	0,180000	0,914	0,314670	0,070800	0,192260	0,2981	0,067032	0,6368	0,079913	0,208190
0,250	0,062500	0,195200	0,900	0,311060	0,077765	0,190620	0,2913	0,072825	0,6309	0,089965	0,210060
0,275	0,075625	0,209570	0,887	0,307290	0,084504	0,188850	0,2848	0,078320	0,6244	0,100353	0,212080
0,300	0,090000	0,223200	0,871	0,303370	0,091011	0,186960	0,2779	0,083370	0,6176	0,111099	0,214260
0,325	0,105625	0,236110	0,857	0,299340	0,097285	0,185000	0,2707	0,087970	0,6106	0,122222	0,216620
0,350	0,122500	0,248320	0,842	0,295220	0,103327	0,182960	0,2640	0,092400	0,6031	0,133745	0,219130
0,375	0,140625	0,259870	0,827	0,291030	0,109136	0,180830	0,2570	0,096375	0,5957	0,145680	0,221780
0,400	0,160000	0,270800	0,814	0,286800	0,114720	0,178690	0,2490	0,099600	0,5880	0,158048	0,224580
0,450	0,202500	0,290970	0,785	0,278240	0,125208	0,174230	0,2355	0,105970	0,5725	0,184126	0,230580
0,500	0,250000	0,309000	0,758	0,269680	0,134840	0,169670	0,2221	0,111050	0,5555	0,212090	0,237100
0,550	0,3025	0,325210	0,731	0,261180	0,143649	0,165050	0,2084	0,114620	0,5401	0,242022	0,244060
0,600	0,3600	0,339720	0,705	0,253840	0,152304	0,160410	0,1964	0,117840	0,5237	0,274002	0,251430
0,700	0,4900	0,364400	0,656	0,236780	0,164746	0,151320	0,1732	0,121240	0,4924	0,344344	0,267340
0,800	0,6400	0,384000	0,609	0,222140	0,177712	0,142400	0,1525	0,122000	0,4641	0,423472	0,284560
0,900	0,8100	0,400800	0,552	0,207930	0,187137	0,134340	0,1342	0,120780	0,4498	0,511830	0,302760
1,000	1,0000	0,414200	0,533	0,195270	0,195270	0,126520	0,1193	0,119300	0,4098	0,609470	0,321790

§ 3. CALCUL DE LA VALEUR DE α_1 ET DE SA DÉRIVÉE POUR LE CAS LIMITE DES PALES SANS FROTTEMENT

Lorsqu'on peut faire abstraction des pertes provoquées par le frottement et par la déviation due à l'épaisseur du profil, la valeur de α_1 se simplifie puisque cette hypothèse implique

$$k_3 = 1, \quad k_2 = 0, \quad k_1 = 0.$$

alors que pour $x=0$, $n=0$

$$-\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right)_0 = 0,333 \quad (237)$$

unique pour toutes les valeurs de m .

On peut se rendre compte que le coefficient angulaire de la tangente à la courbe varie peu ; ainsi pour $m=0,3$

$$-\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right) = 0,333 \quad \text{pour } x=0,0 \\ = 0,302 \quad \text{pour } x=0,1 \\ = 0,2949 \quad \text{pour } x=0,2 \\ = 0,3042 \quad \text{pour } x=0,3.$$

On remarquera que si on prolongeait la tangente au point $x=m=0,3$ jusqu'à l'axe des ordonnées, on trouverait

$$y = 0,3042 m \left(1 - \frac{x}{m}\right) \quad (238)$$

soit $y=0,0912$.

pour $x=0$, au lieu de

$$(\alpha_1)_0 = m f_2(m) = 0,0910 \quad (239)$$

(voir tableau I).

Pratiquement on peut donc remplacer la courbe donnant α_1 en fonction de x par une droite dont l'équation (238) est écrite ci-dessus.

Lorsqu'on consulte le diagramme des valeurs de α_1 données par la figure 36 pour différentes valeurs de m , alors que l'on a tenu compte des frottements, on voit que l'équation est encore pratiquement applicable.

CHAPITRE II

THÉORIE DU VENTILATEUR HÉLICOÏDE

§ 1. COMMENT SE POSE LE PROBLÈME ?

D'instinct peut-on dire, l'ingénieur voit une parenté entre le ventilateur hélicoïde et l'hélice aérienne.

S'il s'agit de l'hélice au point fixe, employée comme ventilateur, il y a identité, et le problème se ramène à la recherche de la valeur de m qui conduit au plus grand débit pour la plus petite puissance absorbée.

Nous avons traité en 1912 un problème voisin, en recherchant l'hélice d'efficacité maximum E . En ce temps où l'on se bornait à faire des essais d'hélices au point fixe, on se préoccupait d'établir expérimentalement le rapport

$$E = \frac{P}{\mathcal{E}'} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (240)$$

pour différentes valeurs de m .

Il n'y avait, il est vrai, aucun rapport entre la valeur de m qui conduisait à l'efficacité maximum et celle qui correspondait au rendement maximum pour l'hélice en translation.

En traitant théoriquement ce problème, nous avons trouvé que la valeur de m la plus favorable était comprise entre

$$0,10 \quad \text{et} \quad 0,15.$$

Sans y avoir réfléchi plus profondément, nous croyons que cette conclusion vaut pour l'hélice utilisée comme ventilateur non enveloppé.

Pour l'hélice non enveloppée, le rendement en tant que ventilateur, est nécessairement nul : le ventilateur est une machine destinée à créer une différence de pression entre la sortie et l'entrée de son enveloppe; sans la présence de celle-ci, cette différence est nécessairement nulle, et avec elle, le rendement reste constamment égal à zéro.

Lorsqu'il s'agit du ventilateur hélicoïde enve-

loppé à grand nombre de pales, l'équation de continuité doit s'écrire (car le fluide peut être regardé comme pratiquement incompressible avec les différences habituelles de pression)

$$w_1 \sin \beta_1 = w_0 \sin \beta_0 \quad (241)$$

alors que pour l'hélice à faible nombre de pales, cette équation de continuité s'exprime comme dans la théorie de l'aile ou de l'hélice, par

$$w_1 = w_0. \quad (242)$$

§ 2. THÉORIE DU VENTILATEUR À FAIBLE NOMBRE D'AUBES

Lorsque le nombre d'aubes est très faible, il ne saurait être question d'un ralentissement du fluide dans l'aubage : il suffit de se représenter la succession des pales dans le développement circulaire du rotor, tel qu'il se présente normalement avec trois pales (fig. 34), pour comprendre que le ralentissement du fluide dans le canal formé par deux aubes voisines (si on peut l'appeler ainsi) est impossible.

Dans la réalité on peut dire que tout se passe comme si la relation (242) ci-dessus restait applicable, et dès lors la théorie de l'hélice conduit directement à la théorie du ventilateur.

Dans la mise en équation du problème de l'hélice, en effet, nous avons eu soin de montrer que l'on arrivait au même tracé (fig. 30) des triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie, que l'on envisage la vitesse c comme étant la vitesse de déplacement axial de l'hélice dans le fluide au repos, ou comme étant la vitesse de déplacement du fluide, devant l'hélice supposée fixe.

Comme nous aurons à utiliser des documents expérimentaux généralement présentés sous la

forme de deux coefficients expérimentaux variables avec le rapport

$$x = \frac{c}{\omega R_1}, \quad (243)$$

force nous est de les définir :

M coefficient manométrique,
P coefficient de puissance.

Si nous désignons par H' la hauteur de dénivellation en mètres du fluide débité, entre l'entrée et la sortie du ventilateur, H' kgm représentera l'énergie utile fournie par kg de fluide débité.

Pour être exact, ce fluide étant pris à l'entrée à une vitesse nulle et étant abandonné à la sortie à une vitesse c_s , H' doit s'écrire :

$$H' = v(p_2 - p_0) + \frac{1}{2g} c_s^2. \quad (244)$$

Si nous désignons par T_i le travail absorbé par kg de fluide débité par seconde, le rendement du ventilateur (en négligeant les pertes externes : fuites latérales, frottement dans le diffuseur) sera représenté par

$$\eta_i = \frac{H'}{T_i} = \frac{1}{2} \frac{2gH'}{u_1^2} = \frac{1}{2} \frac{M}{P} \quad (245)$$

M et P ayant pour valeur

$$M = \frac{2gH'}{u_1^2} \quad P = \frac{gT_i}{u_1^2}. \quad (245bis)$$

Voyons comment il est possible de déterminer P en partant de la relation (127) qui donne

\mathcal{C}' le travail par seconde pour l'hélice.

T_i désignant le travail par kg de fluide débité par seconde, on peut écrire :

$$T_i = \frac{\mathcal{C}'}{\delta Q}. \quad (246)$$

Si nous observons que

$$\delta(\pi R_1^2) \times c = \delta Q \quad (247)$$

nous voyons que

$$P = \frac{gT_i}{u_1^2} = \frac{g \delta(\pi R_1^2) \times c}{(\omega R_1)^2} = n \frac{k}{\pi} F(z) \frac{\beta_1}{x}. \quad (248)$$

Le rendement du ventilateur quand on fait abstraction des pertes externes, est donné par la relation

$$\eta = \frac{\alpha_1 x}{\beta_1}. \quad (249)$$

si bien que $\frac{\beta_1}{x}$ peut être remplacé dans la relation ci-dessus par α_1 , puisque en l'absence de frottement appréciable dans la roue à faible nombre de pales, $\eta = 1$ (1).

Dès lors, en tenant compte de la relation approchée (238)

$$P = n \frac{k}{\pi} F(z) \times 0,300 m \left(1 - \frac{x}{m}\right) \quad (250)$$

le coefficient numérique 0,300 correspondant à $m = 0,322$, pas relatif de l'aubage du ventilateur dont nous étudierons les résultats expérimentaux au paragraphe suivant (alors que 0,3042 correspondait à $m = 0,3$).

D'après ce que nous avons vu au chapitre précédent, consacré à l'hélice,

$$k = k' k_m'' = k' \frac{k_m''}{k_1''} \times k_1'' \quad (251)$$

en désignant par k_m'' la valeur moyenne résultant de l'intégration suivante :

$$k_m'' = 4 \int_0^1 y^3 k'' dy \quad (252)$$

k'' désignant le rapport

$$k'' = \frac{a}{R} \quad (253)$$

dans la section définie par $y = \frac{R}{R_1}$.

Nous n'avons pas fait porter l'intégration sur k' qui dans le cas de l'hélice tombe à la valeur zéro, pour $\gamma = 1$, parce que la présence de l'enveloppe empêche l'écoulement latéral et fait que

$$k' = \frac{e}{a} = \pi.$$

En observant que

$$k_1'' = \frac{a_1}{R_1} = \frac{2\pi}{n} \frac{a_1}{2\pi R_1} = \frac{2\pi}{n} \frac{a_1}{t} \quad (254)$$

t étant le pas de l'aubage, on voit que l'on peut écrire

$$P = \Psi \left(1 - \frac{x}{m}\right) \quad (255)$$

avec

$$\Psi = 2 \times 0,300 k' F(z) \frac{k_m''}{k_1''} \left(-\frac{\operatorname{tg} \beta_1'}{\sin \beta_1'}\right) \times \frac{a}{t} \sin \beta_1' \quad (256)$$

(1) On pourrait faire remarquer que dans la réalité le rendement du ventilateur hélicoïde est loin d'avoir un rendement voisin de l'unité; cela provient de ce que H' dépend essentiellement des pertes dans le diffuseur. Si celles-ci étaient pratiquement négligeables, le rendement η serait très voisin de l'unité.

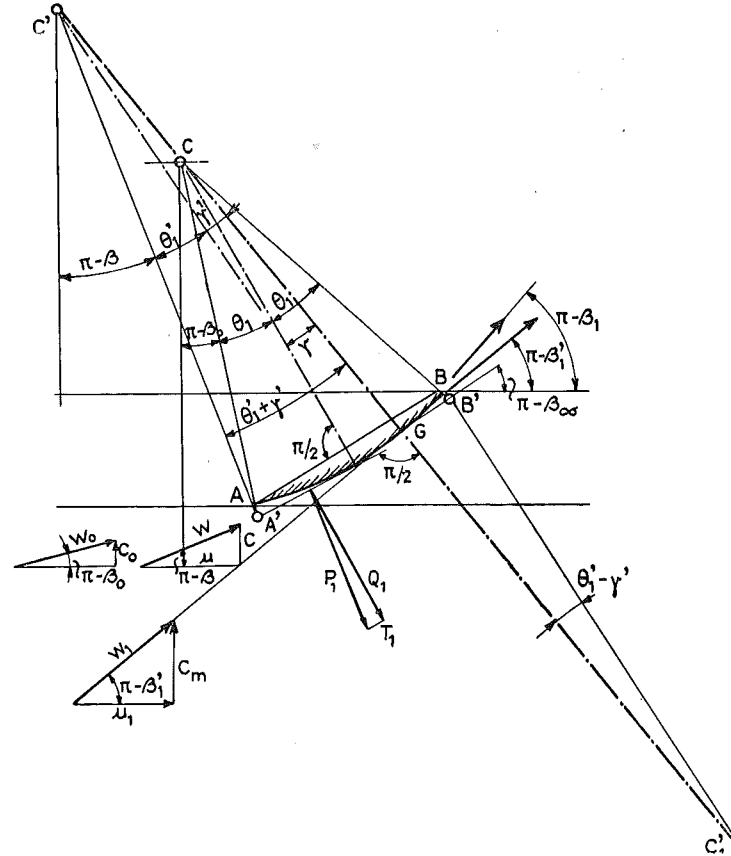


FIG. 43.

a étant mis pour a_1 , m remplacé par $-\operatorname{tg} \beta_1'$.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire que nous précisions la signification des angles et que nous justifions la relation

$$m = -\operatorname{tg} \beta_1'. \quad (257)$$

Nous avons utilisé à cette fin la figure 43 qui ramène le profil à sa colonne vertébrale et qui suppose une aube à simple courbure, alors que dans le dessin de la figure 44 qui représente le profil utilisé dans les essais que nous allons analyser, il s'agit d'un profil parabolique.

Nous avons montré sur le dessin de la figure 22 l'allure du phénomène schématisé qui nous avait conduit, dans l'étude des ailes, aux valeurs de

$$c_z \quad \text{et} \quad c_x.$$

Pour l'angle $(\pi - \beta_0)$ correspondant à l'angle d'entrée de l'aube, nous avons tracé le triangle des vitesses, la vitesse absolue c_0 étant perpendiculaire à l'ouïe du ventilateur.

Lorsque la vitesse axiale passe de c_0 à c , le triangle des vitesses donne un angle d'entrée $(\pi - \beta)$ plus grand et tout se passe comme si l'aube réelle AGB était remplacée par l'aube fictive A'GB' tracée de centre C' , et prolongée au-delà de G par un arc de centre C_1' donnant à l'angle de sortie la valeur effective $(\pi - \beta_s)$.

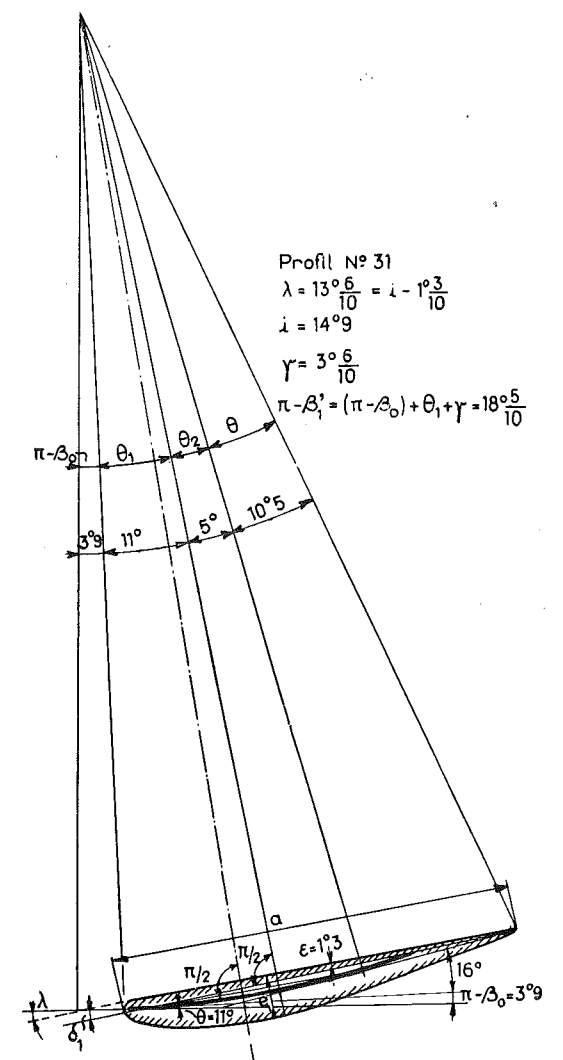


FIG. 44.

C'est ainsi du moins que les choses se passent quand il s'agit d'une aile isolée, et c'est sur cette base que nous avons établi les valeurs de

$$c_z \quad \text{et} \quad c_x, \quad F(z) \quad \text{et} \quad F(x)$$

pour l'aile, valeurs qui concordent de façon absolue avec les valeurs relevées au tunnel.

Au débit le plus grand que l'on puisse envisager (que l'on ne peut à vrai dire réaliser effectivement étant donné qu'à ce moment la déviation étant devenue nulle, la puissance transmise est nulle) correspond à la vitesse axiale c_m ; tout se passe comme si l'aube se confondait avec le plan perpendiculaire à la direction C/C_1' en G. L'angle de sortie qui est alors $(\pi - \beta_1')$ se confond avec l'angle α de l'hélice, ce qui peut s'écrire

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta_1' = \frac{P}{2\pi R_1} = m. \quad (258)$$

La figure 44 qui donne le profil de l'aube qui

a été utilisée dans les essais dont nous allons rendre compte, correspondant au profil n° 31 du catalogue de Rhode-Saint-Genèse, placé dans la position qu'il occupe à l'extrémité de l'aile, par rapport au plan horizontal lequel est perpendiculaire à l'axe de rotation du ventilateur.

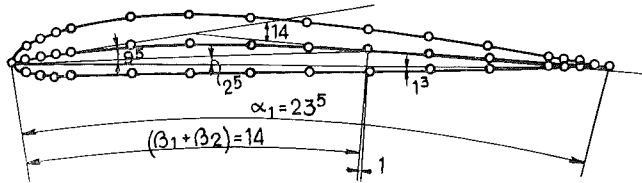


FIG. 45.

Tous les angles caractéristiques sont comptés à partir de ce plan. Nous reproduisons figure 45 le profil n° 30 du même catalogue, avec l'indication des angles correspondants, ce profil ayant été utilisé dans le ventilateur de « La Meuse » dont nous rendrons compte des essais par la suite.

TABLEAU II

Profil	$\theta_1 = \beta_1$	$\theta_2 = \beta_2$	θ	δ	ϵ	γ
N° 30	9°	4°	9°	-1,0	1°	3°
N° 31	11	5	10°	-1,0	1°	3°

Fig. 25 : δ angle de l'extrémité BE par rapport à BF

Pour l'aube utilisée n° 31, dans la position définie figure 44, par rapport au plan de l'ouïe

$$(\pi - \beta_1') = (\pi - \beta_0) + (\beta_1 + \gamma) = 18^\circ \quad (259)$$

$$(\pi - \beta_1) = (\pi - \beta_0) + (\beta_1 + \beta_2) - \delta = 18^\circ \quad (260)$$

Les dimensions de l'aube nous étant connues, nous avons pu donner le tableau III suivant pour le ventilateur Escher-Wyss.

TABLEAU III

γ	0,500	0,618	0,735	0,852	1,000
γ^3	0,125	0,247	0,376	0,620	1,000
a	0,077	0,069	0,063	0,058	0,053
R	0,150	0,185	0,220	0,255	0,300
k''	0,512	0,372	0,286	0,228	0,276
$\gamma^3 k''$	0,063	0,092	0,114	0,141	0,176

Si nous traçons le diagramme de $\gamma^3 k''$ en fonction de γ , nous trouvons que la courbe se ramène à une droite ayant pour ordonnées aux deux extrémités 0,063 et 0,176.

La surface vaut donc

$$\frac{0,063 + 0,176}{2} (1,00 - 0,50) = 0,0595 \quad (261)$$

soit pour k_m'' valeur de l'intégrale (252)

$$k_m'' = 0,0595 \times 4 = 0,2380 \quad (262)$$

La valeur de k_1'' étant égale à 0,176 (dernier chiffre de la dernière colonne)

$$\frac{k_m''}{k_1''} = \frac{0,238}{0,176} = 1,35 \quad (263)$$

Nous pouvons calculer ψ en fonction de $k''F(z)$ et de $\frac{a}{t} \sin \beta_1'$, en transportant ces valeurs numériques dans la relation (256)

$$\Psi = k'F(z) \times 2 \times 0,300 \times 1,35 \times 1,05 \frac{a}{t} \sin \beta_1'$$

a désignant la profondeur de l'aube à l'extrémité de l'aube, d'après la relation (254),

$$k'F(z) = \frac{\Psi}{0,850 \times \frac{a}{t} \sin \beta_1'} \quad (264)$$

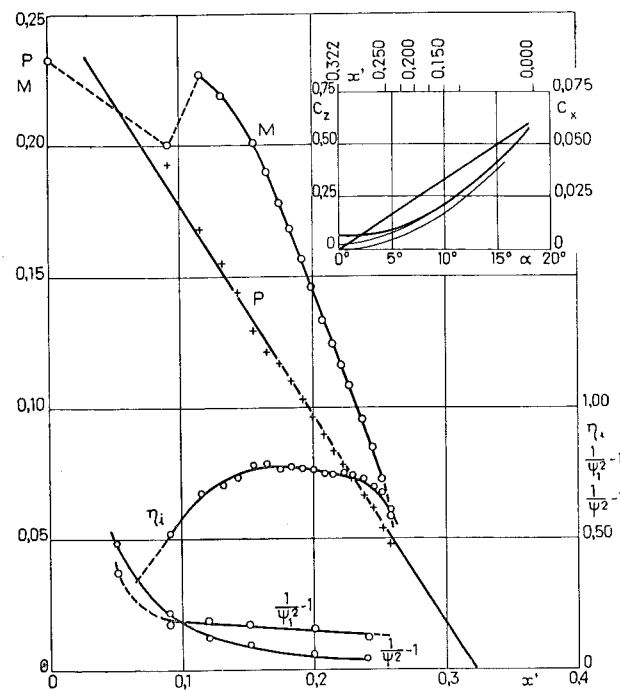


FIG. 46.

§ 3. VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA THÉORIE

Nous reproduisons figure 46, les résultats obtenus sur le ventilateur Escher-Wyss (1) à dix pales.

On voit que la loi de P en fonction de x est

(1) Voir ouvrage intitulé *Flow Fan*, par KELLER.

bien fournie par une droite dont le coefficient angulaire est Ψ [d'après l'équation (255)]

$$\Psi = P \text{ pour } x=0$$

soit

$$\Psi = 0,255.$$

La valeur expérimentale de m est fournie par l'abscisse x qui conduit à $P=0$; d'où

$$-\operatorname{tg}(\pi - \beta_1') = 0,322 \quad (265)$$

$$\pi - \beta_1' = 17^\circ \frac{85}{100} \quad (266)$$

Comme $\frac{a}{t}$ peut être calculé par la relation (254), k_1'' étant égal à 0,176 (dernier nombre de la dernière colonne du tableau III)

$$\frac{a}{t} = 0,176 \times \frac{n}{2\pi} = 0,281 \quad (267)$$

soit pour

$$\frac{a}{t} \sin \beta_1' = 0,281 \times 0,306 = 0,0857 \quad (268)$$

et pour $k'F(z)$ en vertu de la relation (264)

$$k'F(z) = \frac{0,255}{0,850 \times 0,0857} = 3,50 \quad (269)$$

soit pour $F(z)$, puisque k' est égal à π ,

$$F(z) = \frac{3,50}{3,14} = 1,115 \quad (270)$$

Nous avons exposé à propos de l'hélice, ce que devient $F(z)$ lorsqu'il s'agit non plus d'une aile isolée mais d'une succession d'ailes se suivant dans le même sillage; $(\beta_1 + \gamma)$ passe à $(\beta_1 + \beta_2)$ si bien que $F(z)$ passe pour une aile à une seule courbure de 0,75 à 1,00; le redressement des filets ne pouvant plus se produire, $F(z)$ passe ainsi de 1 à $\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \gamma}$. Pour l'hélice où nous avons employé des profils à une seule courbure

$$F(z) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \gamma} = \frac{1,00}{0,75} = 1,33 \quad (270)$$

Ici où il s'agit du profil parabolique n° 31

$$F(z) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \gamma} = \frac{16}{14 \frac{6}{10}} = 1,095 \quad (271)$$

Ainsi si nous rapprochons valeur calculée et valeur observée, nous trouvons une différence de 1 %.

Nous disposons, outre des essais dont nous venons de rendre compte, de ceux effectués en 1942 sur un ventilateur d'étude construit par la Société de Construction mécanique « Les Ateliers de La Meuse » à Sclessin-lez-Liège.

Il s'agissait d'une exécution au $\frac{1}{5}$ de ventilateurs destinés à résoudre un problème spécial, la ventilation d'un tunnel exigeant un débit Q de 280 m³ par sec par ventilateur et une dépression h de 30 mm d'eau seulement avec un nombre de tours N relativement élevé

$$N = 360 \text{ t/m.}$$

Ce ventilateur d'étude avait un diamètre de $2R_1 = 0,940 \text{ m}$

avec

$$n = \frac{R_0}{R_1} = 0,340.$$

Des essais ont été effectués avec quatre aubes puis avec trois aubes.

Les dimensions de la pale nous ont permis de dresser un tableau analogue au tableau III et de trouver ainsi le rapport

$$\frac{k_m''}{k_1''} = 1,49.$$

En utilisant la formule (269), on trouve pour le ventilateur à quatre pales :

$$k'F(z) = \frac{0,0845}{0,870 \times 0,0282} = \frac{0,0845}{0,0249} = 3,40$$

la valeur de Ψ ayant été trouvée égale à 0,0845, le facteur 0,870 ayant été calculé ci-avant (256)

$$2 \times 0,295 \times 1,49 \times 1,065 = 0,870$$

[0,295 au lieu de 0,300 qui convient pour $m = 0,367$ (formule 236)].

Ainsi $F(z)$ puisque $k' = \pi$

$$F(z) = \frac{3,40}{3,14} = 1,090 \quad (272)$$

La valeur calculée ressort avec le profil n° 30, à

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \gamma} = \frac{14}{12,7} = 1,105 \quad (273)$$

Si nous nous reportons au ventilateur à trois pales

$$k'F(z) = \frac{0,0665}{0,870 \times 0,0212} = \frac{0,0665}{0,0184} = 3,61 \quad (274)$$

Ψ ayant été trouvé égal à 0,0665, $\frac{a}{t} \sin \beta_1'$ étant égal à 0,0212, $(\pi - \beta_1')$ correspondant comme pour le ventilateur à quatre pales à $20^\circ \frac{15}{100}$.

D'où

$$F(z) = \frac{3,61}{3,14} = 1,150.$$

Si nous faisons la moyenne des valeurs obser-

vées 1,125, on voit que l'écart avec la valeur calculée 1,105 n'atteint pas $\pm 3\%$, ce qui est dans l'ordre des erreurs de mesure des angles sur le modèle de la pale et sur le tracé de la courbe expérimentale qui fixe $-\text{tg}(\pi - \beta_1')$.

Dans les essais que nous avons analysés dans le fascicule de 1954, nous avons trouvé pour une vingtaine de profils de tout tracé, une approximation entre valeurs calculées et valeurs observées $\pm 3\ 1/2\%$. Pour ce qui concerne l'angle de sortie $(\pi - \beta_1') = 20^\circ \frac{15}{100}$ nous voyons que l'écart avec l'angle calculé $(\pi - \beta_1')$ est de cet ordre.

angle calculé $(\pi - \beta_1') = 19^\circ \frac{20}{100}$ pour 4 pales

angle calculé $(\pi - \beta_1') = 19^\circ \frac{50}{100}$ pour 3 pales

Si on rapproche valeur mesurée sur le profil, et valeur calculée d'après le diagramme de P en fonction de x, on voit que la différence est de l'ordre de 3 1/2 % pour le ventilateur Escher-Wyss comme pour le ventilateur La Meuse.

Il ne faudrait pas s'attendre à des coïncidences dépassant cette approximation, étant donné en tout premier lieu, que le pas supposé constant dans le calcul, depuis R_0 jusqu'à R_1 , impliquerait

$$y \text{tg} \beta_1'$$

égale à une valeur constante, alors que le pas est défini par la face plane du profil, ce qui correspond à

$$y \text{tg} \lambda = c^{\text{te}}$$

(la notation λ est indiquée dans la figure 44).

Entre λ et β_1' la différence, pour le ventilateur La Meuse, est de

- au moyeu de $(\beta_1' - \lambda) = 9^\circ$
- à mi-hauteur de $(\beta_1' - \lambda) = 4^\circ$
- à l'extrémité de $(\beta_1' - \lambda) = 4^\circ$.

Il peut y avoir intérêt à prendre un pas plus grand près du moyeu, mais du point de vue de la vérification expérimentale de la théorie, il faudrait opérer avec des tracés d'aubes à pas réellement constant.

La mesure des angles devrait se faire au surplus sur la roue elle-même, avec la plus grande précision.

Nous croyons que le lecteur admettra que ces écarts de $\pm 3\ 1/2\%$ sont normaux, et qu'une telle vérification, opérée dans les conditions que nous venons de préciser, équivaut à une vérification parfaite.

Dans le mémoire de 1947⁽¹⁾, nous avons

⁽¹⁾ Voir *Hommage de la Faculté des Sciences appliquées à l'Association des Ingénieurs sortis de l'Ecole de Liège, à l'occasion de son centenaire*, Imprimeur Georges Thone, Liège.

établi, d'une manière élémentaire, la relation fondamentale suivante, pour un aubage de hauteur ΔR :

$$P = \Psi \left(1 - \frac{x}{\text{tg} \beta_1'} \right) \quad (275)$$

avec

$$\Psi = KF(z) \frac{a}{t} \sin \beta_1' \quad (276)$$

Nous avons montré aussi que, théoriquement lorsque Ψ atteint l'unité, cette relation se ramène à l'équation d'Euler

$$P = x \left(\frac{1}{\text{tg} \beta_1'} - \frac{1}{\text{tg} \beta} \right) \quad (277)$$

β étant l'angle d'entrée, de telle sorte que, compte tenu de la relation tirée du triangle des vitesses à l'entrée

$$\frac{x}{\text{tg} \beta} = \frac{c}{\omega R \text{tg} \beta} = -1 \quad (278)$$

D'où

$$P = \left(1 + \frac{x}{\text{tg} \beta_1'} \right) = \left(1 - \frac{x}{m} \right) \quad (279)$$

Portant en abscisse $\frac{a}{t} \sin \beta_1'$, nous avons trouvé le diagramme de la figure 47, où les points s'alignent d'une façon remarquable sur une droite passant par le point (marqué d'un triangle) du ventilateur Escher-Wyss.

Si nous nous reportons à l'origine de l'exposé sur l'hélice, nous devrions admettre que k' ne reste égal à π que pour autant qu'il n'y ait pas interférence des flux déviés par deux pales consécutives.

Celle-ci ne se produit à la périphérie que quand $\frac{a}{t}$ atteint une valeur de l'ordre de 0,100, limite très supérieure à celle réalisée dans les ventilateurs de La Meuse, mais qui est par contre largement dépassée dans le ventilateur Escher-Wyss.

Pratiquement tout se passe pourtant comme si

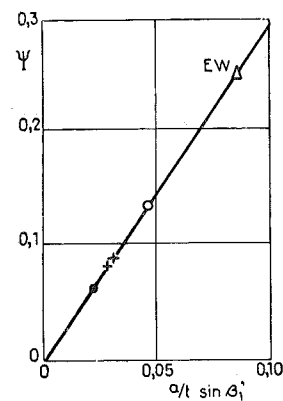


FIG. 47.

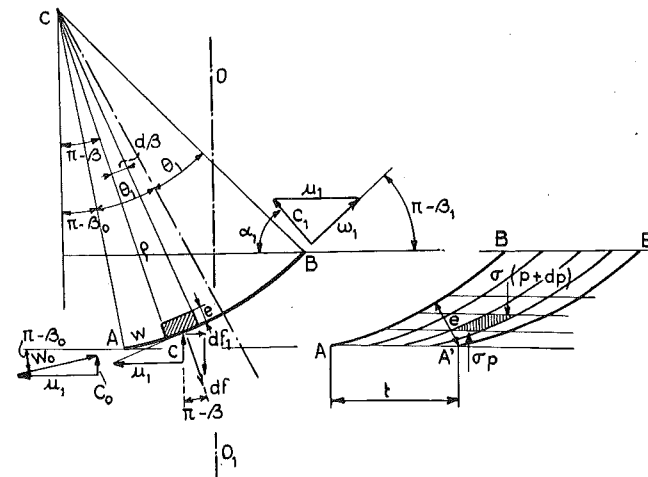


FIG. 48.

k' était constant jusqu'à la valeur $\frac{a}{t}$ de l'ordre de 0,300.

Si l'on était en droit de prendre

$$k' = \text{constante} = \pi$$

le ventilateur tracé avec $\text{tg} \beta_1' = 0,32$ réaliserait une valeur de $\Psi = 1$ pour $\frac{a}{t}$.

$$\frac{a}{t} = \frac{1}{\sin \beta_1' \times 0,870 \times \pi \times 1,10} = \frac{1}{0,96} = 1,04 \quad (280)$$

On se rapprocherait du tracé de la figure 48, exclusivement valable pour des aubes minces, tracées pour un $\frac{a}{t} = 1,60$.

A partir de ce rapport 1,04 la formule d'Euler (279) serait donc applicable.

S'il s'agit de fixer une limite, les déductions que nous venons de présenter sont hasardeuses :

1° Parce que nous ne saurions dire, dans l'état actuel de l'analyse à laquelle nous venons de nous livrer, si k' doit rester constant ;

2° Parce que nous n'opérons pas avec des tubes minces et que partant nous ne pouvons réaliser expérimentalement des valeurs de $\frac{a}{t}$ très grandes, l'épaisseur de l'aube dont nous n'avons pas tenu compte, entrant rapidement en jeu.

Provisoirement, nous nous contenterons de présenter le diagramme figure 49 que nous avons dressé en 1947, en faisant état de points obtenus sur des pompes hélicoïdes pour lesquelles il ne peut être question de prendre des valeurs très petites de $\frac{a}{t}$, sans risquer la cavitation.

On voit que k' cesse d'être constant mais dans

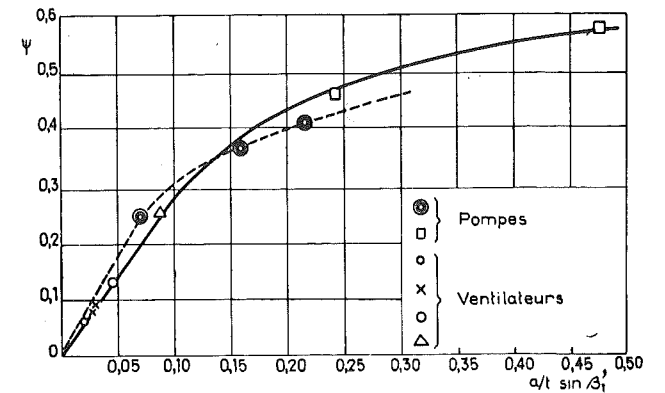


FIG. 49.

la diminution de k' entre évidemment l'influence de l'épaisseur dont nous n'avons pas tenu compte.

La courbe pointillée se rapporte à une pompe dont le tracé des aubes est à une seule courbure, pour lesquelles $F(z)$ peut atteindre 1,33, au lieu de 1,15 qui correspond à la valeur moyenne pour les aubes des ventilateurs à courbure parabolique que nous avons étudiés.

Il faudrait donc faire abstraction de la courbe pointillée puisque la correction que nous aurions dû apporter pour trouver k' en partant des chiffres expérimentaux, aurait ramené le point marqué d'un double cercle d'abscisse 0,07 sur la droite expérimentale fixée pour les ventilateurs.

Cette question devrait donc être revue à la lumière de la théorie que nous venons d'exposer.

§ 4. CONCLUSION

Nous ne retiendrons rien de ces dernières déductions, nous réservant de montrer dans un prochain fascicule, comment on peut passer de l'étude du ventilateur hélicoïde à faible nombre de pales, au ventilateur hélicoïde à grand nombre de pales, et de là au compresseur axial. Nous compléterions ce fascicule par l'étude des pompes centrifuges et hélicocentrifuges, et d'une manière générale, des turbo-machines.

Etablir un ensemble de PREUVES IRRÉFUTABLES de la valeur des notions de base dont nous sommes parti pour établir cette vaste synthèse, et donner les relations strictement valables pour calculer

- c_z, c_x, c_x', c_x'' coefficients relatifs aux ailes,
- P, \mathcal{C}', η coefficients relatifs aux hélices,
- M, P coefficients relatifs aux ventilateurs hélicoïdes

TEL A ÉTÉ NOTRE BUT ESSENTIEL en ajoutant cette étude sur le ventilateur hélicoïde, et nous croyons, cette fois, l'avoir complètement atteint.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Nous nous excusons d'avoir été long ; mais, en ces quelque quarante pages, nous pensons avoir fait le tour de la question.

Le lecteur qui aura pris la peine de nous suivre, se rendra compte non seulement de la manière dont se pose le problème, mais de la manière de le résoudre numériquement, car la méthode est absolument générale et ne fait appel à aucun chiffre qui serait fourni par des documents extérieurs.

Si ce lecteur veut bien faire un retour en arrière, il constatera qu'il n'y a, à la base de la méthode, que le théorème de la quantité de mouvement, et la relation expérimentale, formulée également par la théorie classique

$$\frac{c}{a} = \pi .$$

C'est elle qui, en nous permettant d'écrire la loi de continuité, nous a conduit :

1° A fixer les points d'inflexion dans l'étude des résistances passives des corps sans portance, et ainsi à faire connaître les valeurs explicites de c_x' et c_x'' ;

2° A fixer le point de redressement du flux (la valeur de $\frac{\gamma}{\beta_1}$, si l'on veut) dans l'étude de la sustentation de l'aile, ce qui nous a permis de fixer les valeurs de c_z et c_x .

Puisque nous considérons comme établi que ces lois sont vraies pour l'aile, nous avons eu l'audace de les croire vraies pour les pales d'hélice, regardées comme des ailes en rotation.

Sans rien demander à l'expérimentation, si invraisemblable que cela paraisse, nous avons établi la théorie de l'hélice capable :

1° De fixer le contour et le profil des pales ;

2° De fixer les lois caractéristiques de fonctionnement en fonction de $x = \frac{c}{\omega R_1}$;

3° D'en déduire le nombre de pales, le diamètre de ces pales, le pas relatif et la vitesse angulaire, pour assurer les performances maxima d'un avion donné.

Il est vrai que le lecteur serait tenté de dire qu'il s'agit de performances imaginaires, conséquences de nos calculs théoriques.

Le malheur de ce côté c'est que étant parti d'un avion dont les performances sont connues, la théorie nous a conduit à retrouver ses dimensions et ses prouesses de tous les jours, dans son service Belgique-Congo et retour.

Que l'on se représente bien que le nombre de

pales et le nombre d'hélices ne nous ont pas été suggérés par le fait que le DC 6 est à quatre moteurs et ses hélices à trois pales : nous n'aurions pu réaliser les conditions de service, si nous n'avions choisi :

1° Pour angle de vol, l'angle le plus favorable établi par le calcul ;

2° Trois pales et non quatre ;

3° Quatre moteurs, et non deux plus puissants.

Que l'on se représente bien aussi que l'évaluation des résistances passives qui ont servi au calcul de la puissance utile, puis de la puissance réelle des moteurs, n'est sortie que des évaluations strictes ressortant des formules établies, et non des valeurs qui auraient pu nous être communiquées. Nous pouvons affirmer que nous n'avons eu connaissance d'autres renseignements que ceux qui sont rappelés au début du dernier chapitre.

Nous n'avons rien ajouté aux valeurs calculées pour tenir compte des interactions ; si nous l'avions fait, nous eussions trouvé des valeurs trop élevées pour la puissance utile, pour la consommation, etc.

La conclusion c'est que nous devons admettre que si l'influence de cette interaction n'est pas nulle, elle est extrêmement faible, et cela parce qu'il s'agit ici de chiffres vrais pour un appareil tracté de grandes dimensions, et non de chiffres déduits des essais au tunnel sur une maquette de petites dimensions.

Les formules sur lesquelles s'appuient les calculs que nous venons de présenter sont valables pour tous les projets où l'on n'entend pas dépasser les 0,8 de la vitesse du son qui règne au plafond admis pour le vol normal de l'appareil.

Or JUSQU'À PRÉSENT les appareils commerciaux qui volent, n'ont pas dépassé cette vitesse, qu'ils soient tractés par des hélices ou par des réacteurs.

Les relations peuvent donc servir pour tous les projets en cours.

En passant nous ferons observer que les vitesses périphériques que nous avons trouvées, comme conséquence de nos calculs, ne dépassent pas :

$$\begin{aligned} 280 \text{ m.sec au niveau du sol} &= 0,8 \times 350; \\ 231 \text{ m.sec au niveau de } 5000 &< 0,8 \times 300. \end{aligned}$$

Dans le fascicule de 1954 nous avons expliqué ce qui se passait au moment où l'on atteint les 0,8 de la vitesse du son pour une aile isolée.

Pour une succession d'ailes et pour l'écoulement entre deux pales sans redressement à la sortie, le phénomène est beaucoup moins à craindre.

Le fait qu'il convient de s'en tenir toutefois, quelle que soit l'ampleur du projet, à ces vitesses périphériques, explique la raison d'être des réacteurs.

Avant de passer par là on peut porter le nombre de moteurs à six s'il s'agit d'un gros transporteur.

La relation (179) montre toutefois qu'il y a toujours une solution, mais que le diamètre de l'hélice doit croître comme la racine carrée de S , surface portante, si l'on maintient le nombre de moteurs constant.

Or S est fixé par la vitesse c_a de décollage ou d'atterrissage, et la longueur de la piste.

Ces valeurs étant supposées invariables, le nombre de moteurs restant fixé à quatre, le rayon de l'hélice doit croître comme \sqrt{S} et la vitesse de rotation de l'hélice décroître en proportion.

La puissance donnée par la formule (108)

$$T_t \times c = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) K_0' \times c$$

croît comme le cube de la vitesse, si le plafond reste fixé à la même hauteur, car K_0' doit être pris pour la valeur de α de 7°.

La seule manière de réduire la puissance est donc de réduire δ en fixant la vitesse de croisière à une hauteur telle que la charge Q réponde encore à la relation

$$Q = \left(S \frac{\delta}{g} c^2 \right) 2 k' F(\alpha) \sin \frac{\alpha}{2}$$

avec $\alpha = 7^\circ$ ou voisin de 7°.

Afin d'éviter une controverse au sujet de l'affirmation que nous n'avons rien emprunté à l'expérience, encore moins à l'arbitraire, nous soulignerons que pour obtenir les résultats numériques concernant la portance de l'aile, et la traction de l'hélice, nous avons dû :

1° Introduire, pour tenir compte de l'in-

fluence de l'envergure, une formule dérivée de la formule de Betz qui nous a permis de passer des ailes à projection horizontale rectangulaire, aux ailes de forme trapézoïdale ;

2° Introduire un coefficient de réduction pour tenir compte de l'épaisseur en bout, que nous avions estimé pour les ailes auscultées au tunnel qui étaient à l'origine toujours de forme rectangulaire, égal à $\left(1 - \frac{m}{\pi} \right)$, et que nous

avons ramené à $\sqrt{1 - \frac{m}{\pi}}$ pour les ailes de forme trapézoïdale ;

3° Admettre, pour le calcul de l'hélice, que la chute de l'épaisseur du flux influencé commence au 0,8 du rayon R_1 , et suit les ordonnées d'une ellipse, comme nous l'avions supposé pour établir la formule transposée de Betz.

On se rendra compte, en y réfléchissant, du merveilleux outil dont on dispose ainsi pour tirer des essais systématiques sur des hélices en translation, de rapides et substantiels progrès dans la connaissance de cette question, si compliquée à première vue, que l'on paraît avoir renoncé à en faire une synthèse valable, pour les applications.

Nous n'avons entrepris ce travail, au terme d'un long effort, que pour montrer la solidité des considérations émises sur la perte par déviation et la perte par frottement dans le fascicule de 1954.

L'ensemble des coïncidences relevées tant dans cette dernière étude que dans l'étude antérieure, ne peut se concevoir que si la théorie établie simplement en partant du théorème de la quantité de mouvement, a une valeur mathématique.

Est-ce la simplicité qui effraie ? Ceux qui auraient l'ambition de montrer la supériorité de la théorie classique n'ont en tout cas qu'une méthode valable pour triompher : celle de reprendre le problème que nous venons de traiter et de lui donner, en partant de la théorie classique, une solution conforme à celle adoptée par le constructeur.

TABLE DES NOTATIONS

Lettre	Désignation	Fig. ou n° de la formule	Lettre	Désignation	Fig. ou n° de la formule
<i>a</i>	profondeur de l'aile.		<i>g</i>	accélération due à la pesanteur.	
<i>b</i>	distance entre les points d'inflexion	fig. 14	<i>H</i>	hauteur en m de fluide fournie par le ventilateur.	
<i>c</i>	vitesse absolue	fig. 1	<i>h</i>	épaisseur du maître-couple apparent	(94)
<i>c_a</i>	vitesse à l'atterrissage	(152)	<i>i</i>	angle d'incidence.	
<i>c₀ c₁ c₂</i>	vitesse absolue d'entrée, de sortie, etc.	fig. 6	<i>k</i>	coefficient d'envergure $\frac{L}{a}$.	
<i>c_x</i>	coefficient de traînée propre	(74)	<i>k'</i>	rapport $\frac{e}{a}$ (p. 11 en bas)	(121)
<i>c_z</i>	coefficient de portance	(71)	<i>k₁'</i>	rapport $\frac{e}{a}$ dans le cas du flux frappant obliquement l'obstacle	(66)
<i>c_x'</i>	coefficient de traînée de profil rapporté à la surface allaire <i>S</i>	(90)	<i>2 k₁''</i>	coefficient de frottement du fluide contre la paroi	(46)
<i>c_x''</i>	coefficient de traînée due au maître-couple apparent rapporté à la surface <i>S</i>	(96)	<i>k₁ k₂ k₃</i>	coefficients fixant la valeur de <i>R_f</i>	(104)
<i>C</i>	coefficient de traînée totale rapporté à la section du maître-couple réel	(53)	<i>k''</i>	rapport $\frac{a}{R}$	(122)
<i>C₁</i>	coefficient partiel dû à la déviation	(49)	<i>k = k' k''</i>	dans les formules donnant <i>P</i> et <i>℄'</i>	(128)
<i>C₂</i>	coefficient partiel dû au frottement	(50)	<i>m</i>	inverse de l'allongement $\frac{\varepsilon}{a}$ ou $\frac{d}{a}$	(40)
<i>C_a</i>	coefficient de traînée due au maître-couple apparent	(95)	<i>m</i>	pas relatif égal à $\frac{P}{2\pi R}$	(129)
<i>C_x</i>	coefficient de traînée globale rapporté à la surface allaire <i>S</i>	(99)	<i>m₁</i>	inverse de l'allongement apparent	(94)
<i>d</i>	diamètre de la sphère ou du cylindre; épaisseur au maître-couple, désignée parfois par ε	fig. 14	<i>M</i>	la masse déviée par seconde	(1)
<i>d₁</i>	épaisseur du corps caréné dans la section faite au maître-couple réel	fig. 14	<i>M</i>	la masse totale de l'avion	(202)
<i>e</i>	épaisseur totale du flux influencé	fig. 2	<i>M</i>	coefficient manométrique	(245bis)
<i>e₁</i>	épaisseur du flux suivant la face concave	fig. 21	<i>n</i>	nombre de pales ou nombre d'aubes.	
<i>e₂</i>	épaisseur du flux suivant la face convexe	fig. 21	<i>n</i>	rapport entre les rayons <i>R₀</i> et <i>R₁</i> dans les ventilateurs.	
<i>e'</i>	épaisseur du flux rabattu à l'arrière.		<i>n</i>	nombre = $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ suivant qu'il s'agit d'une aile à face ventrale courbe ou à face ventrale plane	(96)
<i>E</i>	coefficient d'efficacité de l'hélice au point fixe	(240)	<i>N</i>	nombre de tours par minute.	
<i>E</i>	distance parcourue sur la piste au départ	(208)	<i>N_u</i>	puissance utile	(176)
<i>F, F₁, F₂</i>	forces appliquées au corps par suite de la déviation.		<i>N_e</i>	puissance effective	(175)

Lettre	Désignation	Fig. ou n° de la formule	Lettre	Désignation	Fig. ou n° de la formule
<i>P</i>	pression effective.		α	angle de déviation	fig. 7
<i>P</i>	pression moyenne sur la face avant du cylindre	(30)	α	angle de l'hélice $\text{tg } \alpha = \frac{P}{2\pi R}$	(124)
<i>P_m</i>	pression moyenne sur la face avant du cylindre	(28)	α_1	coefficient caractéristique de l'hélice	(126)
<i>P_r</i>	pression moyenne sur la face avant de la sphère.		α_1	angle correspondant à l'angle d'approche	(6)
<i>P_a</i>	pression atmosphérique.		β_1, β_2	angles définissant la courbure de l'aile	fig. 25
<i>P</i>	pas de l'hélice.		β_2'	$\beta_2' = \beta_2 - \delta$	fig. 25
<i>P</i>	force de sustentation	(70)	β_1	coefficient caractéristique de l'hélice	(127)
<i>P</i>	force de poussée appliquée à la pale de l'hélice	(117)	γ	angle de nulle portance	fig. 26
<i>P₁</i>	force de traction de l'hélice.		δ	poils spécifique du fluide.	
<i>P</i>	coefficient de puissance	(245bis)	δ	angle déterminant l'orientation arrière de l'aile	fig. 25
<i>Q</i>	charge totale.		ε	épaisseur de l'aile au maître-couple.	
<i>Q_m Q_c Q_u</i>	charges partielles	(147)	ε	angle apparaissant dans les angles caractéristiques du tracé de l'aile	fig. 44
<i>R</i>	rayon.		π	3,1416.	
<i>R_e</i>	nombre de Reynolds.		ω	vitesse angulaire.	
<i>R_f</i>	coefficient de finesse	(104)	ρ	rayon de courbure.	
<i>S</i>	section au maître-couple dans l'étude du carénage.		ρ_1	rayon du cercle d'approche	fig. 14 (41)
<i>S</i>	surface allaire dans l'étude des ailes.		θ	angle complémentaire pour fixer la profondeur de l'aile	fig. 25
<i>T</i>	traînée théorique de l'aile	(101)	\mathcal{E}	travail dépensé par sec pour remorquer l'obstacle	(16)
<i>T'</i>	traînée réelle de l'aile	(100)	Φ	rapport $\frac{\beta_1 + \gamma}{\beta_1 + \beta_2}$	
<i>T₁'</i>	traînée de la pale de l'hélice	(120)	Φ_1	0,75.	
<i>℄'</i>	puissance absorbée par l'hélice	(127)	Ψ	le coefficient qui fixe le coefficient angulaire de la courbe donnant <i>P</i>	(255)
<i>w</i>	vitesse relative.				
<i>u</i>	vitesse d'entraînement.				
<i>T_i</i>	coefficient de puissance dans la théorie des ventilateurs	(246)			
<i>x</i>	rapport de la vitesse axiale <i>c</i> à la vitesse périphérique	(243)			
<i>x</i>	rapport de $\frac{b}{a}$ dans l'étude du carénage	(47)			

N. B. — L'abondance des notations constitue évidemment une difficulté d'assimilation de la présente étude; mais il faut bien se rendre compte qu'il serait vain de chercher une relation capable de donner la portance et la traînée de l'aile, sans faire entrer dans cette relation, angles et rapports de dimensions qui caractérisent cette aile. Or rien qu'à cette fin, il a fallu réserver pour les angles, β_1, β_2, θ et δ (voir fig. 68) l'angle *i* d'attaque, l'angle α de déviation et enfin l'angle γ qui fixe la direction de la corde par rapport à la direction du flux, dans la position de nulle portance.

- Pour apporter le maximum de clarté à ce sujet, nous avons utilisé :
- 1) la lettre *c* sans ou avec indice 1, 2, 3, *a*, *s* pour désigner la vitesse absolue, ou les composantes de cette vitesse;
 - 2) la lettre *c* avec l'indice *z* pour désigner le coefficient de portance; avec l'indice *x* pour désigner le coefficient de traînée propre;
 - 3) la notation c_x' pour désigner le coefficient de traînée de profil rapporté à la surface allaire *S*; c_x'' pour désigner le coefficient de traînée du maître-couple apparent;
 - 4) les lettres *C* sans et avec indices 1, 2, *a*, pour désigner les coefficients de traînée rapportés à la section du maître-couple;
 - 5) la lettre *C_x* pour désigner le coefficient de traînée total rapporté à la surface allaire;
 - 7) la lettre *e* sans et avec indice 1, 2, pour désigner l'épaisseur du flux influencé;
 - 8) la lettre *k* ou *k* sans et avec indice pour désigner des rapports, d'une manière générale;
 - 9) la lettre $2k_1''$ pour désigner le coefficient de frottement du fluide contre une paroi.

Les chiffres entre parenthèses se rapportent aux numéros des formules.

Liste des mémoires et ouvrages de l'auteur

(se rapportant aux turbo-machines,
aux pertes de charge, à l'étude des résistances passives
préparant ainsi l'œuvre de synthèse de 1954 et de 1956)

1906	<i>coïde.</i> (Imprimerie G. Thone, Liège.) 21 pages in-4°, 33 fig.
Les Turbines à vapeur (Théorie et calcul des types fondamentaux). Communication faite à l'A. I. Lg. le 2 décembre 1906 (R. U. M., 1907). Tome XVII, 4 ^e série (58 pages in-8°). Tome XIV, 4 ^e série (51 pages in-8°, 2 pl.).	1950 <i>Etude du coefficient de traînée des corps sans portance et de l'influence du carénage</i> (Congrès National des Sciences de 1950).
1908	1953
Les Pompes centrifuges (Théorie et calcul des pompes centrifuges). Communication faite à l'A. I. Lg. le 22 novembre 1908 (R. U. M., 1909). Tome XXX, 1 ^{er} trimestre (40 pages in-8°). Tome XXXI, 2 ^e trimestre (52 pages in-8°, 23 fig., 1 pl.).	<i>Etude de la résistance à l'avancement des carènes</i> (R. U. M.). Tome IX, 9 ^e série, n° 3 (22 pages in-4°, 10 fig.). N. B. — Ces dernières études s'appuyant sur la connaissance du coefficient de frottement, nous avons groupé les différents mémoires se rapportant à cette question.
1911	1922
Les Hélices aériennes (Théorie et calcul des hélices aériennes). Communication faite à l'A. I. Lg. le 5 novembre 1912 (R. U. M., 1912). Tome XXXVII, 4 ^e série, n° 1 (50 pages in-8°); n° 2 (50 pages in-8°, 35 fig., 1 pl.).	<i>Calcul des pertes de charge dans les conduites</i> (Congrès scientifique de Liège, 1922, R. U. M.). Tome XII, 6 ^e série, n° 3 (17 pages in-8°, 3 fig.).
1914-1920	1927
<i>Etude expérimentale des pompes centrifuges</i> (Description de la pompe étudiée spécialement à cette fin; compte rendu des essais et conclusions (R. U. M., 1914; R. U. M.). 1914 Tome V, 5 ^e série (50 pages in-8°, 4 pl.). 1914 Tome VI, 6 ^e série, n° 3 (44 pages in-8°, 3 pl.). 1920 Tome VI, 6 ^e série, n° 3 (31 pages in-8°, 3 pl.). 1920 Tome VI, 6 ^e série, n° 4 (19 pages in-8°, 1 pl.).	<i>Recherches expérimentales sur les pertes de charge dans les conduites forcées</i> (Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Ecoles spéciales de Gand). Tome XVII, 5 ^e série, n° 1 (41 pages in-8°, 23 fig.).
1922	1928
<i>Courbes et coefficients caractéristiques des turbo-machines</i> (Congrès scientifique de Liège, 1922, R. U. M.) (47 pages in-8°, 12 fig.). <i>Tracé des aubes des turbines hydrauliques</i> (Congrès scientifique de Liège, 1922, R. U. M.) (25 pages in-8°, 9 fig., 1 pl.).	<i>Etudes sur le frottement des disques en rotation dans un fluide visqueux</i> (R. U. M.). Tome XVIII, 7 ^e série (25 pages in-8°, 14 fig.).
1925, 1 ^{re} édition — 1930, 2 ^e édition	1928
Les Turbo-machines. Ouvrage contenant la théorie, le calcul et les principaux éléments de construction des turbines hydrauliques, des pompes centrifuges et hélicocentrifuges, des ventilateurs et des compresseurs centrifuges. (Imprimerie Vaillant-Carmanne, Liège.) 1 vol. de 604 pages in-4°, 450 fig. dont 10 pl.	<i>Etude expérimentale des pertes de charge dans une conduite forcée alimentée en eau boueuse</i> (R. U. M.). Tome XVII, 7 ^e série (10 pages in-8°, 4 fig.).
1930	1954
Etat actuel de la théorie des turbo-machines (Congrès de Mécanique appliquée, tenu à Liège en 1930). 10 pages in-4°, 3 pl.	MÉCANIQUE DES FLUIDES APPLIQUÉE À L'ÉTUDE DES COQUES ET DES AILES (Imprimerie Vaillant-Carmanne, place Saint-Michel, Liège). 90 pages in-4°, 94 fig. Contenant comme synthèse : Troisième partie. — <i>Etude du coefficient de frottement utilisé dans le calcul des pertes de charge et de la résistance à l'avancement des carènes.</i> Quatrième partie. — <i>Etude du coefficient de résistance à l'avancement des carènes.</i> Cinquième partie. — <i>Etude des valeurs de c_x, c_x', c_x'' et c_x''' aux environs du mur de son.</i>
1947	1956
Théorie de la sustentation. Etude du ventilateur héli-	<i>Etude des coques et des ailes de l'hélice et de l'avion</i> (Revue M de la Société belge des Mécaniciens). Numéro d'octobre 1955, 10 pages in-4°, 13 fig. Numéro de janvier 1956, 25 pages in-8°, 28 fig.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS 5

PREMIÈRE PARTIE

**ÉTUDE DES PERTES DUES À LA DÉVIATION
DANS LE DÉPLACEMENT DES CORPS SANS PORTANCE,
LE CYLINDRE ET LA SPHÈRE**

Introduction

§ 1. Cas simple de l'écoulement plan autour du cylindre	7
§ 2. Analyse du cas le plus simple d'un jet frappant un plan à angle droit	8
§ 3. Application de la relation (2) à l'étude des pertes dans un aubage	9
§ 4. Application de la relation (2) au dièdre	10

CHAPITRE PREMIER. — **Vérification expérimentale
des déductions tirées de la théorie pour le cylindre**

§ 1. Application de la relation (2) au cylindre	11
§ 2. Analyse des résultats d'expériences	13
§ 3. Conclusions	15

DEUXIÈME PARTIE

**ÉTUDE DES PERTES DUES À LA DÉVIATION
DANS LE DÉPLACEMENT DES CORPS CARÉNÉS**

CHAPITRE PREMIER. — **Valeur du coefficient de résistance globale
pour un corps caréné, sans portance**

§ 1. Corps carénés dérivés du cylindre	18
§ 2. Corps carénés dérivés de la sphère	20
§ 3. Conclusions	21

CHAPITRE II. — **Valeurs de la portance et de la traînée
relatives à une aile mince**

§ 1. Cas du flux frappant obliquement une surface plane	22
§ 2. Cas du flux longeant à la fois la face concave et la face convexe	22
Remarque I	23
Remarque II	24
Remarque III	24

CHAPITRE III. — **Valeur du coefficient de résistance totale
pour une aile d'avion**

§ 1. Valeur de c_x'	25
§ 2. Valeur de c_x''	25
§ 3. Valeur du coefficient de résistance totale C_x	26

TROISIÈME PARTIE

ÉTUDE DE L'HÉLICE

CHAPITRE PREMIER. — **Théorie de l'hélice en translation**

§ 1. Valeurs de la poussée P_1 , de la puissance \mathcal{P}' et du rendement η	28
§ 2. Tracé de l'hélice	30

QUATRIÈME PARTIE

CALCUL DES DIMENSIONS GÉNÉRALES DE L'AVION

§ 1. Comment se pose le problème. Les données nécessaires au point de départ	35
§ 2. Choix de la courbure des ailes et des angles caractéristiques	36

§ 3. Calcul de la surface S de sustentation	37
§ 4. Calcul de la traînée	37
§ 5. Calcul de l'hélice	38
§ 6. Etude de la montée	39
§ 7. Examen de la période de décollage	41

CINQUIEME PARTIE

CHAPITRE PREMIER. — Développement des calculs
conduisant aux valeurs explicites de α_1 et β_1 de la théorie des hélices

§ 1. Résolution des intégrales	43
Intégrale I	43
Intégrale II	44
Intégrale III	44
Intégrale IV	44
Intégrale V	45
Intégrale VI	45
Intégrale VII	45
§ 2. Calcul des valeurs de α_1 et β_1	45
§ 3. Calcul de la valeur de α_1 et de sa dérivée pour le cas limite des pales sans frottement	46

CHAPITRE II. — Théorie du ventilateur hélicoïde

§ 1. Comment se pose le problème?	47
§ 2. Théorie du ventilateur à faible nombre d'aubes	47
§ 3. Vérification expérimentale de la théorie	50
§ 4. Conclusions	52

CONCLUSIONS GÉNÉRALES	54
---------------------------------	----

ULg - BST



13BST06071