

LES  
**Hélices Aériennes**

Ouvrage comprenant  
la Théorie et le Calcul de leurs Dimensions principales

PAR

**Ch. HANOCQ,**

Ingénieur A. I. Lg. et A. I. M.,  
Répétiteur du Cours de Physique Industrielle à l'Université de Liège.

---

PRIX: 5 FRANCS

---

LIÈGE  
Librairie Polytechnique Ch. BERANGER  
1, Quai de la Grande-Bretagne, 1  
Même Maison à Paris.

1912

AN. I. 15

A. N. I. 15

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
INSTITUT DU GÉNIE CIVIL  
BIBLIOTHÈQUES

LES

E. 77

# Hélices Aériennes

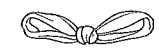
OUVRAGE COMPRENANT

la Théorie et le Calcul  
des Dimensions Principales des Hélices Aériennes

PAR

**Ch. HANOCQ,**

Ingénieur A. I. Lg. et A. I. M.,  
Répétiteur du Cours de Physique Industrielle à l'Université de Liège.



LIÈGE  
CHARLES DESOER, IMPRIMEUR  
Rue Ste-Véronique, 21

1912

## PRÉFACE

Le nombre des théories publiées à l'heure actuelle, sur l'hélice aérienne propulsive, est considérable ; aucune, à notre connaissance, n'est parvenue cependant à établir, comme celle que nous représentons ici, les propriétés essentielles de ces propulseurs que les expériences récentes du capitaine Durand et de M. Eiffel ont mises en lumière.

Il serait temps de dégager la littérature technique qui traite cette question, d'un trop grand nombre de considérations sans intérêt, d'études sans but pratique, de mots nouveaux, prétentieux et inutiles. A quoi bon faire ressortir à chaque instant, dans le cours de son exposé, que les phénomènes envisagés par la théorie sont beaucoup plus simples que les phénomènes réels ; n'en est-il pas toujours ainsi dans toutes les questions techniques que nous étudions ; et de quel intérêt peuvent bien être tous ces longs développements destinés à préciser des restrictions, s'ils ne sont suivis de considérations mathématiques capables de fournir des *formules générales plus exactes*.

Le constructeur demande aux théoriciens des formules qui, moyennant la connaissance de certains coefficients que l'expérience fournit, lui permettent de calculer les dimensions d'une hélice dans des conditions déterminées,

et d'une manière *suffisamment approchée* ; l'expérimentateur cherche dans la théorie, le moyen de coordonner les résultats de ses expériences. Si la théorie ne permet pas de grouper ceux-ci de façon à rendre plus aisée et plus précise, la solution des problèmes posés par le constructeur, elle reste à notre sens, sans utilité pratique.

Dans l'exposé que nous présentons, nous n'avons perdu de vue, à aucun instant, cet objectif ; et si ceux qui s'intéressent à cette question, veulent bien nous faire crédit pour ce qui concerne les intégrations et les calculs algébriques assez longs, au début du chapitre III, et ne s'attarder qu'aux considérations qui font suite aux formules fondamentales, nous sommes persuadés qu'ils n'éprouveront aucune difficulté à utiliser les méthodes proposées.

Les coefficients que nous avons employés, sont déduits des expériences de M. Rateau et de M. Eiffel sur des surfaces planes ou courbes *d'épaisseur uniforme* ; ceux qui posséderaient des résultats d'expériences précises sur des profils déterminés, pourraient avantageusement introduire dans les formules, les coefficients déduits de ces expériences, par la méthode que nous avons suivie au chapitre II.

La première partie de l'ouvrage est extraite d'articles parus dans la *Revue universelle des Mines* (5<sup>e</sup> série, tome XXXVII, 1912, 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> numéros).

Après avoir rappelé les formules fondamentales de l'aérodynamique, nous avons établi les formules donnant la poussée, le travail absorbé et le rendement de l'hélice propulsive en fonction du rapport de la vitesse de translation à la vitesse périphérique.

Nous avons vérifié ensuite dans quelle mesure les formules proposées répondent aux résultats fournis par

les expériences, tant sur l'hélice au point fixe que sur l'hélice en mouvement de translation.

Dans le chapitre V, nous avons exposé une méthode de calcul des hélices, et résolu un certain nombre de problèmes de nature à montrer la valeur et la portée pratique de la théorie.

En appendice, nous avons recherché les formules relatives aux hélices à angle d'attaque constant, et, dans un autre chapitre, les variations de l'effort de traction d'une hélice *sustentatrice* se déplaçant perpendiculairement à son axe.

Les résultats de ces derniers calculs permettent d'expliquer un fait d'expérience curieux signalé par M. Riabouchinsky, au sujet de ses recherches sur les hélices sustentatrices placées dans un flux d'air perpendiculaire à la direction de leur axe de rotation.

L'AUTEUR.

Liège, le 15 mai 1912.



## TABLE

### des Principales Notations adoptées dans l'Ouvrage.

$\omega$	vitesse relative, en mètres par seconde.
$u$	vitesse d'entraînement, en mètres par seconde.
$c$	vitesse absolue, en mètres par seconde.
$\omega$	vitesse angulaire, en mètres par seconde.
$N$	nombre de tours par seconde.
$R$	rayon en mètres.
$D$	diamètre de l'hélice en mètres.
$R_1$	rayon extérieur de l'hélice, en mètres.
$R_0$	rayon intérieur de l'hélice, en mètres.
$p$	pas de l'hélice, en mètres.
$p'$	pas de la corde sous-tendant le profil de l'hélice.
$(r_1 - r_2)$	épaisseur du flux dévié par une surface.
$l$	envergure de la surface.
$a$	longueur de la surface dans le lit du vent.
$S$	aire de la surface.
$e$	rapport $\frac{r_1 - r_2}{a}$ .
$\alpha$	angle de déviation.
$\beta_0$	angle de la vitesse relative d'entrée avec la vitesse d'entraînement.
$\varepsilon$	angle d'attaque ( $\alpha - \beta_0$ ).
$i$	angle d'attaque de la corde sous-tendant le profil d'une surface.
$i + \gamma$	angle de déviation pour un profil courbe.
$\theta$	angle au centre d'une pale.
$n$	nombre de pales, ou rapport $\frac{R_0}{R_1}$ .
$P$	poussée en kg.
$T$	trainée théorique en kg.
$T'$	trainée expérimentale en kg.
$P_1$	poussée axiale de l'hélice en kg.
$\mathcal{E}'$	puissance absorbée par l'hélice en kgm/sec.

$\alpha_1$	coefficient relatif à la poussée.
$\beta_1$	coefficient relatif à la puissance absorbée.
$m$	rapport du pas $p$ à la circonférence du cercle balayé par l'hélice.
$x$	rapport de la vitesse de translation à la vitesse périphérique.
$E$	efficacité de l'hélice.
$\eta$	rendement de l'hélice.
$\delta$	poids spécifique de l'air.
$g$	accélération due à la pesanteur, en mètres par seconde.
$K, k$	avec ou sans indice, coefficients.
$a, b, c, d$	fonctions de $m$ .
$c_x$ et $d_x$	fonctions de $x$ .
$a, b$	constantes (formule 24).

## Les Hélices Aériennes

---

### INTRODUCTION

L'étude des hélices aériennes est à l'ordre du jour, comme l'une des questions les plus importantes qui touchent à l'aviation. De nombreuses études théoriques ont déjà été publiées, des expériences très intéressantes ont été effectuées sur les hélices au point fixe, et dans ces derniers temps sur des hélices en translation. Cependant, à notre connaissance, le calcul des dimensions à donner aux hélices, dans des conditions déterminées, n'a jamais été exposé complètement; aucune des théories connues, n'est parvenue à établir d'une manière précise certaines propriétés fondamentales des propulseurs hélicoïdaux en mouvement de translation, propriétés que les expériences récentes du capitaine Dorand ont mises en lumière.

Comme on l'a déjà fait remarquer, et comme cela ressort des expériences plus anciennes sur les hélices marines, les propriétés des propulseurs hélicoïdaux ne diffèrent pas essentiellement qu'ils fonctionnent dans un fluide compressible comme l'air, ou incompressible comme l'eau. Il en résulte que la théorie des hélices aériennes pourra s'appliquer, aux coefficients près, aux hélices marines, et que le sujet prend de ce fait, une ampleur considérable.

Les théories connues peuvent se diviser en deux catégories : 1° celles où leurs auteurs étudient le phénomène *en gros*, voyant dans l'hélice un appareil prenant le fluide sur une section égale au cercle balayé, à une vitesse nulle, et le portant à une vitesse moyenne  $V$ , subissant de ce chef une poussée égale à  $MV$  et exigeant une puissance  $\frac{MV^2}{2}$ ,  $M$  étant la masse déplacée par seconde ; 2° celles où l'hélice est considérée comme constituée d'éléments infiniment petits, attaquant la masse fluide sous un certain angle d'incidence, subissant de ce chef une poussée élémentaire et exigeant un travail correspondant que les expériences récentes sur l'aérodynamique permettent de déterminer.

C'est à cette dernière méthode que nous avons eu recours ; mais ce que nous avons cherché, à la différence des auteurs qui nous ont précédé dans cette voie, ce sont des formules capables de donner, en *fonction de la vitesse de translation axiale de l'hélice* et des éléments caractéristiques de celles-ci, la poussée, le travail utile, le travail absorbé et le rendement.

Nous aurions hésité à publier cette étude dont les développements mathématiques sont longs et plutôt ardu, si les conclusions auxquelles nous avons été conduit, n'étaient extrêmement intéressantes, si les formules trouvées ne permettaient de coordonner les résultats d'expériences, et de traiter dans toute sa généralité,

grâce aux coefficients de l'aérodynamique, le problème suivant :

« Déterminer les dimensions d'une hélice capable de donner une poussée de  $P$  kg à la vitesse de rotation de  $N$  tours par seconde, en remorquant un appareil à la vitesse de  $c$  mètres par seconde, de manière à obtenir le maximum de rendement possible. Si le nombre de tours  $N$  n'est pas imposé, déterminer la vitesse angulaire la plus favorable. Calculer la puissance absorbée dans les deux cas. »

## CHAPITRE I<sup>er</sup>

### Description des deux types principaux d'hélice aérienne. Éléments caractéristiques de ceux-ci.

La fig. 1 donne les projections, verticale et horizontale, d'une hélice aérienne à deux pales, construite *en bois*. La fig. 2 représente, de la même manière, une hélice construite *en acier*. On voit que dans ce dernier système la partie centrale est supprimée et que les surfaces travaillantes sont reliées au moyeu, par des bras en acier rivés à celles-ci. Au point de vue du fonctionnement, il n'y a pas de différence caractéristique ; le dernier mode de construction présente cependant l'inconvénient de déterminer à la surface dorsale de la pale, et sur une certaine longueur de celle-ci, un ressaut du fluide en mouvement, dû à la présence du bras rivé, et partant des remous de nature à diminuer le rendement.

La *surface théorique* d'une hélice, c'est-à-dire celle qui serait réalisée si on pouvait donner à la pale une épaisseur faible et uniforme, est engendrée par le déplacement d'une droite s'appuyant sur l'axe  $yy'$  de l'hélice et sur la ligne hélicoïdale tracée à la surface du cylindre

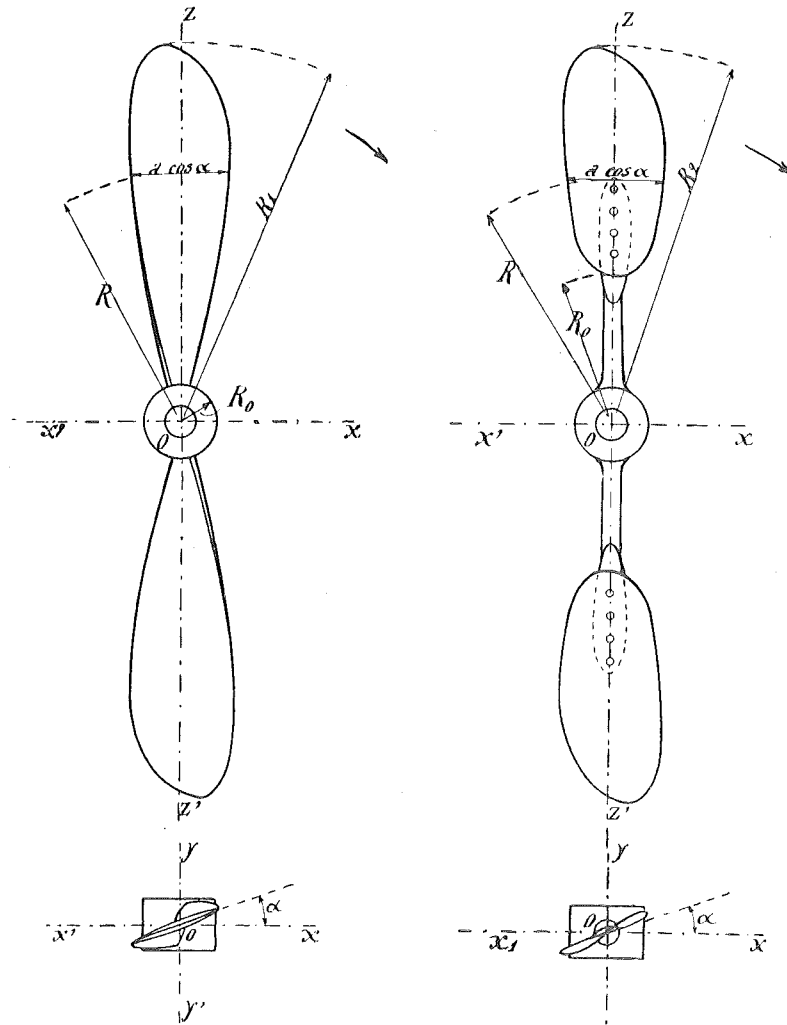


Fig. 1

Fig. 2

ficatif de rayon  $R_1$ , cette droite restant constamment parallèle au plan perpendiculaire à l'axe  $yy'$ . L'hélice théorique est donc une portion de surface hélicoïde à plan directeur.

Nous appellerons *pas* du propulseur, le pas  $p$  de la ligne hélicoïdale tracée à la surface du cylindre fictif de rayon  $R_1$ . Toute section cylindrique faite à une distance quelconque  $R$  du centre, donnera une ligne hélicoïdale de même pas  $p$ . En projection horizontale, la section se présentera, sur la faible longueur correspondant à la pale, comme une ligne sensiblement droite, inclinée sur l'axe d'un angle  $\alpha$ , variable avec le rayon, et défini par la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2 \pi R}.$$

Dans les hélices construites en acier, on peut réaliser à peu près le cas théorique que nous venons d'envisager. Dans les hélices en bois, au contraire, les sections successives d'une pale devant croître sensiblement vers le moyeu, on est obligé de faire varier la forme de celles-ci.

La fig. 3 donne les coupes faites respectivement à la distance  $R_1$ ,  $0,7R_1$  et  $0,4R_1$  de l'axe  $O$  d'une des hélices en bois essayées au laboratoire de Koutchino ; les sections sont rabattues dans le plan de projection par une rotation autour de la ligne  $eb$  parallèle à l'axe  $xx'$  de l'hélice. Le

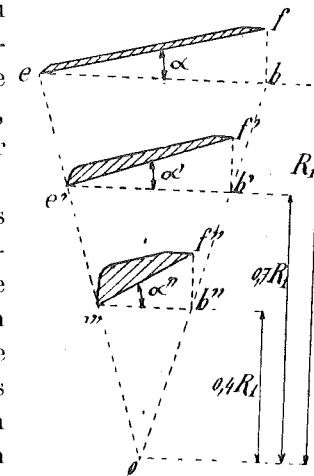


Fig. 3

pas de la face inférieure est constant mais la ligne profilant la face dorsale est inclinée d'un angle constant sur l'axe. Or, il est évident que la déviation du fluide



par la surface de l'aile, ne dépend pas seulement de l'angle de la face inférieure, mais aussi de celui de la face dorsale. Ce n'est donc plus qu'avec une certaine approximation que l'on peut parler du pas de l'hélice; dans le cas de la fig. 3, le pas de la surface hélicoïdale qui produirait le même effet que l'hélice en question, irait diminuant vers le moyeu.

Pour réaliser une hélice travaillant comme surface hélicoïdale pure, il suffit de choisir un profil symétrique comme celui de la fig. 4, la ligne médiane déterminant le pas de l'hélice.

En ce qui concerne la largeur  $a$  de la pale, on peut dire que presque tous les constructeurs la font croître régulièrement du moyeu à la périphérie, sauf à arrondir l'extrémité de manière à éviter les remous qui tendent à se former à cet endroit. En projection verticale, la largeur mesurée a pour valeur  $a \cos \alpha$ .

REMARQUE. — On peut se proposer de construire des hélices à pas décroissant vers le moyeu de façon à réaliser, dans le fonctionnement en translation, un angle constant, sur toute la largeur de l'aile, entre la direction relative du flux d'air qui frappe la surface, et la direction de cette surface.

D'autre part, on peut choisir pour profiler les sections des pales, deux arcs de cercle formant un croissant, comme il est indiqué fig. 5, ou un arc de cercle et une droite de manière à donner un segment de flèche variable avec le

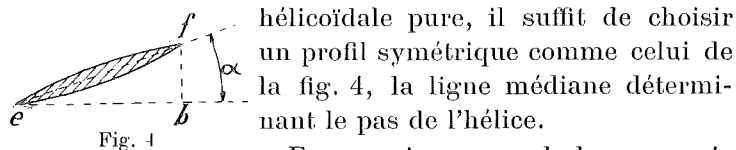


Fig. 4

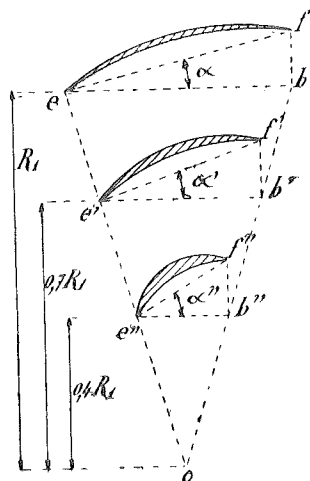


Fig. 5

rayon  $R$ . C'est ce dernier profil qui est particulièrement employé. On fait en sorte, dans ce cas, que la corde sous-tendant les arcs de cercle soit inclinée d'un angle  $\alpha$ , tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2 \pi R},$$

$p$  étant constant.

Les hélices aériennes sont ordinairement construites avec deux pales, mais il en existe à trois, quatre et même cinq pales.

Nous examinerons au chapitre III, l'influence des éléments caractéristiques que nous venons de définir, sur la poussée fournie et le travail absorbé par l'hélice, sur le rendement correspondant.

Ces généralités étant exposées d'une manière aussi succincte que possible, il reste avant d'entamer la théorie,

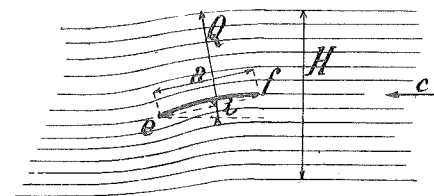


Fig. 6

à étudier les phénomènes qui accompagnent le déplacement dans l'air, d'une surface faisant un angle d'incidence  $i$  avec la direction du déplacement, ou ce qui revient au même, les phénomènes qui accompagnent la déviation d'un flux d'air d'épaisseur illimitée par une surface inclinée du même angle d'incidence  $i$  (fig. 6) sur la direction du flux.

## CHAPITRE II.

## Rappel des formules fondamentales de l'aérodynamique.

## § 1. — Formules théoriques pour l'attaque oblique d'un flux d'air, par une surface plane ou courbe.

Ainsi que le montrent les expériences remarquables de Riabouchinsky, les filets d'air animés d'une certaine vitesse  $c$  (fig. 6) sont déviés par la présence d'une plaque (plane ou courbe), sur une hauteur  $H$  qui dépend principalement : 1° de la longueur  $a$  dans le lit du vent, 2° de l'angle d'inclinaison  $i$  de la plaque, sur la direction du flux, et probablement de la vitesse  $c$  elle-même.

L'angle de déviation des filets varie d'un angle maximum pour ceux qui touchent la surface, à un angle nul pour ceux éloignés d'une longueur suffisante de celle-ci.

De la déviation, par la surface, du fluide animé d'une vitesse  $c$ , résulte une force  $Q$  dirigée à peu près normalement à la corde  $ef$ . Cette force  $Q$  varie nécessairement en grandeur et en direction avec la vitesse  $c$  du flux, la largeur  $a$ , la profondeur ou envergure  $l$  de la plaque, l'angle d'inclinaison  $i$  de la corde.

Il serait évidemment impossible de déduire de considérations mathématiques pures, une formule qui, tenant compte du phénomène complexe que nous venons de décrire, donnerait la valeur de  $Q$  en grandeur et en direction en fonction des éléments caractéristiques.

La seule chose que l'on puisse faire pratiquement, c'est d'envisager un cas limite, celui où la surface serait une surface cylindrique de rayon  $r$ , dont le bord d'attaque serait tangentiel à la direction du flux de vitesse  $c$

(fig. 7), ce flux étant limité à une épaisseur  $(r_1 - r_2)$  et étant dévié complètement d'un angle  $\alpha$ .

Considérons un élément limité par deux cylindres de rayon  $r$  et  $r + dr$ , et par deux plans infiniment voisins faisant un angle au centre  $d\theta$ . La force centrifuge agissant sur cet élément aura pour valeur

$$df = (l \times r \times d\theta dr) \frac{\delta c^2}{g r}$$

$c$  désignant la vitesse du flux;

$l$  l'envergure de la surface;

$\delta$  le poids de l'unité de volume d'air.

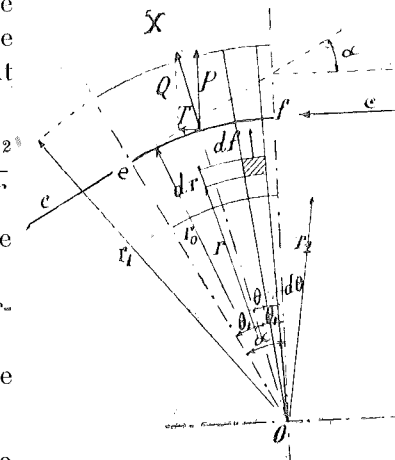


Fig. 7

Etant donné la faible variation de la pression

aux différents points d'un même rayon, on peut considérer  $\delta$  comme constant et intégrer entre  $r_2$  et  $r_1$ , par rapport à  $r$ , pour obtenir l'effort résultant  $dF$  correspondant à tous les éléments compris dans une tranche d'angle au centre  $d\theta$  :

$$dF = \frac{\delta}{g} l d\theta c^2 (r_1 - r_2).$$

Chacune des forces élémentaires  $dF$  correspondant à une valeur  $\theta$ , peut être décomposée en deux autres, l'une dirigée suivant  $OX$ , bissectrice de l'angle  $\alpha$ , l'autre dirigée perpendiculairement à celle-ci.

Les composantes suivant  $OX$  de ces différentes valeurs  $dF$  auront pour résultante  $Q$ , obtenue en intégrant l'expression

$$dF \cos \theta = \frac{\delta}{g} l c^2 (r_1 - r_2) \cos \theta d\theta$$

entre  $o$  et  $\theta_1$ , et en multipliant par 2, pour tenir compte des deux parties symétriques d'angle  $\theta_1$  :

$$Q = 2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin \theta_1 \quad (I)$$

Les composantes perpendiculaires à  $OX$  s'équilibrent deux à deux, puisque tout est symétrique, et que la vitesse  $c$  est supposée constante.

Si nous décomposons maintenant la résultante totale  $Q$  appliquée au centre de gravité de la surface, en deux autres, l'une suivant la perpendiculaire à la direction du flux non dévié, et l'autre dans la direction de celui-ci, nous aurons les valeurs de  $P$  et de  $T$  désignées ordinairement sous le nom de *poussée* et *traînée*.

$$P = 2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1$$

ou

$$P = \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin \alpha \quad (II)$$

$$T = 2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (III)$$

La formule II ci-dessus peut s'étendre avec une approximation suffisante au cas réel d'un flux d'épaisseur illimitée, comme le montrent les expériences réalisées dans ces dernières années, tout au moins pour les faibles valeurs de l'angle  $\alpha$ . Entre 0 et 10 ou 15°, on trouve pour  $(r_1 - r_2)$ , une valeur à peu près constante, qui varie dans des limites relativement restreintes avec le rapport  $\frac{l}{a}$  de l'envergure  $l$ , à la longueur  $a$  de la plaque dans le lit du vent.

La formule III qui ne tient compte ni du frottement de l'air sur la surface, ni des remous au bord d'attaque, doit être corrigée comme nous le montrerons plus loin pour donner des résultats concordants avec ceux de l'expérience.

Il est regrettable cependant que des expériences n'aient pas été faites en vue d'établir les coefficients relatifs au cas particulier que nous venons d'envisager, d'une surface de courbure variable, dont le bord d'attaque fût resté constamment tangentiel au flux. Nous savons bien que dans la pratique habituelle de l'aviation, on fait varier l'angle  $\alpha$ , non pas en courbant plus ou moins l'aile à l'arrière, mais en inclinant plus ou moins toute la surface, de forme invariable, sur la direction du flux. Néanmoins, en envisageant le cas où les phénomènes accessoires ont une influence minimum, on eût pu mieux se rendre compte de l'approximation limite des formules employées.

Il est vrai que l'on pourrait déduire des expériences entreprises par M. Rateau, M. Eiffel, M. Riabouchinsky, sur les plaques courbes de flèche variable, les données nécessaires à la vérification cherchée; mais dans bien des cas, on est frappé des différences obtenues par les différents expérimentateurs. C'est ainsi qu'il ressort des expériences de M. Eiffel que la poussée maximum  $P$  se présente toujours, lorsqu'on fait varier l'angle d'inclinaison  $i$  (fig. 8) d'une plaque courbe donnée, pour la valeur qui correspond à l'orientation du bord d'attaque dans la direction tangentielle au flux. Dans les diagrammes présentés par M. Riabouchinsky pour des plaques d'angle  $\alpha$  variable, cette remarque n'apparaît plus.

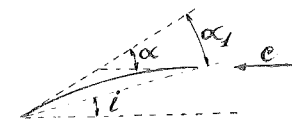


Fig. 8

Il semble que le besoin d'arriver premier fasse un peu perdre de vue la nécessité de coordonner les résultats

obtenus, de les comparer et de déterminer la raison d'être des différences constatées.

Quoi qu'il en soit, nous allons dans les deux paragraphes suivants, comparer les formules trouvées ci-dessus à celles ordinairement adoptées, et déterminer la valeur des coefficients qui doivent les affecter lorsqu'on les applique au cas d'une surface plane, ou d'une surface courbe, inclinée d'un angle  $i$  variable avec la direction du flux.

§ 2. — Comparaison entre les différentes formules proposées.

Ordinairement les formules employées, qui sont d'ailleurs identiques à celles que nous venons d'établir, sont déduites du théorème des quantités de mouvement de la manière suivante :

AB étant la vitesse du flux au bord d'attaque (fig. 9) d'une plaque plane ou courbe  $ef$ , AE sera la vitesse du flux à la sortie, l'angle BAE étant égal à  $\alpha$ . Sans erreur appréciable nous pouvons supposer :

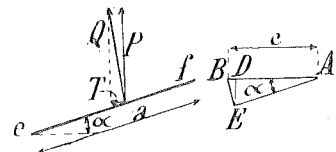


Fig. 9

$$AE = AB ;$$

la variation de vitesse dans la direction perpendiculaire au flux sera donc

$$ED = c \sin \alpha ,$$

et la force P résultante, dirigée suivant ED, c'est-à-dire perpendiculairement au flux, à l'entrée, sera

$$P = M c \sin \alpha , \quad (1)$$

M désignant la masse déviée par seconde.

Par le même raisonnement, nous arriverions à la relation

$$T = M \times BD = M c (1 - \cos \alpha)$$

$$\text{ou} \quad T = 2 M c \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

Ces formules sont identiques à celles que nous avons établies au paragraphe précédent. En effet :  $(r_1 - r_2)$  représentant l'épaisseur du flux dévié,  $l(r_1 - r_2) \frac{\delta}{g} c$  n'est autre chose que la masse M déviée par seconde.

Les formules ci-dessus ont souvent été mises sous une autre forme, en observant que  $(r_1 - r_2)$  est approximativement proportionnel à  $a$  pour les faibles valeurs de  $\alpha$ , et que par conséquent,  $l(r_1 - r_2) \frac{\delta}{g}$  est proportionnel à la S surface du plan.

En remplaçant  $l(r_1 - r_2) \frac{\delta}{g}$  par KS, il viendra :

$$P = K S c^2 \sin \alpha = k_y S c^2 \quad (3)$$

$$T = 2 K S c^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = k_x S c^2 \quad (4)$$

$k_y$  et  $k_x$  étant des coefficients à déterminer par l'expérience.

REMARQUE I. — Il pourrait paraître superflu d'établir les formules par la méthode que nous avons suivie au paragraphe précédent, alors que l'on arrive aux mêmes résultats par l'application si simple du théorème des quantités de mouvement. Mais nous ferons observer que, par la méthode que nous avons employée, nous nous sommes rendu compte très exactement des hypothèses implicites que ces formules contiennent.

REMARQUE II. — Contrairement à ce qui est ordinairement écrit à ce sujet, la résultante Q des composantes P et T n'est pas normale au plan, mais est bissectrice de l'angle formé par le plan et la direction du flux.

REMARQUE III. — Théoriquement le point d'application de la résultante se trouve au centre de gravité de la surface. Pratiquement on constate que ce point d'application est reporté vers le bord d'attaque. Cela tient à ce



que la déviation des filets se produit particulièrement au bord d'attaque comme en témoignent les diagrammes des pressions sur la face inférieure et des dépressions sur la face dorsale, relevées par M. Eiffel sur les plaques planes et sur les plaques courbes.

La poussée n'est évidemment pas proportionnelle à la surface  $S$ , car l'épaisseur du flux influencé ( $r_1 - r_2$ ) n'est pas proportionnelle à la longueur  $a$  de la plaque dans le lit du vent.

Pour une plaque donnée ( $r_1 - r_2$ ) varie avec l'inclinaison  $\alpha$ , comme le montrent les expériences de M. Rateau et de M. Eiffel.

Pour les valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $20^\circ$ , on constate que la formule II n'est plus applicable, le phénomène de l'écoulement du fluide le long de la plaque, étant complètement différent de celui que nous avons envisagé au paragraphe 1.

A partir d'un angle voisin de  $25^\circ$  ou  $30^\circ$ , ainsi qu'en témoignent les expériences de M. Riabouchinsky, les filets qui viennent en contact avec la face inférieure du bord d'attaque rebrousse vers le haut, comme l'indique la fig. 10, et il ne peut plus exister qu'une approximation très relative dans la loi que traduisent les formules II et III.

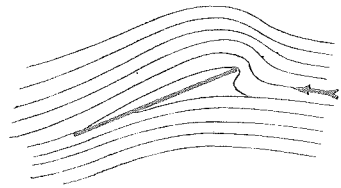


Fig. 10

Au delà de  $20^\circ$ , les valeurs expérimentales de  $P$  correspondent mieux à celles données par la formule

$$P' = P \cos \alpha = \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ou

$$P' = \frac{1}{2} \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin 2 \alpha$$

II'

Nous emploierons donc la formule II ou la formule II', qui donnent des résultats très peu différents, pour les valeurs de  $\alpha$  inférieures à  $20^\circ$ , et nous conserverons exclusivement la formule II' pour les valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $20^\circ$ .

## § 3. — Détermination des coefficients expérimentaux.

## A. — Plaques planes.

Recherchons, au moyen des valeurs de  $k_x$  et  $k_y$  fournies par les expériences de M. Rateau et de M. Eiffel pour les plaques planes, les valeurs qu'il faut donner à  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  pour qu'il y ait égalité entre les valeurs calculées de  $P$  et les valeurs observées. Pour cela posons l'égalité :

$$k_y S c^2 = \frac{1}{2} \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin 2 \alpha ;$$

nous en déduisons :

$$k_y = \frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2 \alpha \frac{l (r_1 - r_2)}{S} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2 \alpha \frac{r_1 - r_2}{a}$$

et par conséquent

$$\frac{r_1 - r_2}{a} = \frac{k_y}{\frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2 \alpha} \quad (4)$$

Si nous introduisons la valeur de ( $r_1 - r_2$ ) ainsi trouvée en fonction de  $a$ , pour chaque valeur de  $\alpha$ , dans l'équation III, nous pourrions déterminer la valeur de  $T$  et, par conséquent, le rapport  $\frac{T'}{T}$  entre la valeur réelle et la valeur théorique.

$$\frac{T'}{T} = \frac{k_x S c^2}{2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{k_x}{2 \frac{\delta}{g} \frac{r_1 - r_2}{a} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (5)$$

Dans le tableau I ci-contre, nous avons donné les valeurs de  $\frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2\alpha$  et de  $2 \frac{\delta}{g} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ , en prenant pour  $\delta$ , 1,293 kg. Nous avons transcrit ensuite les valeurs expérimentales de  $k_x$  et  $k_y$ , fournies par les essais sur une plaque plane de  $0^m50 \times 0^m30$ , et sur une autre de  $0^m85 \times 0^m15$ .

Les valeurs calculées de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  et de  $\frac{T'}{T}$  ont été mises en diagramme (fig. 11). Les courbes pointillées donnent les valeurs de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  et les courbes en trait plein donnent le rapport de  $\frac{T'}{T}$ , en fonction de  $\sin \frac{\alpha}{2}$ .

Les points noirs correspondent à la plaque de  $0^m85 \times 0^m15$  expérimentée par M. Eiffel.

On voit que

1° pour les petits angles, jusqu'à 4 ou 5°, l'épaisseur du flux influencé est presque indépendant de la longueur  $a$ , puisque  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  est égal à 3 pour  $a = 0^m15$  et est égal à 1,35 pour  $a = 0^m30$ ;

2° pour les valeurs supérieures à 20°,  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  est sensiblement constant pour un même angle, quelle que soit la valeur  $a$ , mais il varie avec cet angle;

3° les valeurs du rapport  $\frac{T'}{T}$  diminuent avec la valeur de  $\frac{l}{a}$ , rapport de l'envergure  $l$  à la longueur  $a$ .

Cette dernière remarque s'expliquerait par l'influence proportionnellement plus grande du bord d'attaque dans les expériences B, où le rapport  $\frac{l}{a}$  est voisin de 6, alors qu'il n'est que de 1,65 pour la plaque utilisée dans les expériences A.

TABLEAU I.

$\alpha$	A EXPÉRIENCES DE M. RATEAU plaque de $0^m50 \times 0^m30$										B EXPÉRIENCES DE M. EIFFEL plaque de $0^m85 \times 0^m15$			
	$\sin \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{l}{2g} \sin 2\alpha$	$2 \frac{\delta}{g} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$	$k_y$	$k_x$	$\frac{r_1 - r_2}{a}$	$\frac{T'}{T}$	$k_y$	$k_x$	$\frac{r_1 - r_2}{a}$	$\frac{T'}{T}$	
1°	0,0174	0,0349	0,0087	0,000075	0,0000198	0,0030	0,0003	1,302	11,62	0,0068	0,0019	2,96	32,4	
2	0,0349	0,0698	0,0174	0,000302	0,0000796	0,0061	0,0006	1,321	5,70	0,0140	0,0033	3,04	13,6	
4	0,0698	0,1392	0,0349	0,001217	0,0003210	0,0124	0,0014	1,352	3,23	0,0280	0,0061	3,05	6,25	
6	0,1045	0,2079	0,0523	0,002740	0,000722	0,0187	0,0025	1,363	2,54	0,0371	0,0083	2,71	4,24	
8	0,1392	0,2756	0,0698	0,004870	0,001285	0,0245	0,0039	1,343	2,26	0,0406	0,0100	2,24	3,48	
10	0,1736	0,3420	0,0872	0,007600	0,00020	0,0303	0,0057	1,340	2,12	0,0431	0,0113	1,91	2,96	
15	0,2588	0,5000	0,1305	0,01705	0,00449	0,0420	0,0120	1,272	2,10	0,0452	0,0142	1,37	2,31	
20	0,3420	0,6428	0,1736	0,03015	0,00795	0,0502	0,0185	1,182	1,965	0,0472	0,0180	1,00	2,24	
25	0,4226	0,7660	0,2164	0,04690	0,01237	0,0498	0,0237	0,985	1,940	0,0483	0,0237	0,955	2,00	
35	0,5736	0,9397	0,3007	0,09000	0,02378	0,0465	0,0330	0,750	1,80	0,0480	0,0348	0,755	1,89	
45	0,7071	1,0000	0,3820	0,1458	0,03850	0,0415	0,0405	0,628	1,67	0,0420	0,0451	0,636	1,84	
60	0,8660	0,8660	0,5000	0,2500	0,06395	0,0310	0,0515	0,657	1,20	0,0315	0,0585	0,668	1,33	

Dans les limites de l'approximation nécessaire à de tels calculs, nous pourrions représenter la courbe des valeurs de  $\frac{T'}{T}$  en fonction de  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , en posant

$$\frac{T'}{T} = \frac{k_1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + k_3 \quad \text{IV}$$

$k_1$  et  $k_3$  étant déterminés de telle manière que les valeurs calculées coïncident avec les valeurs expérimentales dans le voisinage des angles de 4 à 10° qui sont les angles d'attaque les plus favorables dans le fonctionnement des hélices.

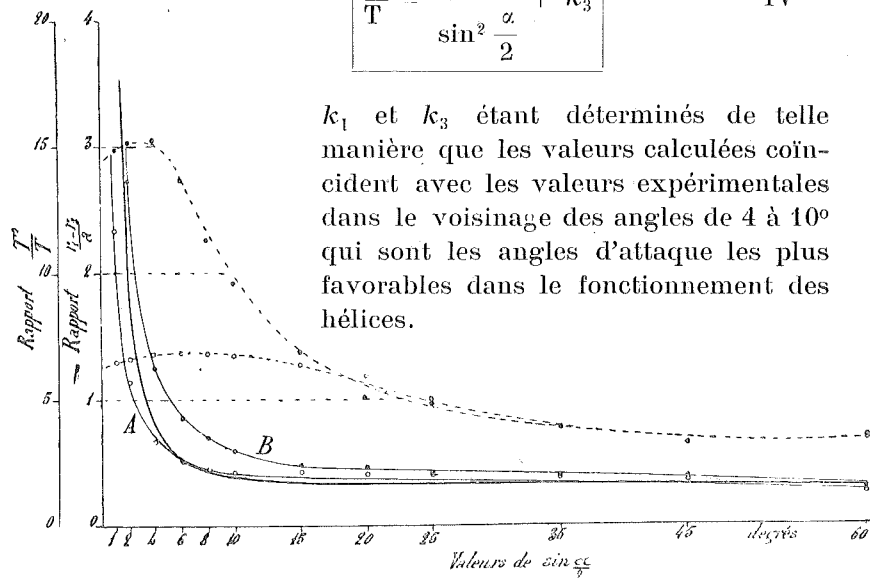


Fig. 11

Nous avons tracé en trait fort (fig. 11) la courbe théorique correspondant à

$$k_1 = 0,003 \quad k_3 = 1,5.$$

Comme on le voit, la courbe coïncide très approximativement avec celle correspondant aux expériences de M. Rateau. Pour se rapprocher de la courbe correspondant à la plaque de grande envergure où le bord d'attaque joue un rôle plus important, il aurait fallu choisir

$$k_1 = 0,006 \quad k_3 = 1,8.$$

REMARQUE. — Il eût été intéressant de dresser des tableaux identiques à celui indiqué ci-dessus (tabl. I) pour une série de plaques de même épaisseur, même bord d'attaque, dont le rapport  $\frac{l}{a}$  eût varié entre  $\frac{1}{4}$  et 6, par exemple, en passant par les valeurs  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 1, etc.

Malheureusement nous ne possédons pas les données expérimentales suffisantes. M. Eiffel a bien publié les diagrammes, en fonction de l'angle  $\alpha$ , des poussées qui s'exercent sur des surfaces de rapports  $\frac{l}{a}$  différents, en prenant comme poussée unitaire celle qui s'exerce sur la même surface placée orthogonalement, mais ces diagrammes ne permettent aucune déduction utile.

Il eût au contraire été facile, par un simple coup d'œil sur les diagrammes tracés comme nous venons de le faire, de déterminer le rapport  $\frac{l}{a}$  le plus favorable entre deux angles donnés, soit au point de vue de la poussée, soit au point de vue de la trainée. Il est évident que la surface qui présente le plus faible rapport  $\frac{T'}{T}$  pour un angle donné, est celle qui donne le meilleur rendement.

En recherchant deux équations pour représenter en fonction de  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , les valeurs de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  et de  $\frac{T'}{T}$ , on aurait pu, par la simple connaissance de coefficient correspondant au rapport  $\frac{l}{a}$  choisi, déterminer P et T' par des formules, et coordonner ainsi tous les résultats trouvés.

Pour se rendre compte de l'influence des conditions d'expériences sur les résultats, notamment de l'épaisseur du flux d'air dirigé sur la plaque, il eût été nécessaire cependant de répéter la série d'expériences signalées ci-dessus, en prenant  $a$  égal à 0 m 10, 0 m 20 et 0 m 30, par exemple.

B. — Plaques courbes.

Cherchons à étendre les formules générales au cas d'une surface dont la corde, sous-tendant l'arc formé par la section médiane, fait un angle variable  $i$  avec la direction du flux (fig. 12).

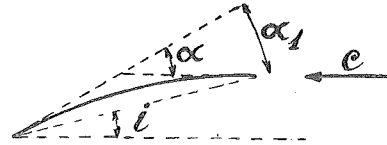


Fig. 12

$\alpha_1$  étant l'angle de la corde avec la tangente à la face dorsale, on voit que ce que nous avons appelé l'angle de déviation  $\alpha$  devient égal à

$$\alpha = \alpha_1 + i.$$

Mais est évident que pour  $i$  égal à zéro, par exemple, le flux n'est pas dévié d'un angle  $\alpha_1$ ; il se produit bien une forte dépression au bord d'attaque, mais la direction des filets à la sortie est peu différente de la direction à l'entrée et l'on constate que pour un angle  $i$  négatif de 4 à 8° suivant la valeur de  $\alpha_1$  et du profil de la section, la

poussée devient nulle (fig. 13). Appelons  $\gamma$  l'angle  $i$  pour lequel la poussée  $P$  est nulle, et désignons par  $\alpha$ , l'angle ( $i + \gamma$ ).

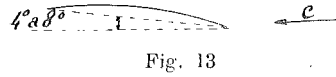


Fig. 13

$$\alpha = i + \gamma \tag{6}$$

Déterminons, comme nous l'avons fait pour la surface plane, la variation  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  en fonction de l'angle  $\alpha$  ainsi défini, puis celle de  $\frac{T'}{T}$ .

Le tableau II donne les valeurs calculées pour deux plaques courbes :

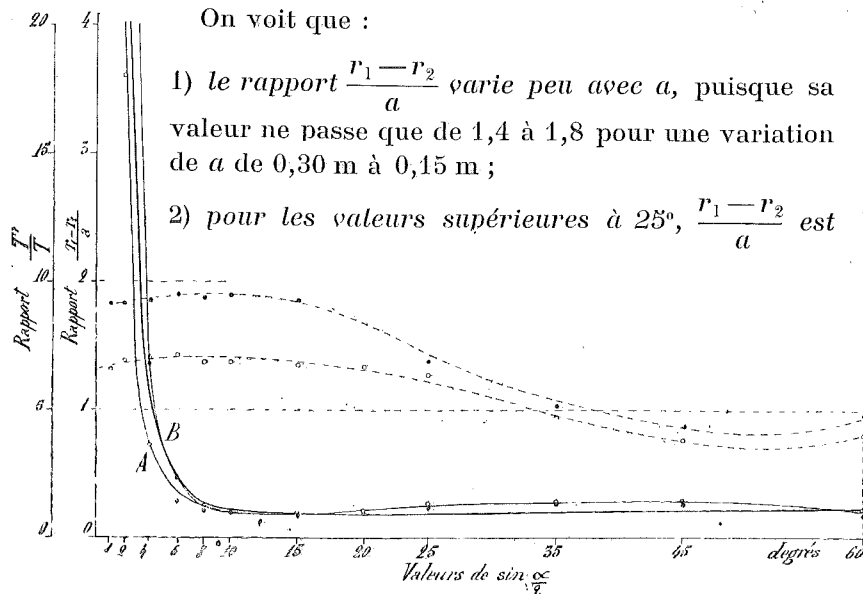
- l'une A de 0 m 50 x 0 m 30 avec  $\alpha_1 = 10^\circ$
- l'autre de 0 m 90 x 0 m 15 avec  $\alpha_1 = 16^\circ 5'$ .

TABLEAU II.

$i$	A EXPÉRIENCES DE M. RATEAU plaque de 0m50 x 0m30										B EXPÉRIENCES DE M. EIFFEL plaque de 0m90 x 0m15							
	Expér. A	Expér. B	$\alpha$	$\sin \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\frac{\alpha}{2}$	$\sin \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\delta}{2g}$	$\frac{\delta}{2g} \sin 2\alpha$	$\frac{\delta}{2g} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$k_y$	$k_x$	$\frac{r_1 - r_2}{a} = e$
-3°	0	0	1°	0,0174	0,0349	0,0087	0,00075	0,000198	0,0031	0,0024	1,31	0,0064	0,0024	0,000198	0,0042	0,0063	1,88	174
-2°	0	0	2°	0,0349	0,9698	0,0174	0,00802	0,000776	0,0064	0,0020	1,385	0,0064	0,0020	0,000776	0,0084	0,0055	1,82	38
0	0	0	4°	0,0698	0,1392	0,0349	0,001217	0,000321	0,00917	0,0016	1,400	0,0128	0,0016	0,000321	0,0170	0,0040	1,85	675
2°	2	2	6°	0,1045	0,2079	0,0523	0,002740	0,000722	0,0194	0,0014	1,415	0,0194	0,0014	0,000722	0,0260	0,0032	1,89	2,35
4°	4	4	8°	0,1392	0,2756	0,0698	0,00487	0,001285	0,0250	0,0018	1,37	0,0250	0,0018	0,001285	0,0340	0,0029	1,87	1,21
6°	6	6	10°	0,1736	0,3420	0,0872	0,00760	0,00200	0,0312	0,0025	1,38	0,0312	0,0025	0,00200	0,0428	0,0033	1,89	0,875
11°	11	11	15°	0,2588	0,5000	0,1305	0,01705	0,00449	0,0450	0,0057	1,36	0,0450	0,0057	0,00449	0,0614	0,0066	1,86	0,79
16°	16	16	20°	0,3420	0,6428	0,1736	0,03015	0,00795	0,0566	0,0114	1,335	0,0566	0,0114	0,00795	0,0740	0,0128	1,75	0,92
21°	21	21	25°	0,4226	0,7660	0,2164	0,04690	0,01137	0,0650	0,0210	1,285	0,0650	0,0210	0,01137	0,0700	0,0192	1,38	1,12
27°	27	27	35°	0,5736	0,9397	0,3007	0,09000	0,02378	0,0580	0,0320	1,44	0,0580	0,0320	0,02378	0,0630	0,0310	1,02	1,28
31°	31	31	45°	0,7071	1,0000	0,3820	0,1450	0,03850	0,0501	0,0410	0,760	0,0501	0,0410	0,03850	0,0580	0,0420	0,88	1,24
41°	41	41	60°	0,8660	0,8660	0,5000	0,2500	0,06595	0,0380	0,0560	0,805	0,0380	0,0560	0,06595	0,0460	0,0555	0,97	0,87



Nous avons porté, en fonction de  $\sin \frac{\alpha}{2}$  (fig. 14), les valeurs de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  et de  $\frac{T'}{T}$ . Les courbes pointillées se rapportent aux valeurs de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$ ; les points noirs correspondent aux valeurs expérimentales trouvées pour la plaque de  $0,90 \times 0,15$  m.



sensiblement constant, pour un même angle, quelle que soit la valeur de  $a$ , mais varie avec cet angle ;

3) les valeurs de  $\frac{T'}{T}$  diminuent avec la valeur de  $\frac{l}{a}$ , rapport de l'anvergure  $l$  à la longueur  $a$ , mais moins que dans le cas des plaques planes ;

4) au-dessus de  $4^\circ$ , les valeurs du rapport  $\frac{T'}{T}$  sont

sensiblement plus faibles pour un même angle  $\alpha$ , que dans le cas des plaques planes, ce qui explique la supériorité des surfaces courbes.

Les courbes A et B de la fig. 14 répondent mieux à une équation de la forme

$$\frac{T'}{T} = \frac{k_1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{k_2}{\sin \frac{\alpha}{2}} + k_3 \quad \text{V}$$

La courbe tracée en trait fort correspond aux coefficients suivants :

$$k_1 = 0,010 \quad k_2 = 0,14 \quad k_3 = 1,4$$

(Les courbes A et B coïncident sensiblement entre  $\alpha = 8^\circ$  et  $\alpha = 60^\circ$ .)

### CHAPITRE III.

#### Théorie des hélices propulsives.

##### § 4. — Théorie élémentaire des hélices au point fixe.

Soit  $yy'$  (fig. 15) l'axe d'une hélice représentée en projection horizontale ; soit  $ef$  la projection d'un élément à la distance  $R$  de l'axe, incliné d'un angle  $\alpha$  sur la direction  $xx'$  perpendiculaire à l'axe de rotation.

Supposons que l'hélice fonctionne au point fixe et soit  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation. La vitesse  $u$  de l'élément sera égale à  $\omega R$  et la vitesse du flux d'air par rapport à celui-ci, c'est-à-dire la vitesse relative  $\omega_0$ , sera égale et de signe contraire à  $u$ .

Sous l'action de l'élément  $ef$ , le flux sera dévié d'un angle  $\alpha$  sur la direction primitive, et la vitesse relative à la sortie  $\omega_1$ , sera tangentielle à  $ef$ . Si nous faisons abstraction de la perte de vitesse toujours

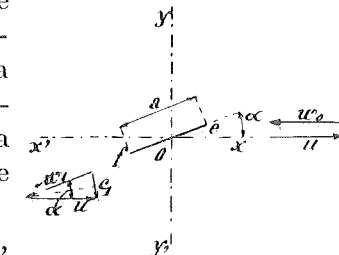


Fig. 15

très faible, résultant du choc au bord d'attaque et des frottements sur les faces de l'élément  $ef$ , nous aurons :

$$\omega_1 = \omega_0 ;$$

en construisant le triangle des vitesses avec  $\omega_1$  et  $u$  comme côtés, nous obtiendrons la vitesse absolue  $c_1$  de sortie.

D'après ce que nous avons vu [équation (1)], nous aurons pour expression de la poussée.

$$P = M u \sin \alpha = M c_1 \quad (7)$$

puisque dans le triangle isocèle formé par  $u$  et  $\omega_1$

$$c_1 = 2 u \sin \frac{\alpha}{2}$$

et que dans les limites de l'approximation nécessaire, on peut poser, tout au moins pour les faibles valeurs de  $\alpha$ ,

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \quad \text{et} \quad c_1 = u \sin \alpha$$

Pour déterminer la valeur du travail absorbé par seconde, nous n'aurons qu'à appliquer l'équation (2)

$$\mathcal{C} = T \times u = 2 M u^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

ce qui revient à

$$\mathcal{C} = \frac{M c_1^2}{2} \quad (8)$$

en tenant compte de la relation ci-dessus

Les formules (7) et (8) sont identiques à celles que l'on obtient en partant du théorème des quantités de mouvements pour évaluer la poussée, et du théorème des faces vives pour évaluer le travail.

Lorsqu'on admet, comme on le fait quelquefois

$$T = M u \sin^2 \alpha$$

on trouve pour  $\mathcal{C}$  une valeur double de la précédente :

$$\mathcal{C} = M c_1^2$$

On a longuement discuté cette question du coefficient 2, dans l'expression du rapport

$$\frac{P}{\mathcal{C}} = E$$

qui représente la poussée par unité de puissance.

Lorsqu'on part des équations (7) et (8), on trouve, en effet,

$$\frac{P}{\mathcal{C}} = \frac{2}{c_1} \quad (9)$$

alors qu'en adoptant pour  $T$  la valeur

$$M u \sin^2 \alpha,$$

on obtient

$$\frac{P}{\mathcal{C}} = \frac{1}{c_1}.$$

On a discuté cette question d'autant plus longuement que le travail  $\mathcal{C}'$  réellement absorbé paraît être le double environ du travail théorique  $\mathcal{C}$ , dans certaines expériences faites sur des hélices au point fixe.

La formule

$$T = M u \sin^2 \alpha$$

n'ayant aucune base théorique, il serait absurde de vouloir s'en servir pour établir que *théoriquement* on doit admettre :

$$\mathcal{C} = M c_1^2$$

Les valeurs expérimentales du rapport  $\frac{T'}{T}$  calculées dans le tableau I, montre que la traînée réelle  $T'$ , est toujours sensiblement plus grande que la traînée théorique  $T$  dans le cas d'une *plaque plane*, et que par conséquent

$$\mathcal{C}' = T \times u = \frac{M c_1^2}{2} \times K$$

ou  $K$  est un coefficient voisin de 1,5.

REMARQUE. — Il y a lieu de faire remarquer que contrairement à ce que l'on croit généralement, la vitesse absolue  $c_1$ , de sortie ne doit pas être *théoriquement* dirigée suivant l'axe de l'hélice, mais obliquement par rapport à celui-ci, comme le montre la construction du triangle des vitesses à la sortie (fig. 15).

L'inclinaison de la vitesse absolue de sortie sur l'axe, est d'autant plus grande que  $\alpha$  est plus grand, et que la perte de vitesse relative, due au frottement et aux chocs, est plus grande. Les expériences de M. Riabouchinsky montrent que dans la réalité, il en est bien ainsi.

§ 5. — Théorie de l'hélice en mouvement de translation suivant l'axe. — Formules fondamentales.

Soit encore  $yy'$  (fig. 16) l'axe d'une hélice représentée en projection horizontale; soit  $ef$  un élément d'une des pales de celle-ci de hauteur  $dR$ , de longueur  $a$ , situé à la distance  $R$  de l'axe. Appelons  $\alpha$  l'angle de l'élément  $ef$  avec la direction  $xx'$ , perpendiculaire à l'axe.

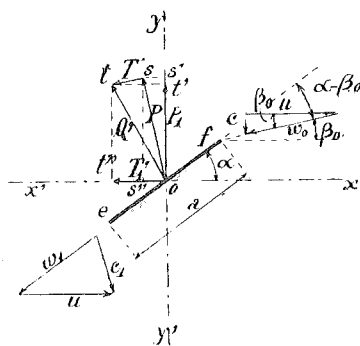


Fig. 16

Supposons que l'hélice se déplace suivant son axe, avec une vitesse  $c$  et soit animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire  $\omega$ . La vitesse relative  $\omega_0$  du flux par rapport à l'élément sera donnée par le triangle des vitesses construit sur  $c$  et sur  $u = \omega R$ , et l'angle de déviation du flux par l'élément sera, non plus  $\alpha$ , mais  $(\alpha - \beta_0)$ .

La vitesse relative  $\omega_1$ , à la sortie sera un peu plus faible que  $\omega_0$ , mais cette différence pourra être négligée, et le triangle des vitesses construit sur  $\omega_1$  et sur  $u$ ,

comme côtés, donnera la vitesse absolue  $c_1$  en grandeur et en direction.

La composante  $P$  de l'action du flux sur l'élément, composante qui est perpendiculaire à la direction de ce flux, c'est-à-dire dans ce cas à  $\omega_0$ , étant représentée par  $os$ , la résistance réelle à l'avancement ou trainée  $T'$ , étant représentée par  $st$ , la résultante totale de l'action du flux sera égale à  $Q' = ot$ .

Appelons  $P_1$  et  $T_1'$  les deux composantes de  $Q'$  dirigées l'une suivant l'axe  $yy'$  de l'hélice, et l'autre suivant la perpendiculaire  $xx'$  à cette direction; nous aurons

$$P_1 = ot' - s't' = P \cos \beta_0 - T' \sin \beta_0. \quad (10)$$

$$T_1' = os'' + s''t'' = P \sin \beta_0 + T' \cos \beta_0. \quad (11)$$

Or, l'effort de poussée ou de traction fournie par l'une des pales de l'hélice ne sera rien d'autre que la somme des valeurs de  $P_1$  pour tous les éléments de cette pale, de même que la puissance absorbée correspondante, sera fournie par l'intégrale

$$\mathcal{E}' = \int_0^1 \omega R dT_1',$$

$dT_1'$  représentant la valeur élémentaire de  $T_1'$ , pour une portion de pale de hauteur  $dR$ .

Les valeurs de  $P$  et de  $T'$  sont fournies, en fonctions des données de la question par les formules II', III et V.

Cependant pour ne pas nous heurter à des difficultés insurmontables, nous emploierons la formule II au lieu de II', pour évaluer  $P$ ; les deux donnent des valeurs sensiblement les mêmes jusqu'à  $20^\circ$ , et dans les environs du rendement maximum des hélices, les angles d'attaque sont toujours plus faibles que  $20^\circ$ .

Pour les hélices fonctionnant au point fixe, l'erreur résultant de ce chef sera d'autant plus importante que le pas  $p$  sera plus grand, et pour nous rendre compte de la

différence, nous calculerons au paragraphe 10, pour ce cas particulier, la poussée  $P$ , en partant de la formule II'. Cette manière de procéder permettra de lever tout doute sur l'exactitude et sur la valeur des formules obtenues.

En tenant compte de cette remarque et en observant

1° que la valeur de  $l$  de la formule est égale à  $dR$ ;

2° que la valeur  $c$  de la vitesse du flux doit être remplacée ici par  $\omega_0$ , et l'angle d'attaque  $\alpha$  par  $(\alpha - \beta_0)$ ;

3° que, d'autre part, on peut admettre sans trop d'erreur, que  $a$  varie proportionnellement à  $R$  et que, par conséquent

$$\boxed{r_1 - r_2 = e \times a = kR} \quad (12)$$

il viendra

$$\begin{aligned} P_1 &= k \frac{\delta}{g} \left[ \int_0^1 \omega_0^2 \sin(\alpha - \beta_0) \cos \beta_0 R dR \right. \\ &- 2 \int_0^1 \left( k_1 - k_2 \sin \frac{\alpha - \beta_0}{2} + k_3 \sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2} \right) \omega_0^2 \sin \beta_0 R dR \left. \right] \\ \mathcal{C}' &= k \frac{\delta \omega}{g} \left[ \int_0^1 \omega_0^2 \sin(\alpha - \beta_0) \sin \beta_0 R^2 dR \right. \\ &+ 2 \int_0^1 \left( k_1 - k_2 \sin \frac{\alpha - \beta_0}{2} + k_3 \sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2} \right) \omega_0^2 \cos \beta_0 R^2 dR \left. \right] \end{aligned}$$

REMARQUE. — Dans ces relations 0 et 1, sont mis pour  $R_0$  et  $R_1$ , rayons intérieurs et extérieurs limitant la pale. Pour obtenir les formules correspondant à l'hélice dont les sections des pales se présentent comme un plan mince, ou avec un profil symétrique, tel que celui de la fig. 5, il suffit de faire  $k_2 = 0$ , puisque nous avons vu que dans ce cas le rapport  $\frac{T'}{T}$  est donné par la formule IV.

Pour pouvoir faire les intégrations, il faut chercher à

exprimer  $\omega_0$ ,  $\sin(\alpha - \beta_0)$ ,  $\sin \frac{\alpha - \beta_0}{2}$ ,  $\sin \beta_0$ ,  $\cos \beta_0$  en fonction de  $R$ . Pour cela remarquons que

$$1^\circ \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{c}{u} = \frac{c}{\omega R}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{2\pi R}, \quad \omega_0^2 = c^2 + \omega^2 R^2;$$

$p$  désignant le pas de l'hélice, défini comme nous l'avons fait au chapitre I,  $\omega$  étant la vitesse angulaire ;

$$2^\circ \quad \sin(\alpha - \beta_0) \cos \beta_0 = \sin \alpha \cos^2 \beta_0 - \cos \alpha \sin \beta_0 \cos \beta_0$$

$$\sin(\alpha - \beta_0) \sin \beta_0 = \sin \alpha \sin \beta_0 \cos \beta_0 - \cos \alpha \sin^2 \beta_0$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta_0}{2} = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta_0) \quad (\text{approximativement})$$

$$\sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2} = \frac{1}{2} [1 - \cos(\alpha - \beta_0)] = \frac{1}{2} [1 - \cos \alpha \cos \beta_0 - \sin \alpha \sin \beta_0]$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{P}{2\pi R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{2\pi R}\right)^2}} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{2\pi R}\right)^2}}$$

$$\sin \beta_0 = \frac{\frac{c}{\omega R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}} \quad \cos \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}}$$

Nous aurons, toutes réductions faites, les deux formules

$$\begin{aligned} P_1 &= k \frac{\delta}{g} \omega^2 \left\{ \left( \frac{P}{2\pi} - \frac{c}{\omega} + k_3 \frac{c}{\omega} \right) \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \right. \\ &- (2k_1 + k_3) \frac{c}{\omega} \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR \\ &+ k_2 \left[ \frac{P}{2\pi} \frac{c}{\omega} - \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR \\ &\left. + k_3 \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \left( \frac{P}{2\pi} \right) \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR \right\} \quad (13) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{G}' = k \frac{\delta}{g} \omega^3 \left\{ \frac{c}{\omega} \left[ \frac{p}{2\pi} - \frac{c}{\omega} \right] - k_3 \frac{c}{\omega} \frac{p}{2\pi} \right\} \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \\ + (2k_1 + k_3) \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR \\ - k_2 \left[ \frac{p}{2\pi} - \frac{c}{\omega} \right] \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR \\ - k_3 \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \quad (14) \end{aligned}$$

## § 6. — Résolution des intégrales.

Résolvons séparément les intégrales ci-dessus :

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & - \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR; \\ \text{II.} \quad & - \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR; \quad \text{III.} \quad - \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR \\ \text{IV.} \quad & - \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR; \quad \text{V.} \quad - \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \\ \text{VI.} \quad & - \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR; \quad \text{VII.} \quad - \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR. \end{aligned}$$

Pour simplifier les transcriptions, nous écrirons :

$$R_0 = n R_1, \quad \frac{p}{2\pi R_1} = m, \quad \frac{c}{\omega R_1} = x$$

## Intégrale I.

$$\text{En posant} \quad R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 = t^2,$$

nous aurons :

$$R dR = t dt, \quad \int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR = \int t^{-1} \times t dt = t$$

D'où

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR = R_1 \left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

## Intégrale II.

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR = \int \left[ 1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} R dR.$$

Posons

$$1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} = t^2;$$

$$\text{il viendra} \quad dR = - \frac{R^3}{\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2} t dt$$

$$\text{et} \quad R^2 = \frac{\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2}{t^2 - 1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int \left[ 1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} R dR = \\ - \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2} = \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \int \frac{(t^2 - 1 - t^2) dt}{(t^2 - 1)^2} \\ = \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{dt}{t^2 - 1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{t - 1}{t + 1} \\ \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^2} = \int t \frac{t dt}{(t^2 - 1)^2} = - \frac{t}{2} (t^2 - 1)^{-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 1} \\ \left( \text{pour cette dernière, en intégrant par partie, et en} \right. \\ \left. \text{écrivait } u = t \quad d v = \frac{t dt}{(t^2 - 1)^2} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR = \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \left[ \frac{1}{4} l \frac{t-1}{t+1} + \frac{t}{2} (t^2-1)^{-1} \right]$$

et comme

$$\left[ \frac{t-1}{t+1} \right]_1 = \frac{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}+1}, \quad \left[ \frac{t-1}{t+1} \right]_0 = \frac{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}-n}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}+n}$$

$$\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \frac{t}{2} (t^2-1)^{-1} = \frac{t}{2} R^2$$

il viendra finalement

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR = \frac{1}{2} R_1^2 f_1(m)$$

où

$$f_1(m) = \frac{m^2}{2} l \frac{\left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}}-1 \right] \left[ (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}+n \right]}{\left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}}+1 \right] \left[ (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}-n \right]}$$

$$+ (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - n^2 (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

### Intégrale III.

En posant  $R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 = t^2$ , nous aurons :

$$R dR = t dt, \quad \int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR = \frac{1}{3} t^5 - \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 t$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR = R_1^3 f_2(m)$$

$$f_2(m) = \frac{1}{3} \left[ (1+m^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{3}{2}} \right] - m^2 \left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

### Intégrale IV.

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = \int \left[ 1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR$$

Posons

$$1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} = t^2;$$

il viendra

$$dR = - \frac{R^3}{\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2} t dt, \quad R^2 = \frac{\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2}{t^2-1},$$

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = - \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{dt}{(t^2-1)^3}$$

$$= \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{(t^2-1-t^2) dt}{(t^2-1)^3}$$

$$= \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} - \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^3}.$$

Or

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^3} = \frac{1}{2} \int t \frac{2t dt}{(t^2-1)^3} = - \frac{t}{4} (t^2-1)^{-2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t^2-1)^2}$$

en intégrant par partie, et en écrivant

$$u = t \quad dv = \frac{2t dt}{(t^2-1)^3}.$$

Donc

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \left[ \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} + \frac{t}{4} (t^2-1)^{-2} \right]$$

et comme nous avons trouvé, page 31, que

$$- \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 \frac{dt}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{2} R_1^2 f_1(m)$$

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = \frac{3}{8} R_1^4 \left\{ - m^2 f_1(m) + \right.$$

$$\left. \frac{2}{3} \left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - n^3 (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

## Intégrale V.

En posant  $R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = t^2$

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR = \frac{t^5}{5} - 2 \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \frac{t^3}{3} + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^4 t$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR = R_1^5 f_3(m)$$

où  $f_3(m)$  a pour valeur :

$$f_3(m) = \frac{1}{5} \left[ (1 + m^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{5}{2}} \right] - \frac{2}{3} m^2 \left[ (1 + m^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}} \right] + m^4 \left[ (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

## Intégrale VI.

Cette intégrale se résout directement, car elle est de

la forme  $\int x^m dx$

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR = \frac{1}{3} \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR = \frac{R_1^3}{3} \left[ (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \right]$$

## Intégrale VII.

En posant  $R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 = t^2$

il viendra

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^5 dR = \int t \left[ t^2 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right] t dt = \frac{t^5}{5} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{t^3}{3}$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^5 dR = R_1^5 \left\{ \frac{1}{5} \left[ (1 + x^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{5}{2}} \right] - \frac{x^2}{3} \left[ (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}$$

§ 7. — Expression de la poussée  $P_1$ , du travail absorbé  $\mathcal{C}'$  et du rendement  $\eta$ .

En introduisant les formules (13) et (14), les valeurs que nous venons de trouver pour les intégrales, nous aurons toutes réductions faites :

$$P_1 = k \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^4 \alpha_1 \quad \text{VI}$$

$$\mathcal{C}' = k \frac{\delta}{g} \omega^5 R_1^5 \beta_1 \quad \text{VII}$$

$\alpha_1$  et  $\beta_1$  étant des fonctions de  $m$  et de  $x$ , c'est-à-dire du rapport du pas à la circonférence du cercle balayé par l'hélice, et du rapport de la vitesse de propulsion à la vitesse périphérique.

Dans ces formules

$$\alpha_1 = m f_2(m) + \left[ (k_3 - 1) f_2(m) + \frac{1}{2} k_2 m f_1(m) \right] x - \left[ \frac{1}{2} k_2 f_1(m) - k_3 m b \right] x^2 - (2k_1 + k_3) \frac{x}{3} c_x \quad (15)$$

$$\beta_1 = -k_3 f_3(m) - \frac{3}{8} k_2 m \left[ \frac{2}{3} a - m^2 f_1(m) \right] - \left[ (k_3 - 1) m f_2(m) - \frac{3}{8} k_2 \left( \frac{2}{3} a - m^2 f_1(m) \right) \right] x - f_2(m) x^2 + (2k_1 + k_3) \left[ \frac{1}{5} d_x - \frac{x^2}{3} c_x \right] \quad (16)$$

les lettres  $a, b, c, d, c_x$  et  $d_x$  ayant pour valeur :

$$\begin{aligned} a &= (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} & a_1 &= (n^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \\ b &= (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} = a - a_1 \\ c &= (1 + m^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}} \\ d &= (1 + m^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{5}{2}} \\ c_x &= (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \\ d_x &= (1 + x^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

D'autre part, les fonctions  $f_1(m)$ ,  $f_2(m)$  et  $f_3(m)$  peuvent s'écrire avec les notations ci-dessus

$$f_1(m) = \frac{m^2}{2} l \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a_1+n}{a_1-n} + (a-n^2 a_1)$$

$$f_2(m) = \frac{1}{3} c - m^2 b$$

$$f_3(m) = \frac{1}{5} d - \frac{2}{3} m^2 c + m^4 b$$

Par définition le rendement de l'hélice est égal à

$$\eta = \frac{P_1 \times c}{\mathcal{C}'} = \frac{P_1 \times x \omega R_1}{\mathcal{C}'}$$

puisque

$$x = \frac{c}{\omega R_1}.$$

En remplaçant  $P_1$  et  $\mathcal{C}'$  par les valeurs VI et VII, il viendra :

$$\eta = \frac{\alpha_1 x}{\beta_1} \quad \text{VIII}$$

#### § 8. — Conclusions.

Les formules VI et VII montrent que les deux relations proposées par tous les auteurs

$$P_1 = \alpha N^2 D^4 \quad (17)$$

$$\mathcal{C}' = \beta N^5 D^5 \quad (18)$$

pour les hélices au point fixe, ne sont que des cas particuliers des formules générales se rapportant aux hélices en translation suivant l'axe.

De la formule VIII il résulte que toutes les hélices géométriquement semblables ont le même rendement, pour la même valeur du rapport de la vitesse propulsion à la vitesse périphérique.

REMARQUE I. — N désignant le nombre de tours par seconde, nous aurons entre  $\alpha$  et  $\alpha_1$ ,  $\beta$  et  $\beta_1$  les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{1}{16} k \frac{\delta}{g} (2\pi)^2 \alpha_1 \quad (19)$$

$$\beta = \frac{1}{32} k \frac{\delta}{g} (2\pi)^3 \beta_1 \quad (20)$$

Si N désignait le nombre de tours par minute, il faudrait remplacer  $2\pi$  par  $\frac{2\pi}{60}$ .

REMARQUE II. — Pour le fonctionnement au point fixe, les valeurs  $\alpha_1$  fournies par la relation (15) s'écartent d'autant plus des valeurs théoriques réelles, que le pas  $p$  est plus grand. Cela résulte de ce que nous avons adopté pour calculer  $P$ , la formule II au lieu de la formule II', ainsi que nous l'avons fait remarquer au début du paragraphe 5. Nous avons, au paragraphe 10, calculé, en partant de la formule II', la valeur théorique réelle de  $\alpha_1$ , pour le cas particulier du fonctionnement au point fixe, c'est-à-dire pour  $x=0$ . Dans le tableau III, ci-après, nous avons consigné les valeurs de  $\alpha_1$  calculées au moyen de la nouvelle formule, pour différentes valeurs de  $m$ . Il y aura donc lieu, lorsqu'on étudiera le fonctionnement des hélices au point fixe, d'adopter pour  $\alpha_1$ , les valeurs du tableau III

$$\alpha_1 = m f_4(m),$$

au lieu de celles données par la formule (15)

$$\alpha_1 = m f_2(m).$$

REMARQUE III. — Entre le rapport  $\frac{P}{D}$  que les auteurs ont ordinairement désigné par  $m$  ou par  $a$ , et la valeur  $\frac{P}{2\pi R_1}$  que nous avons représentée également par  $m$ , il existe la relation

$$\frac{P}{D} = \frac{P}{2\pi R_1} \times \pi = m \times \pi. \quad (21)$$

TABLEAU III.

$x$ ou $m$	$x^2$ ou $m^2$	$m b$	$f_1(m)$	$f_2(m)$	$m f_3(m)$	$f_3(m)$	$f_4(m)$	$m f_4(m)$	$\frac{2}{3} a - m^2 f_1(m)$	$\frac{1}{3} x c_x$	$\frac{1}{5} d_x - \frac{x^2}{3} c_x$
0,000	0,000000	0,000000	1,000	0,333330	0,000000	0,200000	0,3333	0,000000	0,6666	0,000000	0,200000
0,050	0,002500	0,047562	0,992	0,332160	0,016608	0,199560	0,3310	0,016550	0,6650	0,016727	0,200390
0,075	0,005625	0,069585	0,985	0,330770	0,024807	0,199060	0,3283	0,024620	0,6630	0,025199	0,200920
0,100	0,010000	0,090500	0,982	0,328960	0,032896	0,198370	0,3248	0,032480	0,6602	0,038801	0,201656
0,125	0,015625	0,110260	0,963	0,327080	0,040885	0,197450	0,3204	0,040050	0,6563	0,042607	0,202360
0,150	0,022500	0,129180	0,953	0,324140	0,048621	0,196440	0,3157	0,047355	0,6525	0,051528	0,203700
0,175	0,030625	0,147085	0,940	0,311240	0,056213	0,195190	0,3103	0,054302	0,6481	0,060719	0,205030
0,200	0,040000	0,163960	0,928	0,318060	0,063612	0,193784	0,3043	0,060860	0,6428	0,070170	0,206506
0,225	0,050625	0,180000	0,914	0,314670	0,070800	0,192260	0,2981	0,067032	0,6368	0,079913	0,208190
0,250	0,062500	0,195200	0,900	0,311060	0,077765	0,190820	0,2918	0,072825	0,6309	0,089965	0,210060
0,275	0,075625	0,209570	0,887	0,307290	0,084504	0,188850	0,2848	0,078320	0,6244	0,100353	0,212080
0,300	0,090000	0,223200	0,871	0,303370	0,091011	0,186960	0,2779	0,083370	0,6176	0,111099	0,214260
0,325	0,105625	0,236110	0,857	0,299340	0,097285	0,185000	0,2707	0,087970	0,6106	0,122292	0,216620
0,350	0,122500	0,248320	0,842	0,295220	0,103327	0,182960	0,2640	0,092400	0,6031	0,133745	0,219180
0,375	0,140625	0,259870	0,827	0,291030	0,109136	0,180830	0,2570	0,096375	0,5957	0,145680	0,221780
0,400	0,160000	0,270800	0,814	0,286800	0,114720	0,178690	0,2490	0,099600	0,5880	0,158048	0,224580
0,450	0,202500	0,290970	0,785	0,278240	0,125208	0,174230	0,2355	0,105970	0,5725	0,184126	0,230580
0,500	0,250000	0,309000	0,758	0,268680	0,134840	0,169670	0,2221	0,111050	0,5555	0,212090	0,237100
0,550	0,3025	0,325210	0,731	0,261180	0,143649	0,165050	0,2084	0,114620	0,5401	0,242022	0,244060
0,600	0,3600	0,339720	0,705	0,253840	0,152304	0,160410	0,1964	0,117840	0,5237	0,274002	0,251430
0,700	0,4900	0,364400	0,656	0,236780	0,164746	0,151320	0,1732	0,121240	0,4924	0,344344	0,267340
0,800	0,6400	0,384000	0,609	0,222140	0,177712	0,142400	0,1525	0,122000	0,4641	0,423472	0,284560
0,900	0,8100	0,400800	0,552	0,207930	0,187137	0,134340	0,1342	0,120780	0,4498	0,511830	0,302760
1,000	1,0000	0,414200	0,533	0,195270	0,195270	0,126520	0,1193	0,119300	0,4098	0,609470	0,321790

§ 9. — Courbes de rendement. - Angle d'attaque le plus favorable.  
Influence du profil des pales.

Nous supposons dans ce qui va suivre, que le rayon intérieur  $R_0$  limitant la pale est nul, ce qui est sensiblement le cas pour les hélices en bois; nous examinons plus loin l'influence du rapport  $n = \frac{R_0}{R_1}$  sur le rendement de l'hélice.

Pour simplifier les calculs, nous avons dressé le tableau III des valeurs de

$$f_1(m), f_2(m), f_3(m), \text{ etc.},$$

pour les valeurs de  $m$  comprises entre 0 et 1, ainsi que les valeurs de

$$\frac{1}{3} x c_x \quad \text{et de} \quad \left( \frac{1}{5} d_x - \frac{x^2}{3} c_x \right)$$

pour les valeurs de  $x$  comprises également entre 0 et 1,  $n$  étant supposé nul.

A. — Profil droit.

Déterminons d'abord les courbes de rendement correspondant à un profil assimilable à un plan mince ou à un fuseau symétrique comme celui de la fig. 5.

Nous avons vu que pour ce cas, les coefficients  $k_2$  et  $k_3$  paraissent avoir, pour valeurs minima,

$$k_1 = 0,003, \quad k_3 = 1,5,$$

$k_2$  étant nul.

Nous avons tracé fig. 17 (Pl. 1) les courbes de rendement en fonction de  $x = \frac{c}{\omega R_1}$ , pour  $m$  égal à

$$0,1, \quad 0,2, \quad 0,3, \quad 0,4, \quad 0,5,$$

$k_1$  et  $k_3$  ayant les valeurs ci-dessus.

On voit que la courbe enveloppe de toutes les courbes de rendement, passe par un maximum, et que ce maximum maximorum ne dépasse pas 0,74.

Fig. 18, nous avons tracé, en fonction de  $m$ , la courbe des valeurs du rendement maximum, et en pointillés, la courbe des valeurs de

$$(m - x_m),$$

$x_m$  désignant la valeur de  $x$  correspondant au rendement maximum. Nous désignerons par la suite cette quantité sous le nom de recul relatif.

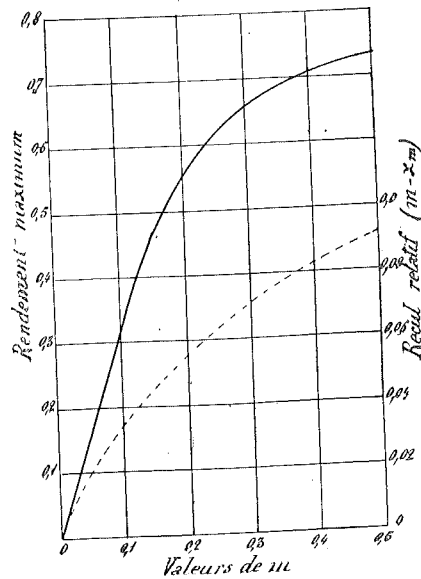


Fig. 18

Calculons les valeurs de l'angle d'attaque  $(\alpha - \beta_0)$  à l'extrémité de l'aile, qui correspondent au rendement maximum pour les différentes valeurs de  $m$ ; remarquons pour cela que

$$\operatorname{tg} \alpha = m, \quad \operatorname{tg} \beta_0 = x,$$

et que par conséquent

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{m - x}{1 + m x}.$$

Pour

$$\begin{aligned} m = 0,1 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,035}{1 + 0,1 \times 0,065} = 0,0348, & (\alpha - \beta_0) = 2^{\circ} \\ m = 0,2 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,055}{1 + 0,2 \times 0,145} = 0,0534, & (\alpha - \beta_0) = 3^{\circ}03' \\ m = 0,3 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,071}{1 + 0,3 \times 0,229} = 0,0663, & (\alpha - \beta_0) = 3^{\circ}48' \\ m = 0,4 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,083}{1 + 0,4 \times 0,317} = 0,0737, & (\alpha - \beta_0) = 4^{\circ}13' \\ m = 0,5 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,091}{1 + 0,5 \times 0,409} = 0,0755, & (\alpha - \beta_0) = 4^{\circ}19' \end{aligned}$$

REMARQUE I. — Contrairement à ce que l'on croit d'habitude, la poussée  $P_1$  et par conséquent le rendement deviennent nuls pour une valeur de  $x$  inférieure à  $m$ .

La différence entre les deux valeurs est d'autant plus grande que  $p$  est plus grand; elle est d'ailleurs toujours faible relativement à  $m$ .

Cette différence s'explique par le fait que la composante axiale  $s't'$  de la traînée (fig. 16) peut faire équilibre à un moment donné, à la composante axiale  $ot'$  de la poussée.

REMARQUE II. — Les valeurs calculées ci-dessus pour l'angle d'attaque  $(\alpha - \beta_0)$ , correspondent sensiblement aux valeurs déduites des expériences du capitaine Dorand sur les hélices en translation suivant l'axe. Elles sont par contre très différentes de celles que M. Drzewiecki, avait déduites d'une théorie qui fait autorité, et qui est ordinairement considérée, comme la plus complète. Le chiffre de  $1^{\circ}50'$  proposé par lui comme l'angle d'attaque le plus favorable et qui paraissait peu vraisemblable, est aujourd'hui reconnu erroné.

REMARQUE III. — Nous avons vu page 18, que pour une valeur  $\frac{l}{a}$ , rapport de l'envergure à la longueur  $a$ , voisine de 6, les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  prenaient des valeurs sensiblement supérieures à celles adoptées ci-dessus.

Le rapport  $\frac{l}{a}$  dans une pale d'hélice est assez mal défini puisque la largeur  $a$  varie avec le rayon  $R$ .

Dans le cas d'une pale tracée comme il est indiqué fig. 2, on pourrait prendre pour  $l$  la valeur  $(R_1 - 0,40 R_1)$ , et pour  $a$ , celle qui correspond à  $R = \frac{2}{3}R_1$ . On trouverait ainsi

$$\frac{l}{a} = \frac{0,6 R_1}{0,28 R_1} = 2,14.$$

Ce chiffre pourrait être adopté également pour le tracé de la fig. 1, car la partie centrale de l'hélice ne joue qu'un rôle peu important dans le fonctionnement de celle-ci.

Lorsque la largeur  $a$  de la pale diminue, le rapport  $\frac{l}{a}$  croît et par conséquent les valeurs de  $k_1$  et  $k_3$  augmentent. Il ne saurait être question de déterminer les valeurs de ces coefficients en fonction de  $\frac{l}{a}$ , sans faire des expériences sur une série d'hélices construites de la même manière, et où l'on ferait varier la largeur  $a$  ou le rapport  $\frac{a}{R}$ . Il nous suffira ici de faire observer que le rendement diminue avec la largeur  $a$ . Nous montrerons plus loin qu'il y a une valeur maximum de  $\frac{a}{R}$  à partir de laquelle le rendement tend à diminuer, par conséquent qu'il y a une valeur de  $\frac{a}{R}$  qui procure le maximum de rendement pour un profil donné.

REMARQUE IV. — Si nous faisons dans les formules  $k_1 = 0$ ,  $k_3 = 1$ , nous obtiendrions la valeur du rendement correspondant au cas limite de l'hélice fonctionnant

sans perte par frottement ou par choc. Les formules montrent que, dans cette hypothèse, le rendement est nul pour  $x = 0$  et égal à l'unité pour  $x = m$ , quelle que soit la valeur de  $m$ .

Si nous supposons que les seules pertes proviennent du frottement de l'air sur les pales, et des chocs au bord d'attaque, et si nous admettons que ces pertes soient proportionnelles au carré de la vitesse, la valeur de la traînée réelle  $T'$  qui a servi à calculer  $\zeta'$  et le rendement  $\eta$ , sera donnée par la relation

$$T' = T + Kc^2,$$

et par conséquent  $\frac{T'}{T}$  sera égal à

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{K}{T} c^2.$$

Or, nous pouvons toujours poser

$$K = 2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) k_1.$$

Donc, en remplaçant  $T$  par sa valeur tirée de la formule III

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{k_1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

On voit que pour obtenir le rendement dans les hypothèses ci-dessus, il suffit de faire dans les formules VI, VII et VIII

$$k_3 = 1.$$

Nous avons tracé fig. 19 (Pl. 1) les courbes de rendement en fonction de  $x$ , pour

$$k_1 = 0,003 \quad k_3 = 1;$$

fig. 20 nous avons tracé, en fonction de  $m$ , la courbe des valeurs du rendement maximum, et en pointillé la courbe des valeurs du recul relatif correspondant.



Le maximum maximorum atteint cette fois 0,80 environ; pour  $m = 0,3$  le rendement maximum passe de 0,65 à 0,70.

Les valeurs du recul relatif sont un peu plus grandes.

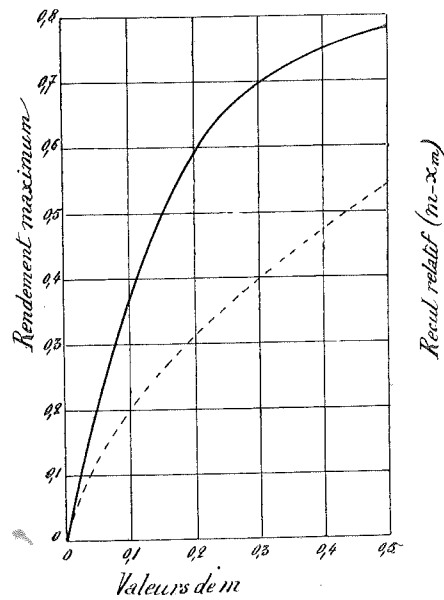


Fig. 20

### B. - Profil courbe.

Nous avons trouvé page 23, pour deux plaques courbes, expérimentées l'une par M. Rateau l'autre par M. Eiffel, les valeurs des coefficients

$$k_1 = 0,010 \quad k_2 = 0,140 \quad k_3 = 1,400$$

Adoptons ces coefficients pour le calcul du rendement des hélices à profil courbe.

Nous avons tracé fig. 21 (Pl.1) les courbes correspondant à  $m$  égale

$$0,1, \quad 0,2, \quad 0,3, \quad 0,4, \quad 0,5,$$

en fonction de  $x$ .

Fig. 22, nous avons tracé en trait plein, en fonction de  $m$ , la courbe des valeurs du rendement maximum, en trait pointillé la courbe du recul relatif correspondant.

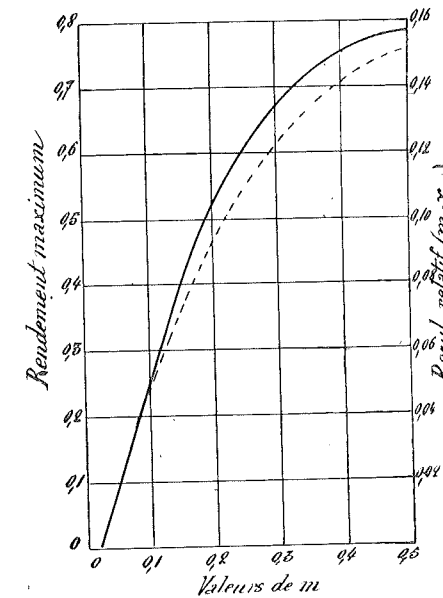


Fig. 22

Nous voyons en comparant ces résultats à ceux trouvés par le profil droit :

1) que le recul relatif correspondant au maximum est beaucoup plus grand; (1,7 environ les valeurs du diagramme de la fig. 17.)

2) que pour une même valeur de  $x$ , le rendement est plus élevé, tout au moins à partir de  $x = 0,15$  environ;

3) que le rendement maximum est plus élevé à partir  $m = 0,25$ ;

4) que le maximum maximorum est d'environ 0,79 et correspond probablement à  $x = 0,6$ .

REMARQUE I. Il est important de remarquer que dans le cas des profils courbes, le pas réel  $p$  à introduire dans la formule qui détermine  $m$

$$m = \frac{p}{2\pi R_1}$$

ne peut être déterminé en mesurant le pas de la corde sous-tendant le profil. En effet nous avons vu, dans les considérations de la page 21, que la poussée  $P$  ne devenait nulle, que pour un angle  $i = -\gamma$ .

Le pas réel serait donc donné par l'inclinaison d'une droite faisant un angle positif  $\gamma$  avec la corde.

Cet angle pourrait être déterminé très approximativement en faisant les expériences nécessaires pour déterminer le point où la courbe de poussée coupe l'axe des  $x$ ; la valeur de  $x$  correspondante est en effet sensiblement égale à  $m$ .

REMARQUE II. — Appelons  $p'$  le pas de la corde, et  $p$  le pas réel.

En posant

$$\operatorname{tg} i = \frac{p'}{2\pi R_1}$$

nous aurons :

$$m = \operatorname{tg}(i + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} i + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} i \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{p'}{2\pi R_1} + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \frac{p'}{2\pi R_1} \operatorname{tg} \gamma};$$

et, en appelant  $p''$  la valeur définie par la relation

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{p''}{2\pi R_1} \quad (22)$$

$$m = \frac{p}{2\pi R_1} = \frac{\frac{p'}{2\pi R_1} + \frac{p''}{2\pi R_1}}{1 - \frac{p'}{2\pi R_1} \frac{p''}{2\pi R_1}} \quad (23)$$

ou approximativement

$$m = \frac{p'}{2\pi R_1} + \frac{p''}{2\pi R_1} = \frac{p'}{2\pi R_1} + \operatorname{tg} \gamma.$$

Pour les nombreux profils essayés par M. Rateau et M. Eiffel,  $\gamma$  varie entre  $4^\circ$  et  $8^\circ$ . Si à défaut de renseignements plus précis, nous adoptons  $\gamma = 6^\circ$ , nous voyons que

$$m = \frac{p'}{2\pi R_1} + 0,1051.$$

Ainsi, pour un rapport

$$\frac{p'}{2\pi R_1} = 0,2 \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{2R_1} = \frac{p'}{D} = 0,628,$$

le rapport  $m$  à introduire dans les formules est

$$m = 0,3051 \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{2R_1} = \frac{p'}{D} = 0,957.$$

Comme il est fort probable que le pas indiqué par les expérimentateurs, est le pas apparent  $p'$  mesuré par l'inclinaison de la corde, on voit qu'il faudrait changer l'axe des abscisses des diagrammes fig. 21 et fig. 22 pour pouvoir comparer les résultats du calcul à ceux de l'expérience.

Avec la valeur  $\gamma = 6^\circ$ , le rendement maximum serait de

$$\eta = 0,70 \quad \text{pour} \quad \frac{p'}{2\pi R_1} = 0,2 \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{D} = 0,628.$$

$$\eta = 0,75 \quad \text{pour} \quad \frac{p'}{2\pi R_1} = 0,3 \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{D} = 0,942.$$

$$\eta = 0,785 \quad \text{pour} \quad \frac{p'}{2\pi R_1} = 0,4 \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{D} = 1,256.$$

cette dernière valeur correspondant à peu près au maximum maximum. Nous reviendrons plus loin sur ces résultats.

REMARQUE III. — Lorsqu'on construit une hélice de telle manière que le pas  $p'$  déterminé par la corde soit constant, on n'obtient pas une hélice à pas réel constant.

En effet, l'angle  $i$  de la corde à une distance  $R$  quelconque de l'axe est donné par l'équation

$$\operatorname{tg} i = \frac{p'}{2\pi R}$$

Si nous supposons que les différentes sections d'une pale soit telles que l'on puisse considérer  $\gamma$  comme constant et égal à  $6^\circ$ , nous aurons, d'après la relation (23),

$$\frac{p}{2\pi R} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (i + \gamma) = \frac{\frac{p'}{2\pi R} + \frac{p''}{2\pi R_1}}{1 - \frac{p'}{2\pi R} \frac{p''}{2\pi R_1}}$$

Pour  $\frac{p'}{2\pi R_1} = 0,3$  et  $R = 0,3 R_1$ , il vient :

$$\frac{p}{2\pi R} = \frac{1 + 0,1051}{1 - 0,1051} = \frac{1,1051}{0,8949} = 1,235;$$

d'où  $p = 1,235 \times 2\pi \times 0,3 R_1 = 2,33 R_1$ ,

alors que pour  $R = R_1$

$$p = \frac{0,3 + 0,1051}{1 - 0,3 \times 0,1051} \times 2\pi R_1 = 2,63 R_1.$$

On voit que  $p$  diminue avec  $R$ , lorsque  $p'$  est constant, mais que cette diminution n'est pas relativement très grande pour les valeurs de  $\frac{p'}{2\pi R_1}$  supérieures à 0,2.

REMARQUE IV. — Si l'on calcule les angles d'attaque correspondant au maximum, on trouve pour

$m = 0,1$	$(\alpha - \beta_0) = 2^\circ 44'$ ,
$m = 0,2$	$(\alpha - \beta_0) = 5^\circ 15'$ ,
$m = 0,3$	$(\alpha - \beta_0) = 6^\circ 36'$ ,
$m = 0,4$	$(\alpha - \beta_0) = 7^\circ 12'$ ,
$m = 0,5$	$(\alpha - \beta_0) = 7^\circ 19'$ .

Ces angles sont beaucoup plus grands que ceux trouvés pour le profil droit.

Si nous évaluons d'autre part, l'angle d'attaque rapporté à la corde ( $i - \beta_0$ ), comme le font la plupart des auteurs, nous trouvons, en prenant  $\gamma$  égal à la valeur minimum  $4^\circ$ , pour

$m = 0,1$	$(i - \beta_0) = -1^\circ 16'$ ,
$m = 0,2$	$(i - \beta_0) = +1^\circ 15'$ ,
$m = 0,3$	$(i - \beta_0) = +2^\circ 36'$ ,
$m = 0,4$	$(i - \beta_0) = +3^\circ 12'$ ,
$m = 0,5$	$(i - \beta_0) = +3^\circ 19'$ .

Si  $\gamma$  avait été pris égal à  $8^\circ$ , nous aurions obtenu des valeurs négatives pour tous les angles ( $i - \beta_0$ ).

C'est parce qu'on confondait l'angle ( $i - \beta_0$ ) avec l'angle d'attaque ( $\alpha - \beta_0$ ) que l'on a obtenu assez souvent, dans les expériences sur des hélices marines, des *reculs négatifs* : les navires propulsés par celles-ci semblaient se déplacer, par tour d'hélice, d'une quantité plus grande que le pas. Cette constatation qui jetait quelque trouble dans les idées, était due à ce que l'on prenait, comme nous venons de le faire voir, pour *pas* de l'hélice, le pas apparent donné par la corde.

#### CONCLUSIONS.

Il résulte des diagrammes et des considérations qui précèdent :

1° que la valeur de  $m$  doit être choisie dans les calculs d'hélices, autant que possible entre 0,3 et 0,5, ce qui revient à dire que l'on doit avoir :

$$0,9 < \frac{p}{D} < 1,5;$$

2° que la valeur de  $x$ , pour une valeur donnée de  $m$ , doit être inférieure à la valeur  $x_m$ , le rendement croissant peu avec  $x$  aux environs du maximum ;

3° qu'il y a lieu de préférer un profil courbe à un profil droit, tout au moins lorsqu'on peut adopter pour  $m$  une valeur supérieure à 0,25 ;

4° que pour un profil courbe, le pas est donné par la relation ;

$$m = \frac{p}{2 \pi R_1} = \frac{p'}{2 \pi R_1} + \operatorname{tg} \gamma$$

où  $\gamma$  varie entre 4° et 8°, suivant la forme du profil, et où  $p'$  représente le pas de la corde.

La valeur de  $x$  qu'il convient d'adopter pour une valeur donnée de  $m$ , peut être fournie par une équation de la forme :

$$\boxed{x = am - b} \quad (24)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes qui varient avec le profil et avec les valeurs des coefficients,  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$ .

Avec les valeurs des coefficients que nous avons adoptées,

$$a = 0,875 \quad b = 0,052$$

pour le profil droit ;

$$a = 0,750 \quad b = 0,075$$

pour le profil courbe.

REMARQUE. — Il serait nécessaire pour formuler des conclusions définitives, de déterminer les coefficients  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , par des expériences sur des surfaces, non seulement profilées à la manière de celles adoptées pour les hélices, mais construites avec la même matière, polies de la même façon. Il serait intéressant alors de se rendre compte dans quelle mesure les courbes déduites du calcul au moyen des formules proposées, correspondent aux courbes expérimentales.

§ 10. Calcul de  $k$ . — Influence du nombre d'ailes et du rapport  $\frac{a}{R}$  sur les caractéristiques d'une hélice.

Formule VI'. — Avant d'entamer ce paragraphe, il convient de rechercher la valeur réelle de  $\alpha_1$ , pour le fonctionnement au point fixe, en partant de la formule II' (voir § 5, page 27).

Remarquons que, pour une hélice fonctionnant au point fixe,  $\beta_0 = 0$ , et par conséquent :

$$P_1 = P \quad T'_1 = T'$$

d'après les formules (10) et (12).

Remarquons également que la valeur de  $T'_1$  ne change pas, que l'on prenne pour expression de  $P$  celle fournie par la formule II, ou par la formule II'.

Si nous remplaçons  $P$  par la valeur II', nous aurons, avec les notations adoptées au § 5 :

$$P_1 = k \frac{\delta}{g} \int_0^1 w_0^2 \sin \alpha \cos \alpha R dR :$$

En faisant  $c = 0$  dans les formules rappelées au § 5, et en substituant à  $w_0$ ,  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$ , les valeurs ainsi obtenues, il viendra :

$$P_1 = k \frac{\delta}{g} \omega^2 \int_0^1 \frac{\frac{p}{2 \pi R}}{1 + \left(\frac{p}{2 \pi R}\right)^2} R^3 dR = k \frac{\delta}{g} \omega^2 \left(\frac{p}{2 \pi}\right) \int_0^1 \frac{R^4 dR}{R^2 + \left(\frac{p}{2 \pi}\right)^2}$$

Réolvons l'intégrale :

$$\int \frac{R^4 dR}{R^2 + \left(\frac{p}{2R}\right)^2} = \int \frac{\left[R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\right] R^2 - R^2 \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}{R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2} dR =$$

$$\int R^2 dR - \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \int \frac{R^2 dR}{R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}$$

$$= \int R^2 dR - \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \int dR + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^4 \int \frac{dR}{R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{R^3}{3} - \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 R + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^5 \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{R^3}{3} - \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 R + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \operatorname{arc tg} z$$

$z$  étant mis pour  $\frac{R}{\frac{p}{2\pi}}$

Nous aurons donc

$$\int_0^1 \frac{R^4 dR}{R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2} = \frac{R^3}{3} (1 - n^3) - \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 R (1 - n) +$$

$$\left(\frac{p}{2\pi}\right)^5 \operatorname{arc tg} \frac{m(1-n)}{m^2+n}$$

puisque

$$\left[ \operatorname{arc tg} z \right]_0^1 = \operatorname{arc tg} \frac{1}{\frac{p}{2\pi R_1}} - \operatorname{arc tg} \frac{1}{\frac{p}{2\pi R_0}}$$

$$= \operatorname{arc tg} \frac{\frac{1}{\frac{p}{2\pi R_1}} - \frac{1}{\frac{p}{2\pi R_0}}}{1 + \frac{1}{\frac{p}{2\pi R_1} \times \frac{p}{2\pi R_0}}} = \operatorname{arc tg} \frac{\frac{1}{m} - \frac{n}{m}}{1 + \frac{n}{m^2}}$$

La formule VI' donnant la vraie valeur de  $P_1$ , et de  $\alpha_1$ , pour le fonctionnement au point fixe, est donc la suivante

$$P_1 = k \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^4 \alpha_1 \quad (\text{VI})$$

où

$$\alpha_1 = m \left[ \frac{1}{3} (1 - n^3) - m^2 (1 - n) + m^5 \operatorname{arc tg} \frac{m(1-n)}{m^2+n} \right] \quad (25)$$

Nous avons donné, dans le tableau III, les valeurs de

$$f_4(m) = \frac{1}{3} (1 - n^3) - m^2 (1 - n) + m^5 \operatorname{arc tg} \frac{m(1-n)}{m^2+n}$$

pour différentes valeurs de  $m$ , en supposant  $n = 0$ .

Calcul de  $k$ . — Dans les formules VI, VI' et VII,  $k$  représente le rapport

$$\frac{r_1 - r_2}{R}$$

puisque nous avons posé

$$r_1 - r_2 = k R.$$

De plus, pour l'intégration, nous avons supposé  $k = c^{\text{te}}$  ce qui revient à dire, puisque nous avons représenté le rapport  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  par  $e$ , que

$$\frac{a \times e}{R} = k = c^{\text{te}} \quad (26)$$

Il est donc nécessaire pour que les formules soient rigoureusement applicables, de faire varier le produit  $a \times e$  proportionnellement à la distance  $R$  de la section considérée à l'axe de l'hélice. Comme dans les hélices aériennes le diamètre du moyeu est toujours faible, cette condition n'est jamais réalisée : on serait conduit à donner une trop faible largeur à la section de raccord avec le

moyeu qui est la section dangereuse. Cependant dans tous les tracés d'aile, la valeur diminue sensiblement vers le moyeu, et comme la partie centrale ne fournit qu'une faible fraction de la poussée, ainsi que nous le ferons comprendre au § 12, on peut dire que les formules VI, VI' et VII sont applicables avec une approximation suffisante, aux hélices telles qu'on les construit habituellement.

Nous rechercherons au § 13 comment on doit faire varier logiquement  $a$  en fonction de  $R$ .

Pour le moment, posons-nous la question de savoir si la poussée  $P$  et le travail absorbé  $\mathcal{C}'$  croissent indéfiniment avec le rapport :

$$\frac{a \times e}{R} = k.$$

*A priori*, on comprend qu'il y ait un maximum de poussée, et que le rendement donné par la formule VIII ne soit pas absolument indépendant de  $k$ , par conséquent de  $\frac{a}{R}$  et du nombre de pales,  $n$  ; il s'agit de montrer qu'il en est bien ainsi, contrairement à ce que l'on pourrait conclure d'un examen un peu hâtif de la formule VIII.

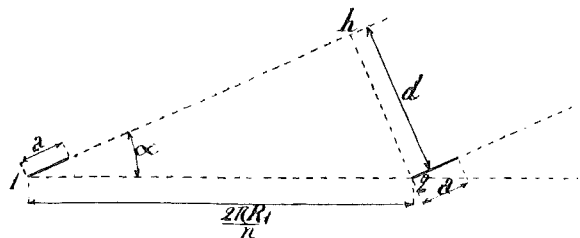


Fig. 23

Supposons développé le cylindre fictif de même diamètre que l'hélice, sur lequel seraient tracées les courbes hélicoïdales, dont les extrémités des ailes sont des portions d'une certaine longueur  $a$  (fig. 23). La distance entre les origines de deux courbes voisines sera égale à  $\frac{2\pi R_1}{n}$ ,

$n$  étant le nombre d'ailes. La distance  $d$  entre deux courbes hélicoïdales consécutives aura donc pour valeur :

$$d = \frac{2\pi R_1}{n} \sin \alpha,$$

ou, en fonction du pas  $p$  :

$$d = \frac{2\pi R_1}{n} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2\pi R_1}{n} \frac{\frac{p}{2\pi R_1}}{1 + \left(\frac{p}{2 R_1}\right)^2} = \frac{2\pi R_1}{n} \frac{m}{1 + m^2}$$

Il est évident que l'action d'une pale ne sera pas diminuée par l'action de la pale voisine, si l'épaisseur ( $r_1 - r_2$ ) du flux dévié par l'une est plus faible que la distance  $d$ .

Or, étant donné la relation

$$r_1 - r_2 = k R_1,$$

cela revient à dire que  $k$  doit être plus petit que le rapport

$\frac{d}{R_1}$ , donc que

$$k = \frac{a \times e}{R_1} = \frac{1}{k'} \frac{2\pi}{n} \frac{m}{1 + m^2} \quad \text{IX}$$

où  $k'$  est un coefficient plus grand que l'unité.

Ainsi si l'on donne à  $\frac{a}{R_1}$  une valeur telle que  $k$  dépasse celle donnée par la formule IX où l'on a fait  $k' = 1$ , c'est-à-dire

$$\frac{a}{R_1} = \frac{1}{e} \frac{2\pi}{n} \frac{m}{1 + m^2} \quad (27)$$

la poussée ne croît plus proportionnellement au rapport  $\frac{a}{R_1}$ , et il devient impossible de déterminer sans le secours de l'expérience, la valeur de  $k$ .

Introduisons la valeur IX dans la formule VI; la poussée  $P_1$  pour une hélice à  $n$  pales aura pour expression

$$P_1 = \frac{2\pi}{k'} \frac{m}{1+m^2} \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^3 \alpha \quad X$$

$k'$  décroissant proportionnellement à  $\frac{a}{R_1}$  jusqu'à une valeur voisine de l'unité, puis décroissant jusqu'à un minimum suivant une certaine loi à déterminer par l'expérience, pour les valeurs  $\frac{a}{R_1}$  supérieures à celles données par la relation (27).

Il est évident qu'il y a un minimum à la valeur de  $k'$ , ou si l'on veut un maximum à la valeur de  $P_1$ ; en effet, à partir d'un certain rapport  $\frac{a}{R_1}$ , les filets fluides qui limitent le flux déplacé par l'une des pales, sont déviés également par la pale suivante, de telle manière que toute la masse subit une déviation uniforme égale à l'angle d'attaque; à partir de ce moment, toute augmentation de  $\frac{a}{R_1}$  ne saurait plus produire d'accroissement de la poussée  $P_1$ .

Au point de vue du poids de l'hélice, on comprend qu'il convient de ne pas prendre pour  $\frac{a}{R_1} \times n$  une valeur supérieure à celle que donne la relation IX où l'on a fait  $k' = 1$ , puisqu'à partir de cette limite tout accroissement de  $\frac{a}{R_1}$ , ou du nombre de pales, n'amène pas une augmentation proportionnelle de la poussée.

Quelle est la valeur de  $\frac{a}{R_1}$  qui correspond pour une hélice à  $n$  pales, au rendement maximum? C'est là une

question à laquelle l'expérience peut seule répondre. Cependant il est facile de faire comprendre que le rendement maximum existe, et qu'il n'est pas éloigné de celui qui correspond à la valeur  $\frac{a}{R_1}$  donnée par la relation (27).

En effet, nous avons vu, remarque III, § 9, page 47, que le rendement augmente avec le rapport  $\frac{a}{R}$ ; or, cet accroissement ne se produit pas indéfiniment car, outre qu'il existe un rapport  $\frac{l}{a}$  de l'envergure à la largeur, plus favorable que tous les autres, au point de vue des coefficients  $k_1, k_2, k_3$ , il arrive un moment où  $P_1$  ne croît plus proportionnellement à  $\frac{a}{R_1}$  et où, par conséquent, le travail  $\mathcal{E}'$  tend à augmenter plus rapidement que le travail utile.

Calculons les valeurs  $\frac{a}{R_1} \times n$  données par la relation (27); pour les valeurs de  $m$

$$0,1, \quad 0,2, \quad 0,3, \quad 0,4, \quad 0,5.$$

D'après le diagramme fig. 11,  $e$  varie entre 1,4 et 2,6, suivant la valeur du rapport  $\frac{l}{a}$ , pour les angles d'attaque de 4 à 8°, voisins par conséquent de ceux qui correspondent au rendement maximum des hélices;  $e$  dépend donc, dans une certaine mesure de  $\frac{a}{R_1}$ . A défaut de renseignement plus précis pour permettre de déterminer la relation qui existe entre  $e$  et  $\frac{a}{R_1}$ , adoptons pour  $e$  une valeur constante, égale à 1,8; nous obtiendrons:

$$\text{pour } m = 0,1 \quad \frac{a}{R_1} \times n = 3,5 \frac{0,1}{1 + 0,01} = 0,346$$

$$\text{pour } m = 0,2 \quad \frac{a}{R_1} \times n = 3,5 \frac{0,2}{1 + 0,04} = 0,672$$



$$\begin{aligned} \text{pour } m = 0,3 & \quad \frac{a}{R_1} \times n = 3,5 \frac{0,3}{1 + 0,09} = 0,968 \\ \text{pour } m = 0,4 & \quad \frac{a}{R_1} \times n = 3,5 \frac{0,4}{1 + 0,16} = 1,205 \\ \text{pour } m = 0,5 & \quad \frac{a}{R_1} \times n = 3,5 \frac{0,5}{1 + 0,25} = 1,400 \end{aligned}$$

Au rapport  $\frac{a}{R_1}$  correspond un angle au centre  $\theta$  donné par la relation :

$$\theta = \frac{360}{2\pi} \times \frac{a}{R_1}$$

En adoptant  $n = 2$ , nous obtiendrons approximativement :

$$\begin{aligned} \text{pour } m = 0,1 & \quad \theta = 10^\circ \\ \text{pour } m = 0,2 & \quad \theta = 19^\circ \\ \text{pour } m = 0,3 & \quad \theta = 28^\circ \end{aligned}$$

A partir de cette valeur, la largeur  $a$  devient relativement grande par rapport au rayon, et l'on peut adopter 3 ou 4 pales; pour  $n = 4$

$$\begin{aligned} \text{et } m = 0,3, & \quad \theta = 14^\circ \\ m = 0,4, & \quad \theta = 17^\circ \\ m = 0,5, & \quad \theta = 20^\circ \end{aligned}$$

A notre avis, les valeurs ci-dessus donnent des proportions qu'il n'y pas lieu de dépasser; on peut même faire observer que l'influence du rapport  $\left(\frac{a}{R_1}\right)$  sur le rendement est relativement faible, tout au moins lorsqu'on choisit pour ce rapport une valeur suffisante, correspondant à  $10^\circ$  par exemple.

Il nous paraît certain, en tous cas, qu'au point de vue du rendement, il est préférable de faire croître  $\frac{a}{R_1}$  que d'augmenter le nombre  $n$  de pales.

REMARQUE. — Les considérations ci-dessus ne s'appliquent pas du tout à l'hélice marine où le rapport  $\frac{a}{R_1} \times n$  est toujours beaucoup plus grand. Dans ce cas, il s'agit en effet d'empêcher le phénomène de la CAVITATION dû à ce que la différence de pression de part et d'autre d'une aile, dépasse la pression qui correspond à la hauteur du plan d'eau au-dessus de l'axe de l'hélice, et détermine l'aspiration d'une quantité d'air ayant pour effet de faire tourner l'hélice non plus dans l'eau, mais dans un mélange d'air et d'eau.

En adoptant un rapport  $\frac{a}{R_1} \times n$ , tel que la distance  $d$  (fig. 23) soit beaucoup plus petite que  $(r_1 - r_2)$ , on diminue évidemment la différence de pression de part et d'autre de l'aile. Il suffit de revoir les considérations qui ont servi à établir les formules fondamentales pour le comprendre.

#### § 11. — Courbes de la poussée $P_1$ et de la puissance $\mathcal{E}$ . Efficacité d'une hélice au point fixe.

Traçons les courbes de poussée  $P_1$  en fonction de  $x$ , pour différentes valeurs de  $m$ , dans l'hypothèse d'une hélice à deux pales, à profil droit. Adoptons pour  $\theta$  la valeur de  $19^\circ$ , et pour les coefficients  $k_1$  et  $k_3$ , les valeurs déjà admises pour le tracé des courbes de rendement, fig. 17 :

$$k_1 = 0,003, \quad k_3 = 1,5.$$

Au lieu de tracer le diagramme de  $P_1$  dont les valeurs varient avec  $\omega$  et  $R_1$ , nous porterons en ordonnée le facteur

$$2k \frac{\hat{\sigma}}{g} \alpha_1,$$

qui caractérise une hélice à deux pales d'un type donné.

Nous prendrons pour  $\delta$ , 1<sup>k</sup>293 poids spécifique à 0° et à la pression normale; pour  $g$ , 9<sup>m</sup>81. A la valeur  $\theta = 19^\circ$ , correspond une valeur de  $k$  donnée par la relation

$$k = \frac{a}{R_1} \times e = 0,336 \times 1,8 = 0,605,$$

si l'on adopte pour  $e$  le chiffre de 1,8 que nous avons choisi au paragraphe précédent.

A partir de  $m = 0,2$ , on peut admettre que  $k$  est constant, mais pour  $m$  inférieur à 0,2 et en particulier pour  $m = 0,1$ , la valeur de  $k$  est inférieure à la valeur ci-dessus, ainsi que nous l'avons fait comprendre au paragraphe précédent. En admettant que  $k$  soit égal à  $\frac{3}{4} \times 0,605$ , on ne sera pas éloigné de la vérité.

La fig. 24 donne les courbes de variation du facteur  $2k \frac{\delta}{g} \alpha$ , en fonction de  $x$ , pour différentes valeurs de  $m$ , dans les hypothèses ci-dessus.

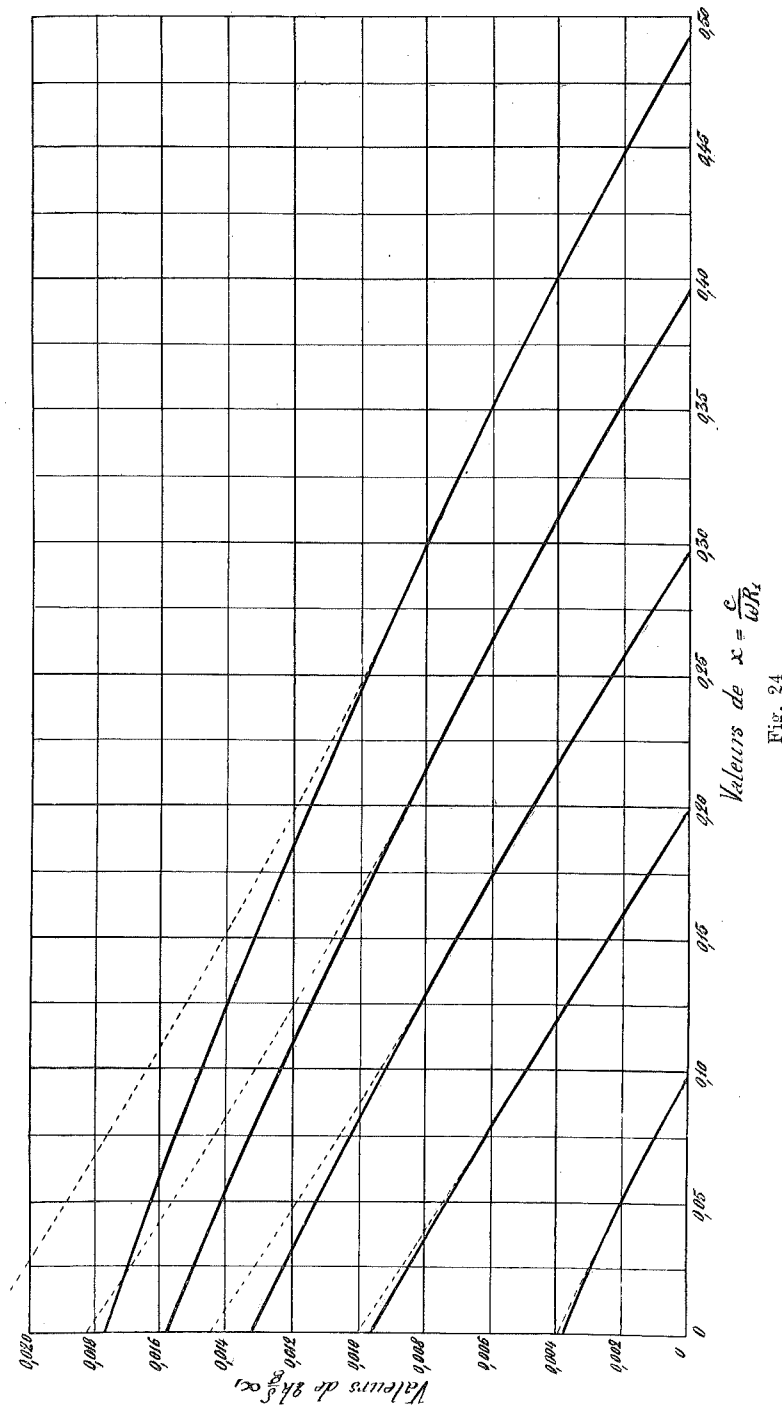
Les parties pointillées résultent directement du calcul, lorsqu'on emploie la formule VI; comme nous savons que la poussée au point fixe est donnée par la formule VI', nous avons porté sur l'axe des  $y$  des valeurs calculées au moyen de cette dernière formule, et nous avons raccordé les courbes primitives par des arcs tangents à celles-ci et passant par les points trouvés sur cet axe.

Les courbes en trait plein donnent donc les valeurs de la poussée telles qu'elles résulteraient du calcul si nous avions pu faire l'intégration de la valeur  $P_1$ , en partant de la formule II' (voir § 5). Bien que les courbes de raccordement doivent se tracer de sentiment, il est certain que l'erreur commise est tout à fait négligeable.

Les courbes de  $\mathcal{C}'$  ou plutôt de

$$2k \frac{\delta}{g} \beta_1,$$

ne sont pas aussi intéressantes, parce que leur allure



dépend complètement des coefficients choisis, et que ceux-ci ne sauraient être déterminés d'une manière certaine que par des expériences précises sur des hélices en translation.

A titre d'exemple, nous avons réuni fig. 25, les 3 courbes caractéristiques d'une hélice à deux pales, de pas  $p$  défini par la relation

$$m = \frac{p}{2 \cdot R_1} = 0.25,$$

pour les valeurs suivantes des coefficients

$$k_1 = 0,003, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1,5.$$

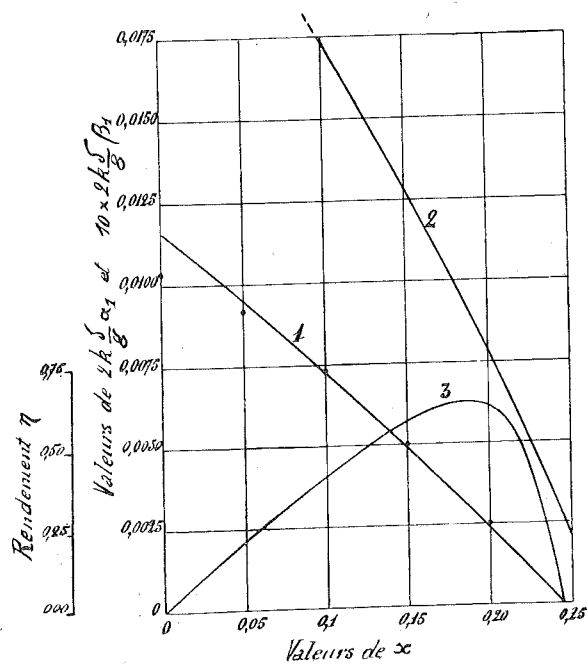


Fig. 25

Fig. 26, nous avons tracé les 3 courbes pour une hélice de même pas, mais en supposant

$$k_1 = 0,01, \quad k_2 = 0,14, \quad k_3 = 1,4.$$

On voit que la courbe 1 relative à la poussée est très peu influencée par la variation des coefficients, tandis que celle relative au travail absorbé est complètement modifiée dans son allure : la courbe (2) de la fig. 25 se rapporte à un profil droit, celle de la fig. 26, à un profil courbe.

Le rendement maximum est sensiblement le même dans les deux hypothèses, le recul relatif correspondant diffère

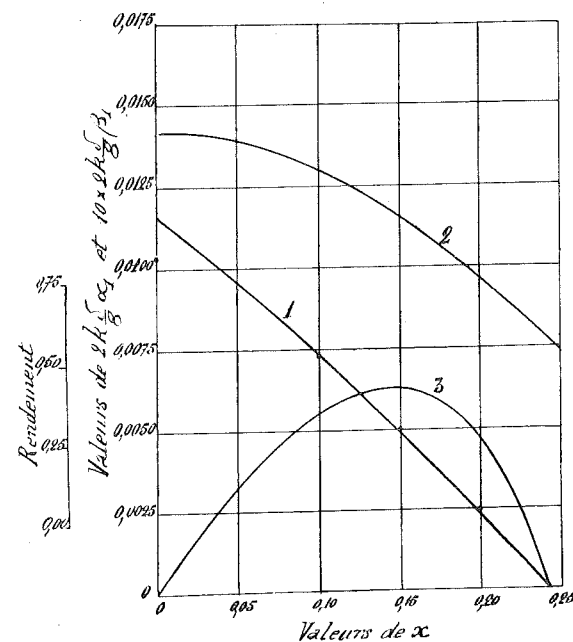


Fig. 26

seul sensiblement. Ce qui ne veut pas dire que pour  $m = 0,25$ , le rendement maximum ne puisse dépasser 0,63; une très faible diminution de la valeur du coefficient  $k_1$  dans le cas du profil courbe, aurait eu, en effet, pour résultat de donner à la courbe de  $\mathcal{T}'$ , fig. 26, une allure plus plongeante et par conséquent de diminuer  $\mathcal{T}'$  pour les valeurs de  $x$  correspondant aux environs du maximum.

Nous avons réuni en diagramme, afin de mieux nous faire comprendre, les résultats d'expériences obtenus par le capitaine Dorand sur une hélice en translation dont le pas  $p$  était donné par la relation

$$\frac{P}{2R_1} = 0,75 \quad \text{ou} \quad m = \frac{P}{2\pi R_1} = 0,24.$$

On voit que l'allure de la courbe (2) est intermédiaire entre les deux courbes correspondantes obtenues par le

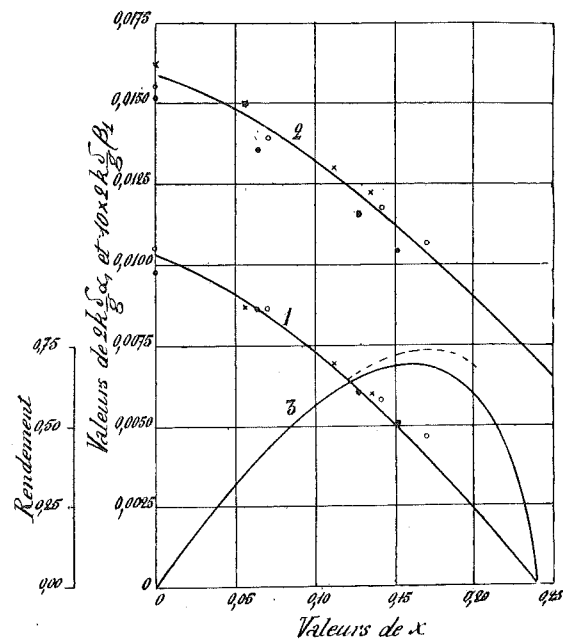


Fig. 27

calcul figures 25 et 26. Le rendement maximum de 0,63 passe à 0,69.

Nous reviendrons sur cette question au chapitre IV où nous examinerons dans quelle mesure les conclusions du chapitre III sont vérifiées par les expériences faites sur des hélices au point fixe ainsi que sur des hélices en translation suivant l'axe.

REMARQUE I. — Les courbes de rendement que nous avons tracées fig. 19, correspondent aux valeurs de  $P_1$  fournies par les courbes pointillées de la fig. 24 ; les courbes de rendement devraient donc être légèrement modifiées pour tenir compte de ce que les vraies valeurs théoriques de  $P_1$  sont données par les courbes en trait plein.

Nous ferons remarquer cependant que dans la partie voisine du rendement maximum les différences sont absolument négligeables.

*Efficacité.* — Dans les essais au point fixe, il ne peut être question de parler de rendement, puisque celui-ci est toujours nul, mais on peut rechercher comment varie le rapport  $\frac{P_1}{G}$ , ou mieux le rapport :

$$E = \frac{nk \frac{\delta}{g} \alpha_1}{nk \frac{\delta}{g} \beta_1} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad \text{XI}$$

qui caractérise un type d'hélice, et qui mesure ce que nous appelons l'efficacité de l'hélice.

Nous avons tracé fig. 28, en fonction de  $m$ , les courbes donnant

$$2k \frac{\delta}{g} \alpha_1 \quad 2k \frac{\delta}{g} \beta_1 \quad E = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

pour le fonctionnement au point fixe, dans l'hypothèse où les coefficients  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  ont respectivement pour valeur

$$0,003, 0,0 \quad \text{et} \quad 1,5$$

et où l'angle au centre  $\theta$  est constant et égal à  $19^\circ$ .

Pour les valeurs de  $m$  inférieures à 0,2, nous avons cependant été forcé de faire différentes hypothèses. En

effet, nous avons vu que, à partir de  $\theta = 19^\circ$ , la poussée et le travail absorbé cessent d'être proportionnels à  $k$ , pour les valeurs de  $m$  inférieures à 0,2. Voici comment nous avons raisonné :

La puissance absorbée par le frottement des pales contre le fluide, est donnée par la valeur que prend  $\mathfrak{C}'$  pour  $x = m$ , puisque pour cette valeur de  $x$ , il n'y a

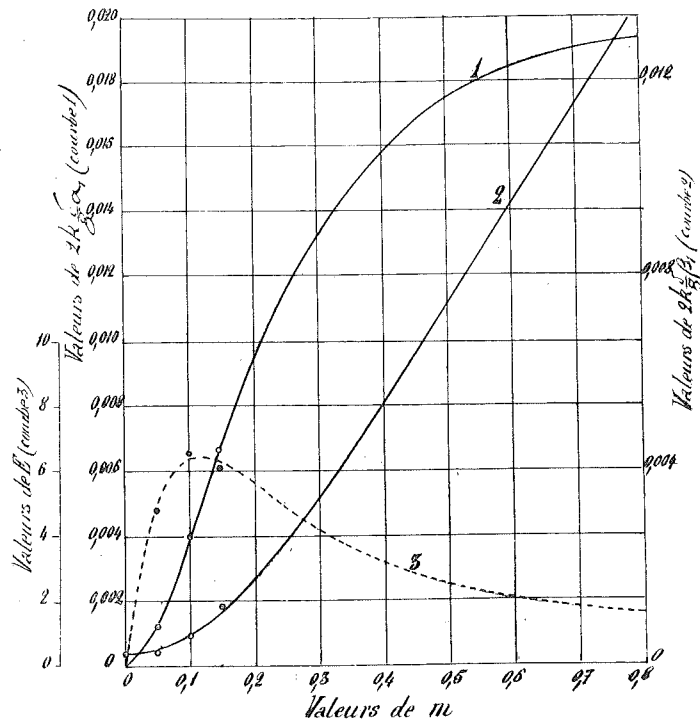


Fig. 28

plus d'énergie cinétique communiquée au fluide. Cette puissance pour  $m = 0,2$  a pour valeur

$$\mathfrak{C}'_1 = 0,000187 \omega^3 R_1^2.$$

Nous pouvons supposer cette puissance constante lorsque  $m$  prend des valeurs inférieures à 0,2 puisque la

surface et la forme des pales ne changent pas, et admettre que la puissance totale absorbée par l'hélice est la somme de la puissance théorique  $\mathfrak{C}$  qu'exigerait l'hélice s'il n'y avait pas de frottement, et de la puissance  $\mathfrak{C}'_1$  calculée ci-dessus.

Or  $\mathfrak{C}$  est donné par les formules ordinaires lorsqu'on y fait  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_3 = 1$ ; pour  $x = 0$

$$\mathfrak{C} = 2k \frac{\delta}{g} \omega^3 R_1^2 \left[ 0,2 - f_3(m) \right].$$

Donc

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} + \mathfrak{C}'_1 = \omega^3 R_1^2 \left\{ 0,000187 + 2k \frac{\delta}{g} \left[ 0,2 - f_3(m) \right] \right\}$$

La distance  $d$  (fig. 23) dont dépend  $k$ , diminue avec le pas et est nulle pour  $m = 0$ ; nous admettrons que  $2k \frac{\delta}{g}$  prend les valeurs suivantes :

pour $m = 0,0$	$2k \frac{\delta}{g} = 0$
» $m = 0,05$	$2k \frac{\delta}{g} = 0,07 \left( \frac{1}{2} \text{ valeur normale} \right)$
» $m = 0,10$	$2k \frac{\delta}{g} = 0,12 \left( \frac{3}{4} \text{ » } \right)$
» $m = 0,15$	$2k \frac{\delta}{g} = 0,14 \left( \frac{4}{5} \text{ » } \right)$
» $m = 0,20$	$2k \frac{\delta}{g} = 0,159 \left( 1 \text{ » } \right)$

Les points résultant de ces derniers calculs sont indiqués sur la fig. 28.

On voit que l'efficacité maximum correspond à  $m = 0,1$  environ ou à  $\frac{P}{D} = 0,31$ , alors que le rendement maximum qui est donné par le diagramme fig. 20, pour ce type d'hélice, correspond à  $m = 0,55$ .

Il n'y a donc aucune relation entre le pas qui procure l'efficacité maximum et le pas qui fournit le maximum de rendement possible, comme beaucoup d'auteurs semblaient le croire; tout au plus peut-on espérer qu'une hélice qui donne au point fixe une valeur élevée pour le coefficient E, est supérieure au point de vue du rendement à une autre de même pas.

Le défaut de la théorie élémentaire de l'hélice au point fixe ne réside donc pas dans le fait que l'hélice travaillerait dans des conditions très différentes suivant qu'elle fonctionne à l'arrêt ou en translation, mais dans le fait qu'elle est incapable d'établir, même par l'analyse des résultats d'expérience, les proportions, les formes, les dimensions de l'hélice qui procure le maximum de rendement.

### § 12. — Influence du rapport $\frac{R_0}{R_1}$

Nous avons fig. 29 tracé les courbes donnant les valeurs de

$$2k \frac{\delta}{g} \alpha_1, \quad 2k \frac{\delta}{g} \beta_1, \quad \eta_1$$

en fonction de  $x$ , pour

$$m = 0,25 \quad \frac{R_0}{R_1} = 0,5$$

$k_1 k_2 k_3$  ayant les valeurs adoptées précédemment pour le profil plan.

En comparant les résultats obtenus à ceux qui sont indiqués fig. 25 pour  $R_0 = 0$ , on voit que

- 1) la poussée est diminuée d'environ 10 %,
- 2) le rendement est sensiblement le même aux environs du maximum,

lorsqu'on passe d'une pale dont la longueur n'est que la moitié du rayon, à une pale occupant toute la longueur de celui-ci.

Il y a lieu de faire remarquer que cela suppose

implicitement que la largeur de la pale varie proportionnellement au rayon.

En ce qui concerne le rendement, il y a lieu d'observer que les valeurs indiquées fig. 29 sont obtenues en faisant

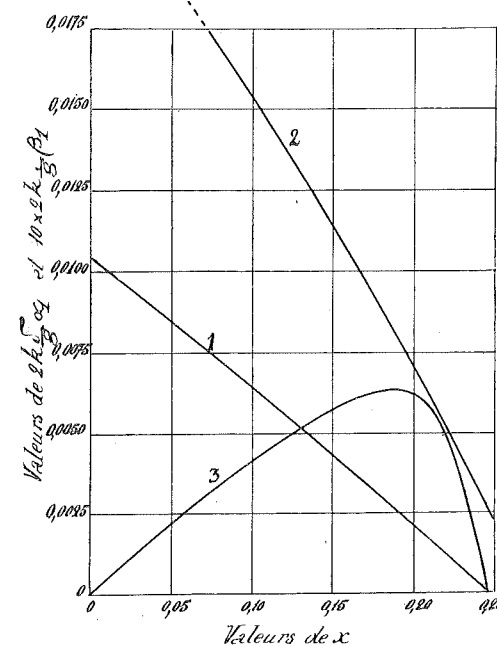


Fig. 29

abstraction de la résistance absorbée par les bras supportant les pales; il est donc certain que le rendement de l'hélice dont les pales n'occupent qu'une partie du rayon, est plutôt inférieur à celui de l'hélice qui est profilée jusqu'au moyeu, les autres éléments restant les mêmes.

### § 13 — Tracé du contour d'une aile.

Nous avons vu qu'il convenait de choisir le rapport  $\frac{a}{R_1}$  de manière que

$$\frac{a}{R_1} \times e = \frac{1}{k'} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{m}{1+m^2}$$

(formule IX),  $k'$  étant plus grand que l'unité. Cette formule a été établie, en exprimant que l'épaisseur  $(r_1 - r_2)$  du flux influencé à la périphérie par une pale devait être au plus égale à la distance  $d$  séparant deux pales consécutives. (fig. 23).

Il paraît rationnel de s'imposer pour le tracé du contour d'une pale, la condition que l'épaisseur du flux influencé à une distance  $R$  du centre, soit une fraction constante de la distance  $d$  correspondante.

Or la distance  $d$  est donnée en fonction du pas  $p$  par la relation

$$d = \frac{2\pi R}{n} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2\pi R}{n} \frac{\frac{p}{2\pi R}}{1 + \left(\frac{p}{2\pi R}\right)^2}$$

et, si nous posons

$$R = n_1 R_1$$

$$d = \frac{2\pi R}{n} \frac{\frac{m}{n_1}}{1 + \left(\frac{m}{n_1}\right)^2} = \frac{2\pi}{n} n_1^2 \frac{m}{n_1^2 + m^2} R_1$$

Donc on doit avoir, avec la condition ci-dessus énoncée,

$$(r_1 - r_2) = a \times e = \frac{1}{k'} \frac{2\pi}{n} n_1^2 \frac{m}{n_1^2 + m^2} R_1$$

ou

$$a = \frac{1}{k'} \frac{1}{e} \frac{2\pi}{n} n_1^2 \frac{m}{n_1^2 + m^2} R_1$$

Pour une hélice à 2 pales, en supposant comme précédemment  $e = 1,8$ , et en adoptant pour  $k'$  la valeur 1,5,

$$a = 1,16 n_1^2 \frac{m}{n_1^2 + m^2} R_1.$$

Traçons le contour de la pale d'une hélice de pas  $p$  donné par la relation

$$m = \frac{p}{2\pi R_1} = 0,3$$

Calculons pour  $n_1$  égal à 1, 0,75, 0,50 ..., les valeurs de  $a$  ;

pour $n_1 = 1$	$a = 0,319 R_1$
$n_1 = 0,75$	$a = 0,300 R_1$
$n_1 = 0,50$	$a = 0,255 R_1$
$n_1 = 0,4$	$a = 0,222 R_1$
$n_1 = 0,3$	$a = 0,174 R_1$
$n_1 = 0,2$	$a = 0,142 R_1$
$n_1 = 0,0$	$a = 0$

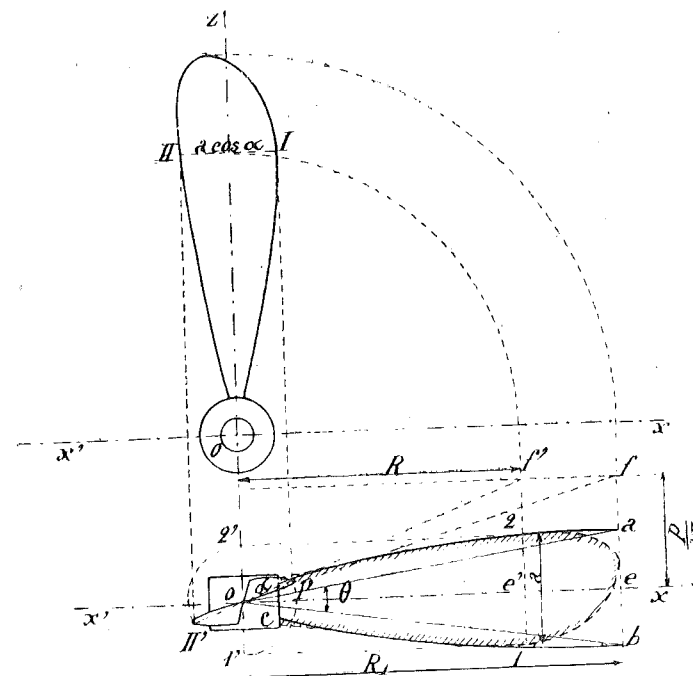


Fig. 30

Sur l'axe  $o x$  (fig. 30), nous avons porté les distances  $R_1$ ,  $0,75 R_1$ , etc., et sur les perpendiculaires élevées en ces points, de part et d'autre de l'axe, les valeurs de



$\frac{1}{2} \frac{a}{R_1}$ ; en reliant tous les points par deux courbes symétriques. nous avons obtenu le contour  $a b c d$ , qui représente la forme d'une aile d'hélice redressée, et répondant aux conditions que nous avons énumérées ci-dessus.

Pour éviter des remous à la périphérie, on arrondit et on amincit ordinairement l'extrémité de l'aile de façon que les filets puissent glisser sans choc, le long du bord d'attaque; l'expérience *semble* avoir démontré que cette manière de tracer l'extrémité de la pale procurait une augmentation de rendement; elle a, en tous cas, l'inconvénient de réduire la surface de l'aile dans la partie qui est animée de la plus grande vitesse, et partant de diminuer sensiblement la poussée, pour un angle au centre  $\theta$  déterminé. Comme il est impossible de conserver au moyeu une largeur aussi faible que celle donnée par le calcul, le contour qu'il convient de conserver est celui qui est délimité sur la figure, par un liseré de hachures.

Cette courbe étant donnée, il sera facile de trouver les projections horizontales et verticales de la pale.

Elevons sur l'axe  $o x$  à l'extrémité du rayon  $R_1$ , une perpendiculaire, et portons sur celle-ci une largeur  $ef$  égale à  $0,3 R_1$ ; la ligne  $of$  donnera l'angle  $z$  d'inclinaison de la surface à l'extrémité de la pale, puisque

$$\operatorname{tg} z = \frac{p}{2\pi R_1} = 0,3$$

Comme  $p$  est constant, l'angle  $z$  à une distance  $R$  quelconque sera donné par l'inclinaison de la droite  $of'$  sur  $o x$ , et par conséquent les points du contour correspondant à cette distance  $R$ , seront obtenus, en projection horizontale, en portant sur  $of'$  des distances.

$$o I' = e' 1 \quad \text{et} \quad o II' = e' 2$$

Pour obtenir ces points en projection verticale, il suffira de mener deux lignes de rappel jusqu'à l'intersection avec la ligne horizontale tracée à la distance  $R$  de l'axe  $o$ .

La figure 30 donne les projections obtenues par cette construction; on remarquera que la forme ainsi trouvée se rapproche de celles adoptées par un grand nombre de constructeurs.

#### CHAPITRE IV.

##### Vérification expérimentale des formules proposées.

###### § 14. — Au point fixe.

Un assez grand nombre d'expérimentateurs ont effectué des essais d'hélices aériennes au point fixe; on peut citer notamment M. Boyer-Guillon et M. Riabouchinsky.

Tous les expérimentateurs se sont trouvés d'accord pour conclure que les formules

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha N^2 D^4 \\ \mathcal{C}' &= \beta N^3 D^5 \end{aligned}$$

se vérifiaient avec une approximation suffisante, voisine de la limite des erreurs d'expérience.

En faisant des essais avec une même hélice à des nombres de tours différents, puis en répétant ces essais sur des hélices géométriquement semblables, plus grandes ou plus petites, les expérimentateurs ont trouvé pour  $\alpha$  et  $\beta$  des valeurs variant d'environ 10 % ou 15 % au maximum, le nombre de tours  $N$  et des diamètres  $D$  variant du simple au double ou au triple.

M. Riabouchinsky a entrepris, en dehors de ces essais, trois séries d'expériences.

a) Des expériences sur des hélices de même diamètre à deux pales, de même angle au centre, mais de *pas variable*;

b) Des expériences sur des hélices à deux pales de même diamètre, de même pas, mais d'angle au centre variable ;

c) Des expériences sur des hélices de même diamètre, même pas, même angle au centre, mais possédant un nombre d'ailes allant de 1 à 11.

#### Première série d'expériences.

Cette première série d'expériences a été effectuée avec des hélices formées de deux pales d'épaisseur uniforme (3,5 mm.) ayant un diamètre de 0,3 m. ; les pales

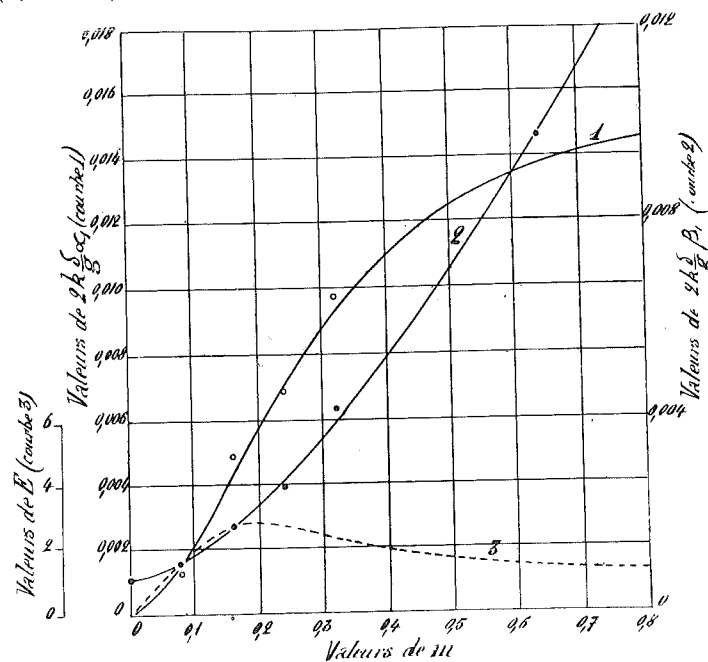


Fig. 31

réalisaient une portion de surface hélicoïde à plan directeur d'angle au centre  $\theta = 18^\circ$ . Les hélices essayées étaient au nombre de 7, le pas variant de telle manière que le rapport  $\frac{P}{2R_1}$  prit les valeurs suivantes

0,0, 0,25, 0,30, 0,75, 1,0, 2,00, 3,00.

La fig. 31 donne les courbes des valeurs de

$$2k \frac{d}{g} \alpha_1 \text{ (courbe 1),}$$

$$2k \frac{d}{g} \beta_1 \text{ (courbe 2),}$$

$$E \text{ (courbe 3)}$$

résultant des expériences.

Ces courbes sont tracées à la même échelle que celles du diagramme fig. 28, qui résultent du calcul. L'allure des courbes est identique, mais les valeurs des coefficients diffèrent notablement, en raison de l'épaisseur relativement très forte donnée aux pales, et de ce fait que les bords de celles-ci n'étaient pas amincis ; les remous importants qui en sont résultés, ont eu pour effet d'augmenter la puissance absorbée, par conséquent le coefficient  $\beta_1$ , et de diminuer l'épaisseur du flux influencé par conséquent la valeur de  $k$ .

L'efficacité maximum correspond pour cette raison à  $m = 0,2$  environ au lieu de 0,1 donné par le calcul.

#### Deuxième série d'expériences.

La seconde série d'expériences a été effectuée avec une série d'hélices du même diamètre, du même type que les précédentes, mais avec un pas constant tel que

$$\frac{P}{2R_1} = 0,75 \quad \text{ou} \quad m = 0,24$$

les angles au centre  $\theta$  allant en croissant depuis  $12^\circ \frac{1}{2}$  jusqu'à  $144^\circ$ . Nous avons réuni fig. 32 les résultats obtenus, en les traduisant dans nos notations.

On voit que

1°  $k$  croît proportionnellement à  $\theta$  jusqu'à  $22^\circ$  environ ; le calcul nous avait indiqué  $23^\circ \frac{1}{2}$  (§ 10, page 58) ;

2° Pour les valeurs inférieures à 20°,  $2k \frac{\delta}{y} \beta_1$  ne diminue pas proportionnellement à  $\theta$ , ce qui revient à dire que les coefficients  $k_1$  et  $k_3$  qui entrent dans le calcul de  $\beta_1$ , croissent à mesure que  $\theta$  diminue ;

3° L'efficacité est sensiblement constante entre 10° et 150°.

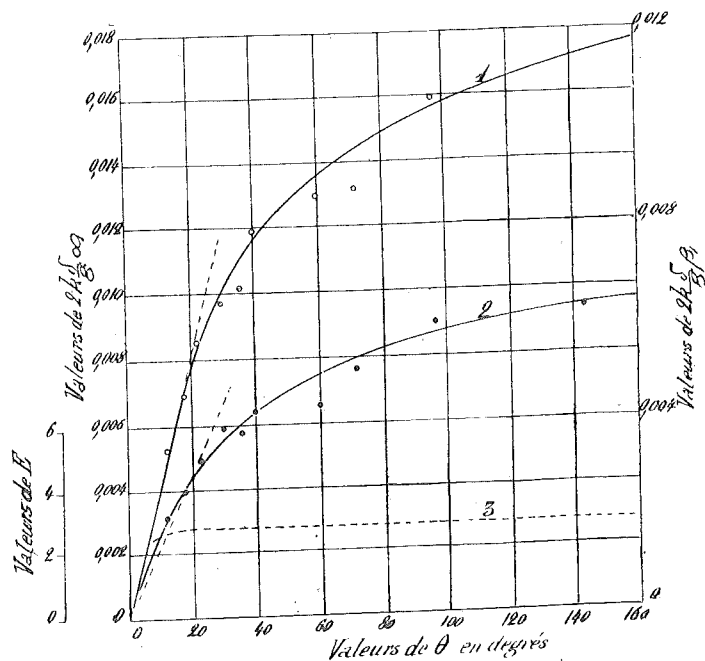


Fig. 32

Cette dernière conclusion ne se vérifierait probablement pas avec des hélices profilées correctement.

Remarquons encore que

pour  $\theta = 40^\circ$   $k = 1,45 k_{20}$   
 $\theta = 60^\circ$   $k = 1,70 k_{20}$

$k_{20}$  représentant la valeur correspondant à  $\theta = 20^\circ$ .

Troisième série d'expériences.

M. Riabouchinsky a déterminé l'influence du nombre d'ailes dans une 3<sup>me</sup> série d'expériences, au moyen d'hélices de 2 m. de diamètre, d'angle au centre  $\theta = 18^\circ$ , profilées suivant les coupes données fig. 6. Le pas apparent de toutes ces hélices, c'est-à-dire le pas de la corde, était égal à  $0,75 \times 2R_1$ .

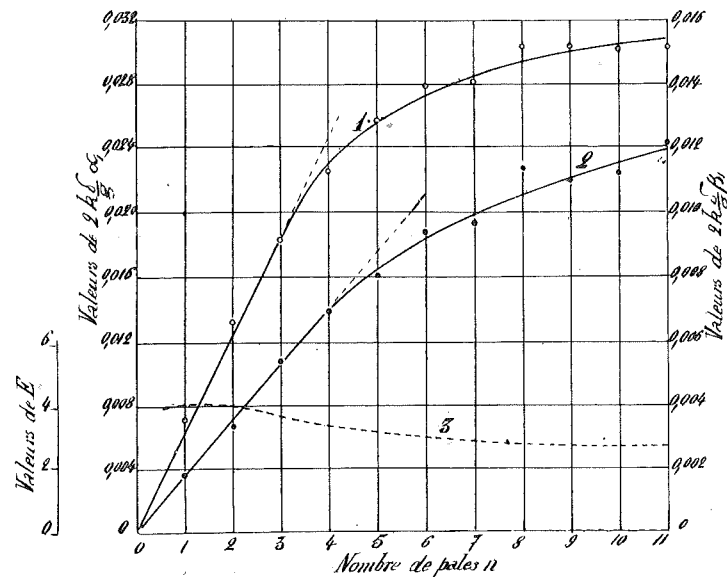


Fig. 33

En prenant pour  $\gamma$ ,  $4^\circ$ , on trouve pour pas réel

$$p = 2 R_1 \text{ environ, soit } m = 0,32.$$

Les résultats obtenus dans les expériences sont donnés par les courbes de la fig. 33.

On voit que

1°  $k$  croît proportionnellement au nombre d'ailes jusqu'à  $n = 3$ ; le calcul nous avait donné pour  $m = 0,3$  (§ 10, page 58),

$$\theta = \frac{360}{2\pi} \frac{a}{R_1} = \frac{360}{2\pi} \frac{0,968}{n}$$

ou

$$n = \frac{360}{2\pi} \frac{0,968}{\theta} = 3,1;$$

2° *L'efficacité est maximum pour  $n = 2$ .*

Remarquons en passant que l'efficacité pour

$$n = 2, \quad \theta = 18^\circ, \quad \text{est ici égale à } 4.$$

Si nous adoptons pour pas réel  $p = 2 R_1$ , c'est-à-dire pour  $m$  la valeur 0,32, chiffre calculé ci-dessus, nous voyons que nous retrouvons très sensiblement la valeur donnée par le calcul, dans les diagrammes de la fig. 28.

Ce chiffre de 4 est presque le double de celui obtenu dans l'essai sur l'hélice de 0<sup>m</sup>30 de diamètre, de même pas, mais mal profilée.

Pour terminer, notons que pour

$$\begin{array}{lll} n = 4 & nk = 1,8 \times 2 k_2 & k = 0,90 k_2 \\ n = 6 & nk = 2,19 \times 2 k_2 & k = 0,73 k_2 \\ n = 8 & nk = 2,37 \times 2 k_2 & k = 0,59 k_2 \end{array}$$

$k_2$  représentant la valeur de  $k$  correspondant à une hélice à 2 pales, d'angle au centre  $\theta = 18^\circ$ .

#### CONCLUSIONS.

Les résultats d'expérience que nous venons d'exposer et de commenter, confirment pleinement les considérations émises aux chapitres précédents, notamment en ce qui concerne le nombre de pales, l'angle au centre, etc.

C'est à l'expérimentation qu'il faut demander les renseignements nécessaires pour compléter la théorie, pour en déterminer les coefficients. Encore faudrait-il pour que les conclusions soient nettes et que les coefficients établis soient utilisables dans la pratique, que les expériences fussent faites avec des hélices se rapprochant autant que possible de celles que l'industrie utilise, dans des conditions de vitesse se rapprochant de celles employées ordinairement. Les expériences de M. Riabouchinsky ne sont pas toujours dans ce cas.

#### § 15. En mouvement de translation suivant l'axe.

Les seules expériences entreprises jusqu'à présent pour déterminer directement le rendement de l'hélice en marche, à des vitesses de translation croissantes, sont celles du capitaine Dörand.

Malheureusement dans la publication des résultats, qui a été faite dans *La Technique Aéronautique* (n<sup>os</sup> du 1<sup>er</sup> juin et du 1<sup>er</sup> novembre 1910), l'auteur ne donne aucun renseignement sur le profil et sur le contour des pales des hélices essayées; il se borne à indiquer les résultats obtenus.

Dans la première série d'essais, il a utilisé deux hélices de même pas :

$$p = 0,75 \times 2 R_1$$

de même angle au centre, mais de diamètres différents : 2<sup>m</sup>50 et 4<sup>m</sup>30.

Il résulte de ces expériences que les formules :

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha N^2 D^4 \\ \mathcal{C}' &= \beta N^3 D^5 \end{aligned}$$

sont applicables à une hélice en marche,  $\alpha$  et  $\beta$  variant avec le rapport  $\frac{c}{\omega R_1}$ , de la vitesse de translation à la vitesse périphérique.

Des diagrammes publiés se rapportant à l'hélice de 2<sup>m</sup>50 de diamètre, nous avons déduit les courbes 1 et 2 de la fig. 27 qui donnent les valeurs de :

$$2 k \frac{\delta}{g} \alpha_1 \quad \text{et} \quad 2 k \frac{\delta}{g} \beta_1$$

Les points indiqués par une croix se rapportent aux essais effectués à 11,3 tours par seconde; les points indiqués par un cercle se rapportent aux essais effectués à la vitesse de 9 tours par seconde; ceux marqués par un point noir se rapportent aux essais correspondant à

$$n = 10 \text{ tours.}$$

On voit que l'approximation des formules proposées reste dans les limites des erreurs expérimentales. Nous avons tracé la courbe 1 de manière à la faire passer entre les points, et de faire couper l'axe des  $x$  à l'endroit correspondant à :

$$x = m = \frac{p}{2\pi R_1} = 0,24 \text{ environ.}$$

Nous avons prolongé la courbe 2 donnant la valeur de  $2k \frac{\delta}{g} \beta_1$  jusqu'à l'ordonnée  $x = m$ , et nous avons déterminé la courbe de rendement correspondant aux courbes 1 et 2.

Le maximum se présente pour la valeur de  $x = 0,165$  et atteint 0,69.

La partie pointillée indique la courbe telle que l'avait tracée le capitaine Dorand ; nous pensons que la nôtre correspond mieux aux résultats fournis par les essais. D'ailleurs dans la seconde série d'essais qui fait l'objet de l'article de novembre 1911, le maximum de rendement trouvé pour  $m=0,24$  n'est que 0,66, alors qu'il s'agissait là d'une hélice fournissant un rendement limite de 0,83 pour  $m=0,4$ , présentant par conséquent un profil particulièrement avantageux.

Si nous comparons la courbe (1) à la courbe calculée, représentée fig. 25, nous voyons que la première est plus concave dans la partie correspondant aux faibles valeurs de  $x$ , mais que, par contre, elle coïncide complètement avec la seconde dans la partie voisine du maximum de rendement. Les points marqués sur la fig. 25 donnent les valeurs de  $2k \frac{\delta}{g} \alpha_1$  fournies par l'expérience.

Cette différence entre les deux courbes peut s'expliquer aisément par ce fait que, dans le fonctionnement au point fixe ou aux faibles vitesses de translation, l'air arrive

sur l'hélice avec une certaine vitesse, ce qui tend à diminuer l'angle d'attaque.

On peut montrer par contre, pourquoi cette vitesse axiale mesurée par Riabouchinsky, en aval de l'hélice, n'a pas pour effet de diminuer autant qu'on pourrait le croire à première vue, l'angle d'attaque et par conséquent la poussée.

La courbe expérimentale donnant la puissance absorbée, est intermédiaire entre les courbes 2 résultant du calcul, tracées fig. 25 et 26.

### CONCLUSIONS.

Comme on peut s'en rendre compte, les formules semblent se vérifier avec une approximation qu'on n'aurait pu espérer *a priori*.

Ce qu'il importe si l'on veut aboutir à des conclusions certaines, c'est d'effectuer des expériences comme celles du capitaine Dorand, avec la plus grande précision possible, en organisant les essais de manière à pouvoir utiliser des hélices profilées correctement, et à pouvoir mesurer la poussée fournie et le travail absorbé, avec une approximation suffisante, pour des reculs relatifs voisins de zéro.

Par des expériences, sur une portion de surface profilée de la même manière que les pales des hélices essayées, on pourrait déterminer la valeur de  $\gamma$  pour laquelle la composante normale au flux est nulle, et partant la valeur réelle du pas à introduire dans les formules.

En procédant avec beaucoup de méthode, en sériant les expériences de manière à établir les différents coefficients de la théorie que nous proposons, on pourra espérer élucider complètement la question des hélices aériennes, et solutionner de la manière la plus générale, le problème que nous posons au début de cette étude :

« Déterminer les dimensions d'une hélice capable de donner une poussée de  $P_1$  kg à la vitesse de rotation de  $N$  tours par seconde, en remorquant un appareil à la vitesse de  $c$  mètres par seconde, de manière à obtenir le maximum de rendement possible. Si le nombre de tours  $N$  n'est pas imposé, déterminer la vitesse angulaire la plus favorable. Calculer la puissance absorbée correspondante. »

## CHAPITRE V.

### Calcul des hélices aériennes.

Nous avons vu que le rendement d'une hélice d'un type déterminé, croît jusqu'à un maximum avec la valeur  $x$  du rapport de la vitesse de translation  $c$  à la vitesse périphérique  $\omega R_1$ . Comme le rendement croît peu aux environs du maximum, il n'y a pas lieu de choisir pour  $x$  la valeur qui correspond à ce maximum, mais une valeur un peu inférieure, valeur qui peut être donnée en fonction de  $m$  par la relation linéaire

$$x = am - b \quad (\text{formule 24})$$

dont nous avons parlé au § 9.

A chaque type d'hélice, correspondent des valeurs particulières des coefficients  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$ , par conséquent des courbes de rendement d'allures différentes; il en résulte que  $a$  et  $b$  sont deux constantes qui prennent des valeurs particulières pour chaque type.

Nous avons calculé les constantes  $a$  et  $b$  dans les deux hypothèses envisagées, d'une hélice à profil droit et d'une hélice à profil courbe, pour lesquelles nous avons adopté respectivement

$$\begin{array}{lll} k_1 = 0,003 & k_2 = 0 & k_3 = 1,5 \\ k_1 = 0,010 & k_2 = 0,14 & k_3 = 1,4 \end{array}$$

Les valeurs de ces coefficients semblent, d'après les résultats du capitaine Dorand, constituer des limites. C'est ainsi que  $k_1 = 0,003$  est faible, tandis que  $k_3 = 1,5$  est probablement un maximum;  $k_1 = 0,010$  au contraire est une valeur trop grande pour les profils ordinairement adoptés.

Les résultats des calculs qui vont suivre seront vraisemblablement exagérés dans un sens ou dans l'autre, suivant que nous nous en rapporterons aux premiers coefficients ou aux seconds; il ne s'agit d'ailleurs ici que d'exposer une méthode rigoureuse qui permet, les coefficients étant connus par des expériences préalables sur une hélice du type adopté, de déterminer complètement et rationnellement les dimensions de l'hélice répondant aux conditions imposées.

Les valeurs de  $\alpha_1$  étant à peu près indépendantes des coefficients ci-dessus, nous pourrions déterminer  $\alpha_1$ , quel que soit le profil, au moyen du diagramme fig. 24. Nous pourrions donc construire, en fonction de  $m$ , la courbe de  $\alpha_1$  correspondant aux valeurs de  $x$  déterminées par la relation :

$$x = am - b$$

#### Problème I.

La solution du problème énoncé à la fin du paragraphe précédent n'offrira pas de difficulté si l'on connaît la courbe dont nous venons de parler.

En effet, la formule IV donne :

$$P_1 = n k \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^4 \alpha_1 \quad (28)$$

pour une hélice à  $n$  pales.

D'autre part :

$$x = \frac{c}{\omega R_1} = am - b \quad (29)$$

et 
$$nk = \frac{1}{k'} 2\pi \frac{m}{1 + m^2} \quad (\text{formule IX})$$

En remplaçant  $R_1$  par dans l'équation (28) par sa valeur tirée de l'équation (29), et  $nk$  par :

$$\frac{2\pi}{k'} \frac{m}{1+m^2}$$

il viendra :

$$\frac{m \alpha_1}{(1+m^2)(am-b)^4} = \frac{k' P_1 \omega^2}{2\pi \frac{\delta}{g} c^4} \quad (30)$$

Dans cette équation  $\alpha_1$  représente la valeur particulière que prend cette fonction pour  $x = am - b$ ,  $k'$  est un coefficient qui varie proportionnellement à  $\frac{a}{R_1}$  jusqu'à une valeur voisine de l'unité, puis décroît jusqu'à une valeur limite voisine de 0,5, suivant une certaine loi expérimentale.

Le premier membre de l'équation (30) est une fonction de  $m$  que l'on peut calculer pour chaque type d'hélice.

Désignons cette fonction par  $f_5(m)$

$$f_5(m) = \frac{m}{1+m^2} \alpha_1 \frac{1}{(am-b)^4} \quad (31)$$

Nous avons tracé, fig. 34, la courbe 1 donnant  $f_5(m)$  et la courbe 1' donnant  $\frac{m}{1+m^2} \alpha_1$  dans l'hypothèse

$$k_1 = 0,003 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 1,5.$$

Les courbes 2 et 2' donnent respectivement  $f_5(m)$  et  $\frac{m}{1+m^2} \alpha_1$ , pour

$$k_1 = 0,010 \quad k_2 = 0,14 \quad k_3 = 1,4.$$

Ces courbes étant connues, il suffira de se donner  $k'$  pour trouver  $m$ , puisque le problème fixe les valeurs de  $P_1$ ,  $\omega$  et  $c$ . Le second membre de l'équation (30) qui est égal à  $f_5(m)$  est, en effet, complètement connu en

fonction de ces éléments; en portant la valeur trouvée en ordonnée, dans le diagramme de la fig. 34, et en menant une parallèle à l'axe des abscisses jusqu'à la courbe des valeurs de  $f_5(m)$ , nous obtiendrons un point dont l'abscisse sera la valeur de  $m$  cherchée.

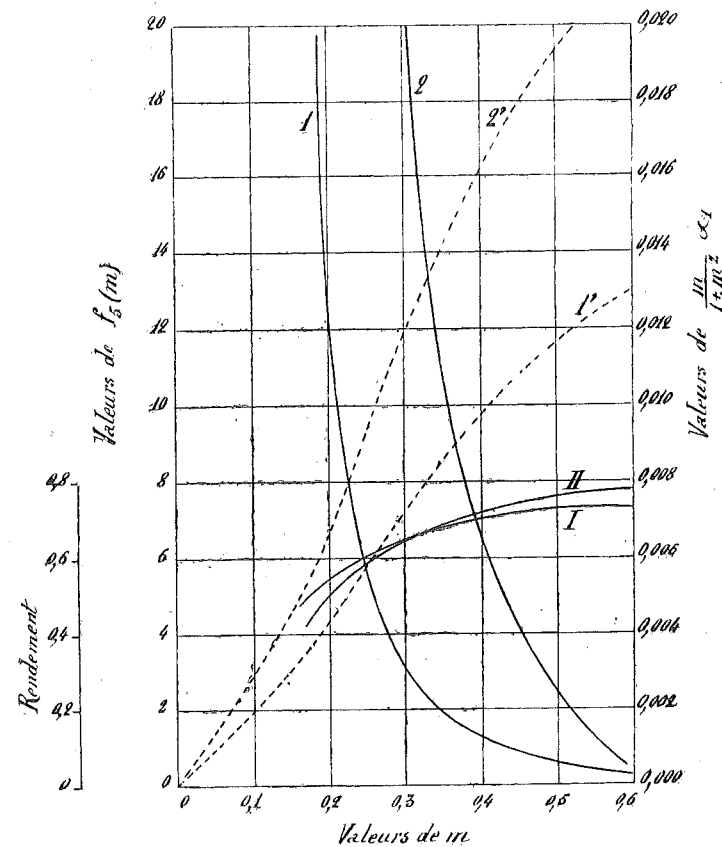


Fig. 34

En ce qui concerne le choix de  $k'$ , rappelons que nous avons admis et reconnu comme vérifié par les expériences de M. Riabouchinsky, que la valeur la plus favorable était voisine de l'unité et que le rendement



dépendait peu, tout au moins dans certaines limites, de cette valeur. Pour les valeurs de  $k'$  inférieures à l'unité, on est conduit à adopter plus de deux pales à partir de  $m = 0,25$  et il y a lieu de voir si cette complication est justifiée par l'accroissement du rendement que l'on obtient. Un exemple numérique nous fera mieux comprendre.

**Exemples.** — Déterminer les dimensions d'une hélice capable de fournir un effort de traction de 110 kg. en remorquant un appareil à la vitesse de 60 km. à l'heure, de manière à obtenir le maximum de rendement possible.

Nous supposons deux cas :

A. — La vitesse de rotation de l'hélice est donnée et égale à 800 tours par minute.

B. — La vitesse de rotation de l'hélice reste à déterminer.

A. — Pour un nombre de tours égal à 800 par minute

$$\omega = 83,73 \text{ m.}$$

La vitesse  $c$  en mètres par seconde correspondant à 60 km à l'heure, est de

$$c = 16,66 \text{ m.}$$

Adoptons pour  $\delta$  le poids spécifique à 0° et 760 mm de pression, c'est-à-dire 1,293 kg.

Nous aurons

$$f_5(m) = k' \frac{110 \times 7011}{6,28 \frac{1,293}{9,81} \times 77006} = 12,1 k'.$$

Adoptons  $k' = 1$ ,  $f_5(m)$  sera égal à 12,1.

a) Si nous choisissons un profil courbe pour lequel les coefficients précédemment adoptés sont applicables, il suffira de porter en ordonnée dans la fig. 34,  $y = 12,10$ , de mener une horizontale jusqu'à la courbe 2, et une verticale par ce point de rencontre jusqu'à l'axe des abscisses. On trouvera ainsi

$$m = 0,344 \quad \text{ou} \quad \frac{p}{2 R_1} = \frac{p}{D} = 1,08.$$

En portant cette valeur de  $m$  dans la relation (29) où, pour le cas qui nous occupe,

$$a = 0,75 \quad b = 0,075,$$

ainsi que nous l'avons établi au § 9, nous trouverons,

$$R_1 = \frac{c}{\omega (am - b)} = \frac{16,66}{83,73 \times (0,75 \times 0,344 - 0,075)}$$

$$\text{d'où} \quad R_1 = 1,088 \quad D = 2 R_1 = 2^m 17.$$

L'équation IX fera d'autre part connaître, la valeur de  $nk$ , et par conséquent le nombre d'ailes et l'angle au centre  $\theta$ ,

$$nk = \frac{1}{1} \times 6,28 \frac{0,34}{1 + 0,116} = 1,824$$

ce qui pour  $n = 4$ , donne

$$k = \frac{a \times c}{R_1} = 0,462$$

et

$$\theta = \frac{360}{2 \pi} \times \frac{a}{R_1} = 14^\circ \frac{7}{10} \approx 15^\circ$$

en adoptant pour  $e$ , 1,8, chiffre déjà admis.

Le rendement correspondant donné par la courbe II (fig. 34) est égal à 0,68.

b) Voyons quelles seraient les dimensions de l'hélice si nous adoptions un profil droit pour lequel les coefficients

$$k_1 = 0,003, \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 1,5$$

seraient applicables.

$k'$  étant égal à 1,  $f_5(m)$  sera égal à 12,10 comme dans le cas précédent. En prenant l'intersection de l'horizontale menée par l'ordonnée  $y = 12,10$ , avec la courbe 1, et en abaissant la perpendiculaire sur l'axe des  $m$  par ce point d'intersection, nous trouverons cette fois

$$m = 0,2, \quad \frac{p}{D} = 0,628.$$

En portant cette valeur dans la relation (29) dont les coefficients  $a$  et  $b$  ont respectivement pour valeur

$$0,875 \quad \text{et} \quad 0,052,$$

nous trouverons :

$$R_1 = \frac{c}{\omega (am - b)} = \frac{16,66}{83,73 (0,875 \times 92 - 0,052)}$$

D'où

$$R_1 = 1^m622 \quad D = 3^m24.$$

L'équation IX nous fera connaître, d'autre part, la valeur de  $nk$ , et par conséquent le nombre d'ailes et l'angle au centre  $\theta$ .

$$nk = \frac{1}{1} \times 6,28 \frac{0,2}{1,00 + 0,04} = 1^m21$$

ce qui pour  $n = 2$ , donne

$$k = \frac{a \times e}{R_1} = 0,605$$

et

$$\theta = \frac{360}{2\pi} \times \frac{a}{R_1} = 19^\circ \frac{2}{10},$$

$e$  étant pris égal à 1,8.

Le rendement correspondant, donné par la courbe I, est égal 0,55.

REMARQUE. — On voit par les calculs qui précèdent, quelle influence peut avoir le profil sur les dimensions et le rendement de l'hélice. Alors que le rendement *maximum* de l'hélice à profil droit est sensiblement égal au rendement de l'hélice à profil courbe, on n'obtient à 800 tours que 0,55 avec la première, contre 0,68 avec la seconde. Des différences aussi importantes semblent déjà avoir été constatées ; nous insistons cependant sur ce fait que les conclusions ci-dessus dépendent essentiellement de la valeur des coefficients choisis et que seules, des

expériences scientifiques sur des hélices de profils différents, pourraient fixer la valeur des coefficients *d'une manière certaine*.

B. — Traitons maintenant le problème de la détermination des dimensions d'une hélice lorsque le nombre de tours n'est pas imposé.

Nous avons vu que le rendement maximum augmentait avec la valeur de  $m$ ; choisissons la valeur de

$$m = 0,45$$

qui ne correspond pas encore au *maximum maximorum*, mais qu'il est difficile de dépasser en raison des grands diamètres et des faibles vitesses de rotation auxquels on est conduit.

a) A  $m = 0,45$  correspond pour un profil courbe, une valeur de  $f_5(m) = 4$ .

$P_1$  étant égal à 110 kg et  $c = 16^m66$  l'équation (30), donnera

$$\omega^2 = 2\pi \frac{\delta}{g} \frac{c^4 f_5(m)}{k' P_1} = 2335 \quad (32)$$

$$\omega = 48,2 \quad \text{ou} \quad N = 460$$

par minute,  $k'$  étant égal à 1.

Connaissant  $m$ ,  $c$  et  $\omega$ , on peut calculer  $R_1$  au moyen de l'équation (29), puisque :

$$a = 0,75 \quad b = 0,075$$

dans le cas de l'hélice à profil courbe ;

$$R_1 = \frac{16,66}{48,2 (0,75 \times 0,45 - 0,075)} = 1,372 m$$

Pour l'angle au centre  $\theta$ , nous aurons, en adoptant  $n=4$  :

$$\theta = \frac{360}{2\pi} \times \frac{a}{R_1} = 18^\circ \frac{5}{10}$$

Le rendement est cette fois égal à 0,745.

b) Pour  $m = 0,43$  la valeur de  $f_5(m)$  correspondant à un profil plan est égal à 1, c'est-à-dire à une valeur 4 fois plus petite que la précédente.

Comme la valeur de  $\omega$  varie proportionnellement à la racine carrée de  $f_5(m)$ , nous trouverons dans cette hypothèse,  $k'$  étant toujours choisi égal à 1 :

$$\omega = 24,1 \quad N = 230 \quad \text{par minute.}$$

A cette valeur de  $N$  correspond un rayon  $R_1$  :

$$R_1 = \frac{16,66}{24,1 (0,875 \times 0,43 - 0,052)} = 2^m 14$$

On voit que la solution est inacceptable.

REMARQUE I. — La formule (32) montre que l'on peut accroître le nombre de tours, en choisissant une valeur de  $k'$  plus élevée, c'est-à-dire en augmentant le nombre d'ailes, ou en adoptant un angle au centre  $\theta$  plus grand. Cette conclusion était inattendue.

Il y a lieu d'observer cependant que le rendement tend à diminuer lorsqu'on s'écarte sensiblement de la valeur  $k' = 1$  dans un sens ou dans l'autre, et que pour les valeurs de  $k'$  inférieures à 1, il n'y a plus proportionnalité entre  $n k$  et  $k'$ , ce qui entraîne une augmentation de poids pour une poussée déterminée.

REMARQUE II. — L'équation (30) peut être transformée en observant que la résistance à l'avancement d'un dirigeable ou d'un aéroplane voyageant sous un angle d'attaque constant, est proportionnelle au carré de la vitesse, et que l'on peut poser, puisqu'il y a égalité entre la résistance et la poussée  $P_1$ ,

$$P_1 = K c^2$$

On aura, en faisant la substitution,

$$\omega = \sqrt{2 \pi \frac{\delta}{g} f_5(m)} \cdot \frac{c}{\sqrt{k' K}}$$

Cette formule montre que, pour des hélices géométriquement semblables, la vitesse de rotation doit croître proportionnellement à la vitesse de translation, et inversement proportionnellement à la racine du coefficient de résistance, si l'on veut conserver le même rendement.

Cette remarque explique pourquoi on emploie à bord des dirigeables, dont la vitesse de translation est relativement faible, alors que la valeur de  $\sqrt{K}$  est élevée, des hélices de grand diamètre, tournant très lentement.

#### Problème II.

On peut poser le problème suivant :

Etant donné un moteur à couple constant  $C$ , attaquant une hélice de pas et de proportions déterminés, calculer la vitesse de rotation de l'hélice et la vitesse de translation de l'appareil, pour une valeur du coefficient de résistance égal à  $K$ .

Puisque

$$P_1 = K c^2, \quad x = \frac{c}{\pi R_1},$$

on a

$$K c^2 = n k \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^2 \alpha_1$$

et par conséquent

$$\frac{\alpha_1}{x^2} = \frac{K}{n k \frac{\delta}{g} R_1^2} \quad (33)$$

D'autre part,

$$\mathfrak{T}' = C \omega = n k \frac{\delta}{g} \omega^3 R_1^3 \beta_1;$$

d'où

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{n k \frac{\delta}{g} R_1^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \quad (34)$$

En observant que  $\omega = \frac{c}{x R_1}$ , on pourra également écrire

$$c = \sqrt{\frac{C}{n k \frac{\delta}{g} R_1^3}} \frac{x}{\sqrt{\beta_1}} \quad (35)$$

Calculons en fonction de  $x$ , les valeurs de  $\frac{\alpha_1}{x^2}$  et  $\frac{x}{\sqrt{\beta_1}}$  pour différentes valeurs de  $m$ , les coefficients  $k_1, k_2, k_3$  ayant pour valeurs celles adoptées précédemment dans le cas du profil courbe.

Les courbes pointillées 2, 3, 4 de la fig. 35 donnent les valeurs trouvées pour  $\frac{\alpha_1}{x^2}$ , les courbes 2, 3, 4 en trait plein, celles de  $\frac{x}{\sqrt{\beta_1}}$ , respectivement pour  $m = 0,2, 0,3$  et  $0,4$ .

Ces diagrammes étant tracés, la solution du problème devient extrêmement simple. Prenons un exemple numérique.

*Exemple.* — Soit une hélice ayant les dimensions

$$R_1 = 1^m 10 \quad n = 2 \text{ pales} \quad \theta = 18^\circ \quad m = 0,3.$$

et supposons que le coefficient de résistance soit tel que pour remorquer l'appareil à la vitesse de 60 km. à l'heure, il faille une poussée de 110 kg. Nous aurons

$$K = \frac{110}{16,66^2} = 0,396.$$

Supposons encore le moteur soit capable de développer une puissance de 55 chevaux effectifs à la vitesse de rotation de 1200 tours, ce qui correspond à un couple de

$$C = \frac{55 \times 75 \times 60}{2 \pi \times 1200} = 32 \text{ kgm}^8.$$

Le problème énoncé revient à déterminer quelle sera la vitesse communiquée à l'appareil par ce moteur attaquant l'hélice en prise directe, le couple étant supposé constant.

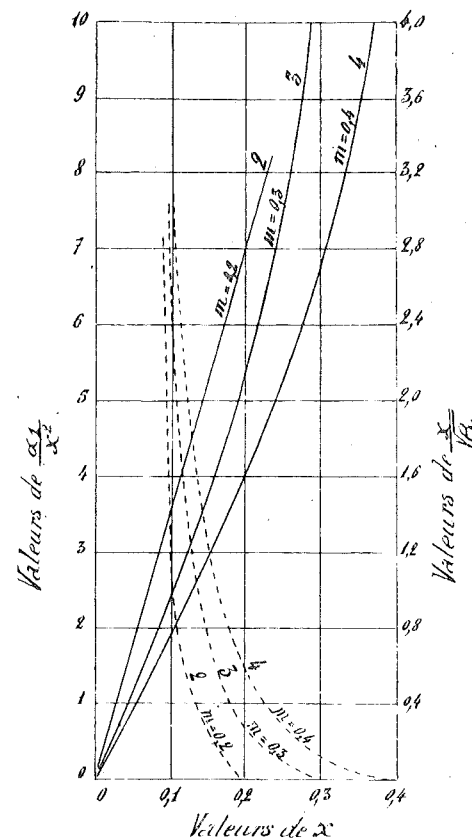


Fig. 35.

La formule (33) donne

$$\frac{\alpha_1}{x^2} = \frac{0,396}{2 \times 0,565 \frac{1,293}{9,81} 1,1^2} = \frac{0,396}{0,18} = 2,1$$

en prenant pour  $e$  1,8.

Portons en ordonnée 2,1 et menons l'horizontale jusqu'à la rencontre avec la courbe (3) donnant  $\frac{x_1}{x_1}$  pour  $m=0,3$ ; l'abscisse correspondante déterminera  $x$ , et la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par ce point, donnera, en la prolongeant jusqu'à la courbe 3 en trait plein, la valeur de  $\frac{x}{\sqrt{\beta_1}}$ , et par conséquent  $\omega$  et  $c$ . On trouve

$$x = 0,145 \quad \frac{x}{\sqrt{\beta_1}} = 1,436$$

$$c = \sqrt{\frac{32,8}{2 \times 0,565 \frac{1,293}{9,81} 1,1^2}} \times 1,436 = 18,47, \text{ soit } 66^{\text{km}3}$$

$$\omega = \frac{c}{x \times R_1} = 115,7 \quad \text{ou} \quad N = 1105 \text{ tours.}$$

Avec  $m = 0,2$

$$x = 0,101, \quad \frac{x}{\sqrt{\beta_1}} = 1,52 \quad c = 19,52, \text{ soit } 70^{\text{km}3}$$

$$\omega = 160,5 \quad \text{ou} \quad N = 1530 \text{ tours.}$$

Avec  $m = 0,4$

$$x = 0,175 \quad \frac{x}{\sqrt{\beta_1}} = 1,36 \quad c = 17,47 \text{ soit } 62^{\text{km}9}$$

$$\omega = 90,8 \quad \text{ou} \quad N = 867 \text{ tours.}$$

Nous avons tracé, fig. 36, les courbes représentant les variations en fonction de  $m$ , c'est-à-dire du pas de l'hélice :

de la vitesse de rotation en tours par minute, (courbe 1);  
de la vitesse de translation en km à l'heure, (courbe 2);  
du rendement de l'hélice, (courbe 3);  
le couple étant supposé constant et égal à 32,8 kgm.

Les courbes 1', 2' et 3' donnent respectivement les mêmes valeurs pour le cas d'une hélice à 4 pales, au lieu de 2, de même diamètre, de 15° d'angle au centre au lieu de 18°.

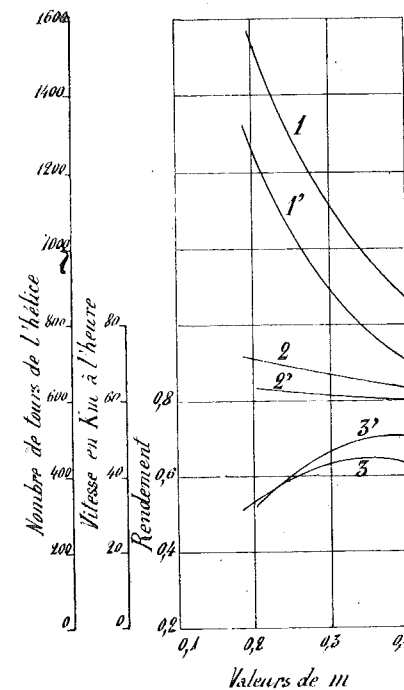


Fig. 36

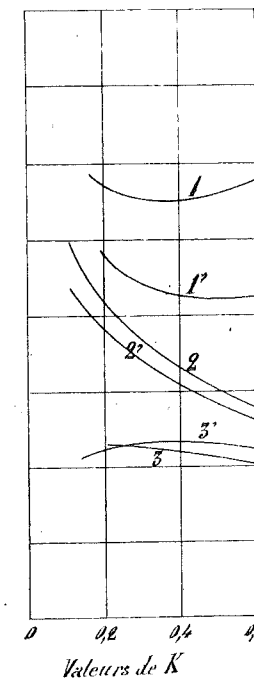


Fig. 37

L'examen des courbes montre que :

- 1) l'hélice à 4 pales donne un rendement supérieur pour les valeurs de  $m > 0,25$ ;
- 2) l'hélice à 4 pales tourne sensiblement moins vite pour un couple donné, mais la vitesse de translation imprimée à l'appareil est inférieure à celle communiquée par une hélice à 2 pales de même angle au centre.

## Problème III.

On peut se demander comment varient le nombre de tours de l'hélice et la vitesse de translation de l'appareil, lorsque l'on fait varier le coefficient de résistance  $K$ , le couple du moteur étant maintenu constant.

Nous avons calculé, pour  $m = 0,3$  et pour trois valeurs de  $K$  :

0,200            0,396            0,600

les valeurs de :

$x$              $\frac{x}{\sqrt{\beta_1}}$              $c$  et  $\omega$

Les résultats obtenus ont été mis en diagramme (fig. 37); la courbe 1 donne le nombre de tours par minute; la courbe 2, la vitesse de translation en km à l'heure; la courbe 3, le rendement de l'hélice, dans l'hypothèse d'une hélice à 2 pales, de  $18^\circ$  d'angle au centre, de  $1^m10$  de diamètre, le couple étant égal à  $32^{kgm8}$ .

Les courbes 1', 2' et 3' donnent respectivement les mêmes valeurs que les courbes 1, 2 et 3, mais pour une hélice à 4 pales de même diamètre et de  $15^\circ$  d'angle au centre.

L'examen de ces courbes montrent que :

1° l'hélice à 4 pales fournit un rendement supérieur tout au moins pour un coefficient de résistance à l'avancement élevé (0,25 au moins);

2° l'hélice à 4 pales tourne sensiblement moins vite pour un couple donné, et un même coefficient de résistance;

3° le nombre de tours de l'hélice, pour un couple constant varie de quelques % à peine pour des variations du coefficient de résistance du simple au double, et même au triple.

REMARQUE. — Pour un type déterminé d'aéroplane, le coefficient de résistance  $K$  est fonction du poids à enlever, car c'est ce poids qui fixe pour une vitesse de propulsion

déterminée, les dimensions de la voilure et la valeur de l'angle d'attaque de celle-ci.

Pour élucider d'une manière complète la question du choix de l'hélice à placer sur un appareil déterminé, il faudrait connaître la fonction qui relie  $K$ , à  $S$  et  $\alpha$ , et qui est de la forme

$$K = \frac{\delta}{g} \left( K_1 + K_3 S \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)$$

## Problème IV.

Un dernier problème qu'il est intéressant de résoudre est celui-ci : Déterminer la poussée  $P_1$  et le nombre de tours d'une hélice de dimensions données, tournant au point fixe, cette hélice étant commandée par un moteur fournissant un couple constant connu.

Supposons qu'il s'agisse d'une hélice ayant les dimensions suivantes

$$R_1 = 1^m10 \quad n = 2 \text{ pales} \quad \theta = 18^\circ \\ m = 0,3$$

le couple étant égal à  $32^{kgm8}$ .

La formule (34) permet de déterminer  $\omega$ ; il suffit de calculer  $\beta_1$  pour la valeur particulière  $x = 0$  :

$$\beta_1 = -k_3 f_3(m) + (2k_1 + k_2) \left( \frac{1}{5} d_x - \frac{x^2}{3} c_x \right).$$

En supposant que les coefficients qui se rapportent à notre type d'hélice, soient ceux précédemment adoptés

$$k_1 = 0,010, \quad k_2 = 0,14, \quad k_3 = 1,4,$$

on trouve

$$\beta_1 = 0,01253;$$

par conséquent

$$\omega = \sqrt{\frac{32,8}{2 \times 0,565 \frac{1,293}{9,81} 1,1^5}} \times \frac{1}{\sqrt{0,01253}} = 104^m5$$

et  $N = 1000$  tours par minute.

La poussée  $P_1$  peut être calculée au moyen de la formule VI

$$P_1 = nk \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^4 \alpha'_1 = 2380 \times 0,08337 = 198 \text{ kg.}$$

Or cette hélice, commandée par le même moteur, est capable de propulser, comme nous l'avons vu, un appareil dont le coefficient de résistance  $K$  a pour valeur 0,396, à la vitesse de  $66^{\text{km}5}$  à l'heure, en fournissant une poussée

$$P_1 = 135 \text{ kg}$$

et en tournant à la vitesse de rotation de 1105 tours par minute.

#### CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

La théorie que nous venons d'exposer est, croyons-nous, la plus complète et la plus précise, de toutes celles qui ont été publiées jusqu'aujourd'hui, et l'on sait combien elles sont nombreuses. Nous ne pensons pas qu'il soit possible de pousser plus loin l'analyse mathématique des phénomènes qui accompagnent le fonctionnement de l'hélice propulsive : le développement des calculs qui précèdent, est déjà suffisamment long pour qu'on veuille y introduire de nouvelles complications, en vue de serrer de plus près la vérité.

Une idée qui vient immédiatement à l'esprit, est celle de remplacer l'hypothèse que nous avons faite sur la variation de  $a$  en fonction de  $R$ , en posant

$$a \times e = k R,$$

par une autre qui se rapprocherait plus de la réalité ; la forme ordinairement adoptée pour la pale correspond plutôt, en effet, à une courbe parabolique.

Outre que les difficultés d'intégration deviendraient presque insurmontables, l'exactitude des résultats n'en serait guère accru : les phénomènes sont d'une telle

complexité, qu'au delà d'une certaine approximation, il est vain de vouloir chercher à condenser la vérité en formules.

Est-ce à dire qu'il faut bannir des formules ? Certainement non puisqu'elles sont indispensables au constructeur pour déterminer les dimensions *à priori* de ses hélices.

A l'heure actuelle, on met en doute *la loi du carré de la vitesse* qui forme la base de tous les calculs de l'aérodynamique, par suite de l'interprétation un peu hâtive des dernières expériences sur les surfaces sustentatrices et sur les hélices ; et ceux qui veulent ignorer la théorie, s'en réjouissent presque, et s'empressent de conclure à l'impuissance des mathématiques pour formuler des conclusions.

Nous verrons le parti que les expérimentateurs pourront tirer de leurs expériences, s'ils n'organisent leurs essais en vue de déterminer les coefficients de la théorie.

La théorie, en indiquant dans quelle voie doivent s'engager les expérimentateurs, permet seule de coordonner les résultats d'expériences, et de formuler des conclusions utiles pour le constructeur. Si les coefficients que la théorie suppose constants pour les besoins de la cause, sont variables, c'est à l'expérience d'indiquer dans quelles limites ils varient, et leurs valeurs en fonction des éléments du problème.

Ce qui a manqué dans l'organisation des essais, ce n'est pas l'argent, c'est quelquefois les hommes et surtout le temps : on a voulu aller trop vite, on a manqué un peu de méthode.

Il est nécessaire de répéter pour terminer que les coefficients sur lesquels nous avons basé tous nos calculs, n'ont pas été déduits d'expériences sur les hélices, mais d'expériences sur le plan mince ; il ne s'agit donc de voir dans les calculs numériques que des applications de la

méthode proposée en vue de préciser les idées et d'établir une première approximation.

Une notion qu'il conviendrait de bien établir si l'on veut aboutir à des conclusions nettes et précises, est celle du *pas*. Nous avons vu la signification de ce mot pour une portion d'hélicoïde à plan directeur; pour une hélice dont le profil ne peut être assimilé à un plan mince, on peut définir le pas en disant *qu'il est mesuré par l'avance qu'il faut communiquer à l'hélice, par tour de celle-ci, pour que la poussée soit nulle.*

Il est bien entendu que cette notion n'a de signification précise que si l'hélice est tracée de manière que l'inclinaison de la corde sous-tendant le profil varie avec le rayon  $R$ , de manière à définir surface hélicoïde à plan directeur.

Tout en admettant à priori que les hélices à angle d'attaque constant soient avantageuses au point de vue du rendement, il est certain que les expériences devraient d'abord porter sur des hélices dont les pales seraient des portions d'hélicoïde pure, ou dont la corde sous-tendant le profil définirait une surface hélicoïde.

## APPENDICE

### CHAPITRE I<sup>er</sup>.

#### Hélices à angle d'attaque constant.

Nous traiterons, dans ce chapitre, du rendement et du calcul des hélices à *angle d'attaque constant*.

#### § 1. — Formules fondamentales.

Pour trouver les formules donnant respectivement la poussée  $P_1$ , le travail  $\mathcal{C}'$  et le rendement  $\eta$ , en fonction du rapport  $\frac{c}{\omega R_1}$ , pour le cas d'une hélice à angle d'attaque constant, il nous suffira de considérer  $(\alpha - \beta_0)$  comme constant, dans les équations de la page 28.

En posant, pour simplifier les transcriptions,

$$k_1 - k_2 \sin \frac{\alpha - \beta_0}{2} + k_3 \sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2} = k_4, \quad (36)$$

et en remarquant que

$$\sin \beta_0 = \frac{\frac{c}{\omega R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}}, \quad \cos \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}},$$



il viendra :

$$P_1 = k \frac{\delta}{g} \left[ \sin(\alpha - \beta_0) \int_0^1 \frac{c^2 + \omega^2 R^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}} R dR \right. \\ \left. - 2 k_4 \int_0^1 \frac{c^2 + \omega^2 R^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}} \left(\frac{c}{\omega}\right) dR \right]$$

$$\mathcal{C}' = k \frac{\delta}{g} \omega \left[ \sin(\alpha - \beta_0) \int_0^1 \frac{c^2 + \omega^2 R^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}} \left(\frac{c}{\omega}\right) R dR \right. \\ \left. + 2 k_4 \int_0^1 \frac{c^2 + \omega^2 R^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}} R^2 dR \right]$$

Toutes réductions faites, nous aurons donc :

$$P_1 = k \frac{\delta}{g} \omega^2 \left\{ \sin(\alpha - \beta_0) \int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^2 dR \right. \\ \left. - 2 k_4 \left(\frac{c}{\omega}\right) \int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR \right\} \quad (37)$$

$$\mathcal{C}' = k \frac{\delta}{g} \omega^3 \left\{ \sin(\alpha - \beta_0) \left(\frac{c}{\omega}\right) \int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^2 dR \right. \\ \left. + 2 k_4 \int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR \right\} \quad (38)$$

### § 2. — Résolution des intégrales.

Résolvons séparément les intégrales ci-dessous :

$$\text{I. — } \int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^2 dR$$

$$\text{II. — } \int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR$$

$$\text{III. — } \int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR$$

### Intégrale I.

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^2 dR = \int \left[ 1 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 R^{-2} \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR.$$

Posons

$$1 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 R^{-2} = t^2;$$

nous aurons :

$$R^2 = \frac{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2}{t^2 - 1}, \quad dR = -\frac{R^3}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2} t dt,$$

et, par conséquent,

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^2 dR = -\int t^2 \frac{R^6}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2} dt = -\left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^3}.$$

Or

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^3} = \frac{1}{2} \int t \frac{2t dt}{(t^2 - 1)^3} = -\frac{t}{4} (t^2 - 1)^{-2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{en intégrant par partie et en écrivant :} \\ u = t \quad dv = \frac{2t dt}{(t^2 - 1)^3} \end{array} \right)$$

D'autre part, nous avons vu page 31, que

$$\int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2} = -\int \frac{dt}{t^2 - 1} + \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^2} \\ = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 1} - \frac{t}{2} (t^2 - 1)^{-1} \\ = -\frac{1}{4} l \frac{t - 1}{t + 1} - \frac{t}{2} (t^2 - 1)^{-1}$$

Donc

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^2 dR = \left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \left[ \frac{t}{4} (t^2 - 1)^{-2} + \frac{t}{8} (t^2 - 1)^{-1} + \frac{1}{16} l \frac{t - 1}{t + 1} \right],$$

et comme, avec les notations précédemment adoptées,

$$\left(\frac{t-1}{t+1}\right)_1 = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+1}, \left(\frac{t-1}{t+1}\right)_0 = \frac{(n^2+x^2)^{\frac{1}{2}}-n}{(n^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+n}$$

$$\left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \frac{t}{4} (t^2-1)^{-2} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \frac{t}{4} \left(\frac{c}{\omega R}\right)^{-4} = \frac{t}{4} R^4$$

$$\left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \frac{t}{8} (t^2-1)^{-1} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \frac{t}{8} \left(\frac{c}{\omega R}\right)^{-2} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{t}{8} R^2,$$

il viendra finalement :

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^2 dR = \frac{1}{4} R_1^4 \left\{ (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - n^5 (n^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^2 f_1(x) \right\}$$

où

$$f_1(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - n(n^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{2} l \frac{\left[ (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \left[ (n^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + n \right]}{\left[ (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \left[ (n^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - n \right]}$$

Intégrale II.

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR = \frac{1}{3} \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

en posant :

$$R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 = t^2.$$

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR = \frac{1}{3} R_1^3 \left[ (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Intégrale III.

Cette intégrale a été résolue page 34; nous avons trouvé

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^5 dR = R_1^5 \left\{ \frac{1}{5} \left[ (1+x^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2+x^2)^{\frac{5}{2}} \right] - \frac{x^2}{3} \left[ (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}.$$

§ 3. — Expressions de la poussée  $P_1$ , de la puissance absorbée  $\mathcal{C}'$  et du rendement  $\eta$

En introduisant dans les formules (38) et (39) les valeurs que nous venons de trouver pour les intégrales, nous aurons, toutes réductions faites,

$$P_1 = k \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^4 \alpha_1 \quad \text{XII}$$

$$\mathcal{C}' = k \frac{\delta}{g} \omega^5 R_1^5 \beta_1 \quad \text{XIII}$$

$\alpha_1$  et  $\beta_1$  ayant respectivement les valeurs suivantes :

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \sin(\alpha - \beta_0) \left[ a_x - n^5 a_{1x} + \frac{1}{2} x^2 f_1(x) \right] - 2k_4 \left( \frac{1}{3} x c_x \right)$$

$$\beta_1 = \frac{x}{4} \sin(\alpha - \beta_0) \left[ a_x - n^5 a_1 x + \frac{1}{2} x^2 f_1(x) \right] + 2k_4 \left[ \frac{1}{5} d_x - \frac{1}{3} x^2 c_x \right]$$

Dans ces expressions  $a_x$ ,  $a_{1x}$ ,  $f_1(x)$ ,  $d_x$  et  $c_x$ , peuvent se calculer d'après les formules développées pages 35 et 36, en y remplaçant  $m$  par  $x$ .

Le tableau III de la page 38 donne les valeurs de ces expressions,  $m$  étant pris pour  $x$ , dans l'hypothèse où le rayon  $R_0$  de la pale peut être considéré comme nul.

Le rendement est encore exprimé ici par le rapport :

$$\eta = \frac{\alpha_1 x}{\beta_1} \quad \text{XIV}$$

REMARQUE I. — Il y a lieu de faire remarquer que les expressions ci-dessus fournissent les valeurs de  $P_1$ ,  $\mathcal{C}'$  et  $\eta$ , en fonction du rapport  $x$  de la vitesse de translation à la vitesse périphérique, dans l'hypothèse où l'inclinaison  $\alpha$

des éléments d'une pale varierait avec la vitesse de translation, de manière que l'angle d'attaque restât constant sur toute la longueur de la pale.

Pour retrouver, par l'expérience, les différents points d'une courbe théorique, il ne peut donc être question, comme dans le cas de l'hélice à pas constant, de déterminer la poussée et le travail absorbé *par une même hélice*, en fonction de la vitesse de translation; il est nécessaire d'expérimenter, à un même nombre de tours, une série d'hélices présentant un même angle d'attaque pour des vitesses de translation différente, et de faire les observations de  $P_1$  et  $\mathcal{C}'$  pour chacune d'elles, aux environs de la vitesse de translation pour laquelle l'hélice a été calculée.

REMARQUE II. — Il y a lieu de faire observer qu'il faut entendre par *angle d'attaque*, que nous désignerons dans la suite par  $\varepsilon$ , pour un profil courbe donné, l'angle :

$$\varepsilon = \alpha - \beta_0 = (i + \gamma) - \beta_0.$$

(Voir page 20, fig. 13.)

#### § 4. — Courbes de rendement.

Nous avons tracé fig. 38 (Pl. 2) les courbes de rendement, en fonction  $x$ , pour différents angles d'attaque  $\varepsilon$  :

$$2^\circ, \quad 3^\circ, \quad 4^\circ \quad \text{et} \quad 5^\circ$$

dans l'hypothèse d'un profil plan pour lequel les coefficients  $k_1$  et  $k_3$  auraient respectivement pour valeurs :

$$0,003 \quad \text{et} \quad 1,5$$

$k_2$  étant égal à 0.

Fig. 39 (Pl. 2), nous avons tracé les courbes de rendement correspondant à un profil courbe pour lequel les coefficients auraient respectivement les valeurs précédemment adoptées :

$$k_1 = 0,1 \quad k_2 = 0,14' \quad k_3 = 1,4$$

les angles d'attaque  $\varepsilon$  étant respectivement égaux à

$$5^\circ, \quad 6^\circ, \quad 7^\circ, \quad 8^\circ \quad \text{et} \quad 10^\circ.$$

L'examen de ces courbes montre que :

1° le rendement augmente avec l'angle d'attaque  $\varepsilon$ , mais très lentement à partir de

4° pour un profil plan,

8° pour un profil courbe;

2° le rendement augmente pour un même angle d'attaque, avec la valeur de  $x$ , mais d'une manière insensible à partir de  $x = 0,5$ ;

3° la valeur de  $\alpha_1$  croît à peu près proportionnellement à l'angle d'attaque, pour une même valeur de  $x$ , et reste presque constant pour un même angle d'attaque, quel que soit  $x$ ;

5° le rendement maximum d'une hélice à angle d'attaque constant, pour un profil donné et une valeur de  $x$  déterminée, ne diffère pas sensiblement de la valeur du rendement maximum d'une hélice à pas constant; plus exactement, la courbe enveloppe de toutes les courbes de rendement des hélices à pas constant (fig. 17) coïncide sensiblement avec la courbe de rendement de l'hélice de même profil, dont l'angle d'attaque est constant et égal à 5°.

Cette dernière conclusion, vraie également pour le profil courbe, pourrait surprendre. Il faut cependant remarquer qu'aux environs du rendement maximum, la variation de l'angle d'attaque d'une hélice à pas constant, depuis l'extrémité de la pale jusqu'au milieu de celle-ci, ne dépasse pas souvent 1°; que, par conséquent, cette région de la pale fournissant 0,8 de la poussée totale, il n'est pas étonnant que la différence des rendements entre les deux types d'hélices, soit très faible *pour un même angle d'attaque  $\varepsilon$  à l'extrémité de la pale.*

## § 5. — Calcul des hélices à angle d'attaque constant.

Par des considérations identiques à celles que nous avons fait valoir page 53, nous pourrions établir la valeur de  $k$  en fonction de  $\varepsilon$  et de  $\alpha$ .

La distance entre deux courbes hélicoïdales consécutives, tracées par les extrémités des pales sur le cylindre fictif enveloppant l'hélice (fig. 23), aura pour valeur :

$$d = \frac{2 \pi R_1}{n} \sin \alpha.$$

En confondant la tangente avec le sinus, approximation suffisante pour les faibles valeurs de  $\alpha$ , et en remarquant que

$$\alpha = \beta_0 + \varepsilon,$$

il viendra :

$$d = \frac{2 \pi R_1}{n} \operatorname{tg}(\beta_0 + \varepsilon) = \frac{2 \pi R_1}{n} \frac{\operatorname{tg} \beta_0 + \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - \operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \varepsilon}.$$

Or,

$$\operatorname{tg} \beta_0 = x \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon \frac{2 \pi}{360} \quad (\text{approximativement}),$$

la valeur de  $\varepsilon$  étant toujours très faible.

Donc

$$d = \frac{2 \pi R_1}{n} \frac{x + \varepsilon \frac{2 \pi}{360}}{1 - x \varepsilon \frac{2 \pi}{360}}.$$

Nous ne diminuerons pas la valeur des considérations qui vont suivre, en négligeant le terme  $x \times \varepsilon \frac{2 \pi}{360}$  et en écrivant :

$$d = \frac{2 \pi R_1}{n} \left( x + \varepsilon \frac{2 \pi}{360} \right).$$

Comme on doit avoir, d'après ce que nous avons exposé page 55,

$$(r_1 - r_2) < d$$

et

$$\frac{r_1 - r_2}{R_1} = k = \frac{a \times e}{R_1} < \frac{d}{R_1},$$

nous pourrions poser :

$$\left| k = \frac{1}{k'} \frac{2 \pi}{n} \left( x + \varepsilon \frac{2 \pi}{360} \right) \right|, \quad \text{XV}$$

$k'$  étant un coefficient plus grand que l'unité.

Si l'on donne à  $\frac{a}{R_1}$  une valeur telle que  $k$  dépasse la valeur ci-dessus pour  $k' = 1$ , la poussée ne croît plus proportionnellement au rapport  $\frac{a}{R_1}$ , et il devient impossible de déterminer, sans le secours de l'expérience, la valeur de  $k$ .

Introduisons dans la formule XII, la valeur de  $k$  trouvée ci-dessus, et évaluons la poussée totale pour les  $n$  pales de l'hélice en multipliant le second membre par  $n$ ; nous aurons :

$$P_1 = \frac{1}{k'} 2 \pi \left( x + \varepsilon \frac{2 \pi}{360} \right) \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^4 \alpha_1.$$

$$\text{Comme} \quad x = \frac{c}{\omega R_1},$$

nous pouvons éliminer  $R_1$  de la valeur de  $P_1$ , et grouper dans le second membre tous les termes qui dépendent de  $x$  et de  $\varepsilon$ ; il viendra :

$$\frac{k' P_1 \omega^2}{2 \pi \frac{\delta}{g} c^4} = \left( x + \varepsilon \frac{2 \pi}{360} \right) \frac{\alpha_1}{x^4} \quad (39)$$

L'expression est analogue à celle que nous avons trouvée page 84 (formule 30).

Fig. 40, nous avons tracé les courbes donnant la fonction :

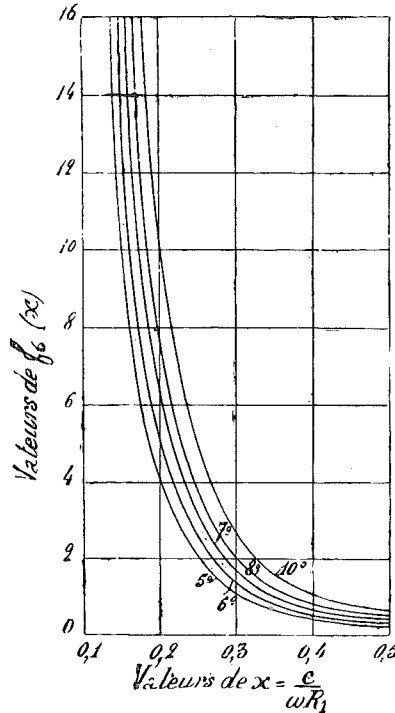


Fig. 40.

$$f_6(x) = \left(x + \varepsilon \frac{2\pi}{360}\right) \frac{\alpha_1}{x^4},$$

pour les angles  $\varepsilon$  de  $5^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ$  et  $10^\circ$ , et les coefficients  $k_1, k_2, k_3$ , correspondant au profil courbe.

Grâce à ces courbes, il nous sera aisé de résoudre le problème énoncé page 86.

A. Examinons d'abord le cas où la vitesse de rotation est imposée et égale à 800 tours par minute.

La vitesse angulaire  $\omega$  dans ces conditions est de

$$\omega = 83^m73.$$

La vitesse  $c$  en mètres par seconde étant de

$$c = 16^m66,$$

nous aurons :

$$f_6(x) = k' \frac{110 \times 7011}{6,28 \frac{1,293}{9,81} \times 77006} = 12,1 k',$$

le poids spécifique  $\delta$  de l'air à  $0^\circ$  et 760 mm de pression, étant de  $1^k293$ .

Adoptons  $k' = 1$  et choisissons un profil courbe pour lequel les coefficients précédemment admis soient applicables; il nous suffira, pour obtenir la valeur de  $x$  qui correspond à une valeur de l'angle d'attaque  $\varepsilon$ , et qui satisfait à la relation :

$$f_6(x) = 12,1,$$

de mener, dans le diagramme de la fig. 40, une horizontale dont l'ordonnée soit égale à 12,1, et d'abaisser une verticale jusqu'à l'axe des  $x$ , par le point d'intersection avec la courbe relative à l'angle  $\varepsilon$  choisi.

Pour

$$\varepsilon = 8^\circ \quad x = \frac{c}{\omega R_1} = 0,175$$

$$\varepsilon = 10^\circ \quad x = \frac{c}{\omega R_1} = 0,190$$

La valeur de  $x$  étant connue, on peut en déduire  $R_1$  au moyen de la relation :

$$x = \frac{c}{\omega R_1},$$

puis  $nk$ , au moyen de la relation XV.

$$\text{Pour } \varepsilon = 8^\circ \quad R_1 = 1^m14 \quad nk = 1,975$$

$$\varepsilon = 10^\circ \quad R_1 = 1^m05 \quad nk = 2,290$$

En adoptant quatre ailes,  $n = 4$ , et en supposant que  $e$ , épaisseur du flux influencé, puisse être pris égal à 1,8, chiffre admis précédemment, on trouve :

$$\varepsilon = 8^\circ \quad k = \frac{a \times e}{R_1} = 0,493 \quad \theta = \frac{360}{2\pi} \times \frac{a}{R_1} = 15^{\circ}7/10$$

$$\varepsilon = 10^\circ \quad k = \frac{a \times e}{R_1} = 0,573 \quad \theta = \frac{360}{2\pi} \times \frac{a}{R_1} = 18^{\circ}2/10$$

Les rendements correspondant à chacune des deux solutions, sont donnés par le diagramme de la fig. 39 (Pl. 2). Pour :

$$\begin{aligned} \varepsilon = 8^\circ & \quad \eta = 0,665 \\ \varepsilon = 10^\circ & \quad \eta = 0,690 \end{aligned}$$

Nous avons obtenu précédemment, comme solution au même problème, une hélice à pas constant de même profil, ayant les dimensions suivantes :

$$R_1 = 1,088 \text{ m}, \quad n = 4, \quad \theta = 14^\circ 7/10, \quad \frac{P}{2R_1} = 1,08$$

Le rendement calculé avec les mêmes coefficients était de 0,68.

L'angle d'attaque à l'extrémité de l'aile était de  $8^\circ 7/10$ .

B. Traitons maintenant le cas où la vitesse de rotation reste à déterminer.

Nous pourrions choisir, pour nous rapprocher du rendement maximum maximorum :

$$x = 0,30 \quad \varepsilon = 10^\circ$$

et nous aurons :

$$\omega^2 = 2\pi \frac{\delta}{g} \frac{c^4 f_6(x)}{k' P_1} = 1540 \quad \text{pour } k' = 1.$$

D'où les valeurs :

$$\omega = 39,2 \quad N = 374, \quad R_1 = \frac{16,66}{39,2 \times 0,3} = 1^m 42.$$

$$\text{Avec } n = 4, \quad e = 1,8, \quad \theta = 23^\circ 7/10.$$

Le rendement est égal à 0,76, en supposant les mêmes coefficients que précédemment.

Nous avons obtenu, comme solution au même problème, page 86, une hélice à pas constant ayant les dimensions suivantes :

$$R_1 = 1^m 372, \quad n = 4, \quad \varepsilon = 18^\circ 5/10,$$

le nombre de tours N étant égal à 460.

Le rendement calculé avec les mêmes coefficients était de 0,745.

REMARQUE. — On voit que le rendement de l'hélice à angle d'attaque constant n'est pas sensiblement supérieur au rendement de l'hélice à pas constant, toutes choses restant égales.

Nous avons obtenu 1,5 % de plus avec la première, mais nous avons été conduit à adopter, par contre, de plus grandes dimensions et un nombre de tours plus faible.

Si les hélices à angle d'attaque constant accusent un meilleur rendement aux essais, ce qui, d'ailleurs, n'a pas été établi à notre connaissance, il faut en conclure qu'elles sont surtout mieux profilées, la question du profil des pales jouant, à notre sens, un rôle prépondérant au point de vue du rendement maximum.

## CHAPITRE II.

### Valeur de la poussée pour des hélices sustentatrices, en mouvement de translation.

Nous examinerons, dans ce chapitre, comment se modifie l'expression de la poussée de l'hélice, que nous avons évaluée pour le point fixe, au § 10, page 51, lorsque cette hélice se déplace *perpendiculairement à son axe de rotation*.

Pour ne pas nous heurter à des difficultés insurmontables, considérons une pale d'hélice comme constituée par une surface  $mnpq$  (fig. 41), inclinée d'un angle uniforme  $\alpha$  sur le plan de rotation, et appliquons les formules du plan mince, comme si tous les éléments de la surface étaient animés d'une vitesse d'entraînement  $u = \omega R$ , égale à la vitesse du centre de poussée  $s$  de la surface.

Si nous représentons par  $c$  la vitesse absolue de translation de l'axe, la vitesse relative du centre de poussée  $s$ , sera donnée par le triangle des vitesses  $sgh$ ,  $gs$  représentant la vitesse absolue de l'air par rapport à la pale,  $gh$  la vitesse d'entraînement.

L'angle d'attaque de la vitesse n'est plus  $\alpha$  comme au point fixe, mais  $\varepsilon$ , angle formé par l'intersection du plan  $de$  perpendiculaire au plan de rotation de l'hélice, avec le plan de la pale d'une part et le plan horizontal d'autre part.

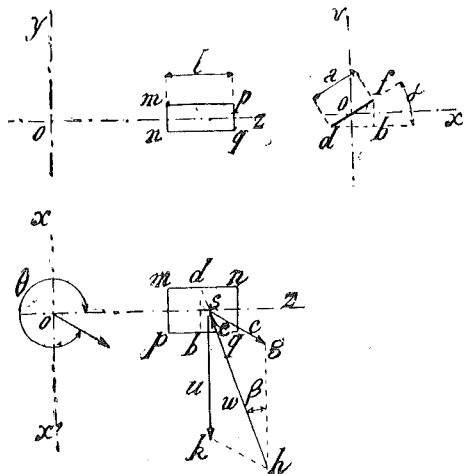


Fig. 41.

Evaluons  $\varepsilon$  en fonction de  $\beta$  et de  $\theta$ , angle de l'axe la pale avec la direction de la vitesse absolue  $c$ .

Dans le triangle  $dbf$  :

$$\begin{aligned} db &= df \cos \alpha = a \cos \alpha \\ bf &= df \sin \alpha = a \sin \alpha, \end{aligned}$$

Dans le triangle  $dbe$  :

$$de = \frac{db}{\cos \beta} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Dans le triangle rectangle ayant pour côtés la longueur  $de$  et la hauteur  $bf$ , et pour hypoténuse l'intersection du plan  $de$ , perpendiculaire au plan de rotation, avec le plan de la pale, on a également la relation :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{bf}{de} = \frac{a \sin \alpha}{a \cos \alpha} \cos \beta = \operatorname{tg} \alpha \cos \beta. \quad (40)$$

Comme il convient de ne prendre, dans les hélices sustentatrices, que des angles d'attaque relativement faibles, ainsi que le montrent les considérations que nous avons fait valoir au § 11 sur l'efficacité maximum, nous pourrions confondre le sinus de l'angle d'attaque avec la tangente de ce même angle, et écrire (form. II) :

$$P_1 = \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) \omega^2 \operatorname{tg} \varepsilon = K \omega^2 \operatorname{tg} \alpha \cos \beta \quad (41)$$

Or, dans le triangle des vitesses  $sgh$  :

$$\omega^2 = u^2 + c^2 + 2uc \cos \theta.$$

En posant, comme nous l'avons fait précédemment :

$$x = \frac{c}{u} = \frac{c}{\omega R},$$

$R$  étant ici le rayon du cercle décrit par le centre de poussée  $s$ , nous aurons :

$$P_1 = K u^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + x^2 + 2x \cos \theta) \cos \beta.$$

Lorsque  $x = 0$ , c'est-à-dire au point fixe, on voit que la formule donne :

$$P_1 = K u^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

En désignant cette valeur par  $P_f$ , nous aurons donc :

$$P_1 = P_f (1 + x^2 + 2x \cos \theta) \cos \beta. \quad (42)$$

Pour nous rendre compte de la variation de  $\omega$  et de  $\cos \beta$  en fonction de  $\theta$ , construisons pour chaque point de la circonférence décrite par la pale, le triangle des vitesses ;

nous pourrons simplifier les constructions en opérant comme suit :

Du centre  $o$  (fig. 42), représentant l'axe de l'hélice, portons  $oo' = c$ , vitesse de translation de l'hélice; du centre  $o'$ , décrivons une circonférence avec la longueur

$$o's' = u = \omega R,$$

comme rayon. Tous les triangles des vitesses auront pour côté commun,  $oo'$ , et pour sommet de l'angle opposé à  $oo'$ , un point situé sur la circonférence  $o's'$ .

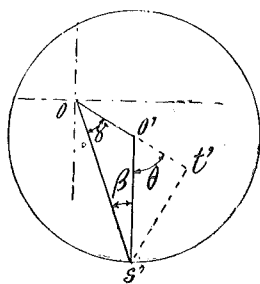


Fig. 42.

L'angle  $o's'o$  sera égal à  $\beta$ , la longueur  $o's'$  représentera  $\omega$ .

Cherchons à éliminer  $\beta$  de la formule 42, en déterminant cet angle en fonction de  $x$  et de  $\theta$ .

On voit sur la fig. 42 que

$$\theta = \beta + \gamma.$$

$$\text{Or } \text{tg } \gamma = \frac{s't'}{ot'} = \frac{u \sin \theta}{c + u \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{x + \cos \theta}.$$

$$\text{Donc } \text{tg } \beta = \frac{\text{tg } \theta - \text{tg } \gamma}{1 + \text{tg } \theta \text{tg } \gamma} = \frac{\sin \theta}{x + \cos \theta};$$

d'où nous pouvons tirer  $\text{tg } \beta$  :

$$\text{tg } \beta \left( 1 + \text{tg } \theta \frac{\sin \theta}{x + \cos \theta} \right) = \text{tg } \theta - \frac{\sin \theta}{x + \cos \theta},$$

$$\text{et } \text{tg } \beta = \frac{\sin \theta (x + \cos \theta) - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta (x + \cos \theta) + \sin^2 \theta} = \frac{x \sin \theta}{1 + x \cos \theta}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}} = \frac{1 + x \cos \theta}{\sqrt{1 + x^2 + 2x \cos \theta}}.$$

La formule (42) peut donc s'écrire :

$$P_1 = P_f (1 + x \cos \theta) \sqrt{1 + x^2 + 2x \cos \theta}. \quad (43)$$

On voit que la poussée fournie par une pale varie en fonction de  $\theta$ , lorsque  $x$  n'est pas nul, c'est-à-dire lorsque l'hélice ne fonctionne pas au point fixe.

Les variations de  $P_1$ , pendant un tour, sont d'autant plus grandes, que  $x$  est plus grand, c'est-à-dire que le rapport de la vitesse de translation de l'axe à la vitesse de rotation du centre de poussée de la pale, est plus élevé.

Nous avons tracé fig. 43, la courbe des variations de  $\frac{P_1}{P_f}$  dans un tour complet de l'hélice, en portant en

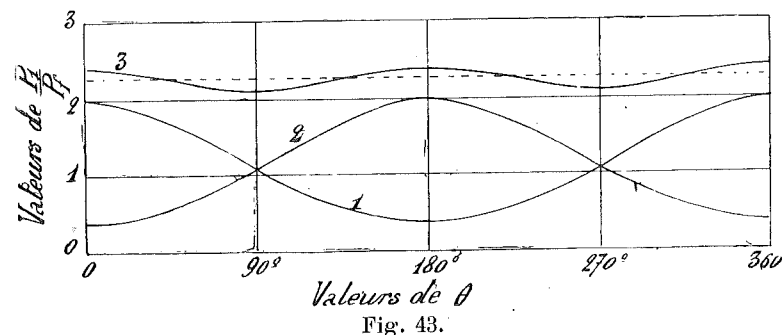


Fig. 43.

abscisse les arcs décrits par le centre de poussée à partir de la direction  $oo'$  (fig. 42), et en prenant pour  $x$  la valeur 0,4.

Comme il y a au moins deux pales, décalées de  $180^\circ$ , la poussée totale sera donnée par la courbe 3, obtenue en faisant la somme des ordonnées des courbes 1 et 2, la courbe 1 se rapportant à l'une des pales, la courbe 2 à l'autre, décalée par rapport à la première de  $180^\circ$ .

La résultante varie, comme on le voit, en intensité de 6% environ de la valeur moyenne pendant un demi-tour de l'hélice; ce qui est le plus grave, c'est que le point d'application de cette résultante ne se trouve plus constamment sur l'axe de l'hélice.



Lorsque l'axe des pales coïncide avec la direction du mouvement de translation, les valeurs de la poussée pour chacune des pales sont égales, et la résultante passe par l'axe de sustentation.

Lorsque les pales se trouvent dans la direction perpendiculaire à la vitesse de translation, le point d'application se trouve du côté de la pale qui subit la plus grande poussée, c'est-à-dire de la pale qui se déplace, à cet instant, dans le sens du mouvement de translation.

Fig. 44, nous avons tracé le diagramme des valeurs de  $\frac{P_1}{P_f}$  pour  $x=0,8$ . Les variations de la résultante pour deux pales sont cette fois plus importantes ; elles atteignent un maximum de 13 % environ de la valeur moyenne.

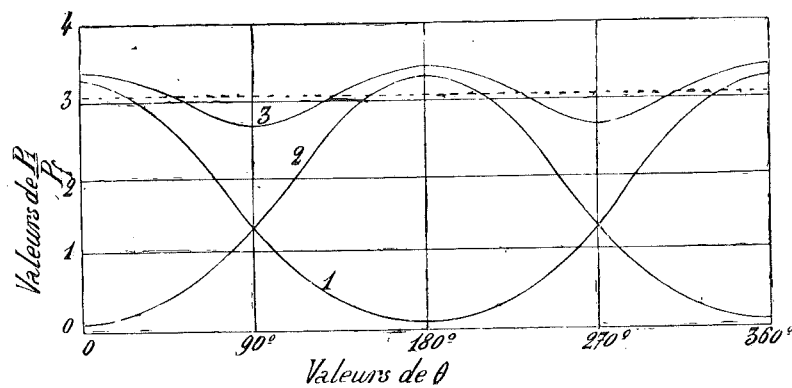


Fig. 44.

La valeur minimum de  $P_1$  étant voisine de 0, le point d'application de la résultante se déplace dans ce cas, depuis l'axe de l'hélice jusqu'à un point voisin du centre de poussée de l'une des pales pendant la durée d'un quart de tour, pour revenir ensuite coïncider avec l'axe, à la fin du quart de tour suivant.

On comprend toute l'importance de cette conclusion au point de vue de l'utilisation des hélices sustentatrices : à

mesure que la vitesse de translation augmente, il tend à se former un couple entre l'action de la pesanteur dirigée suivant l'axe de l'hélice, s'il n'y a qu'une seule hélice, et la résultante de la poussée fournie par les deux ailes ; ce couple varie deux fois dans un tour de 0 à un maximum, pour revenir à 0.

Avec une hélice à quatre ailes, la variation de l'intensité et du point d'application de la résultante est atténuée, mais elle reste toujours très sensible.

Une autre conclusion très intéressante et qui rend compte d'un fait d'expérience signalé par M. Riabouchinsky, c'est que la valeur moyenne de la résultante dans un tour, pour une valeur de  $x=0,8$ , est 50 % plus élevée que la résultante au point fixe.

Nous avons tracé (fig. 44), la ligne donnant la moyenne des ordonnées de la courbe 3 ; l'ordonnée de cette ligne est égale à 3 environ, c'est-à-dire que la moyenne de la résultante est égale à  $3 P_f$ , alors qu'au point fixe pour les deux pales, la résultante est évidemment égale à  $2 P_f$ .

### CHAPITRE III.

#### Au sujet du fonctionnement de l'hélice au point fixe.

Lorsqu'on examine les diagrammes des vitesses axiales, radiales et tangentielles mesurées par M. Riabouchinsky sur une hélice de 2 mètres de diamètre tournant au point fixe et ayant les profils indiqués fig. 3, on est frappé de voir que :

1) la vitesse axiale de sortie, mesurée à la périphérie, est négative, c'est-à-dire dirigée en sens inverse du courant d'air créé par l'hélice ;

2) la vitesse axiale, en amont de l'hélice est près des deux tiers de la vitesse axiale en aval.

Toutes ces vitesses ont été mesurées dans des plans distants de part et d'autre de l'hélice de 100 mm., au moyen d'un anémomètre.

Ainsi présentés, ces résultats semblent montrer, en effet, que

a) les éléments de la pale, voisins de la périphérie exercent une action nuisible au point de vue de la poussée;

b) qu'au point fixe, la vitesse relative de l'air par rapport à la pale ne fait pas un angle  $\alpha$  avec la direction de la pale, mais un angle beaucoup plus petit, donné par le triangle des vitesses où la vitesse absolue  $c$ , au lieu d'être nulle, prendrait une valeur considérable par rapport à la vitesse périphérique.

Et l'on en conclut tout naturellement que les résultats fournis par la théorie ne sauraient s'appliquer à l'hélice fonctionnant au point fixe, les phénomènes réels ne ressemblant nullement aux phénomènes très simples que la théorie envisage : vitesse radiale nulle, vitesse axiale nulle en aval de l'hélice; vitesse relative égale à la vitesse périphérique pour tous les éléments, depuis le centre jusqu'à l'extrémité de la pale.

Nul doute que les phénomènes accessoires beaucoup plus importants au point fixe que dans le fonctionnement de l'hélice à la vitesse normale de propulsion, n'aient pour effet de diminuer la poussée axiale et d'augmenter la puissance absorbée.

Encore convient-il d'analyser les résultats des expériences de M. Riabouchinsky avec méthode, avant de formuler des conclusions.

Fig. 45, nous avons représenté suivant  $oz$  la projection horizontale d'une pale, et nous avons tracé à l'échelle, dans deux plans distants de 100 mm. des plans limitant la pale, les triangles des vitesses dont les côtés de l'angle droit représentent respectivement la vitesse radiale et la vitesse axiale. Nous avons mené ensuite des courbes

tangentes à l'hypoténuse de chacun de ces triangles, aux points où les vitesses ont été mesurées. La fig. 44 représente donc en projection horizontale, la direction des filets fluides à leur entrée et à leur sortie de l'hélice.

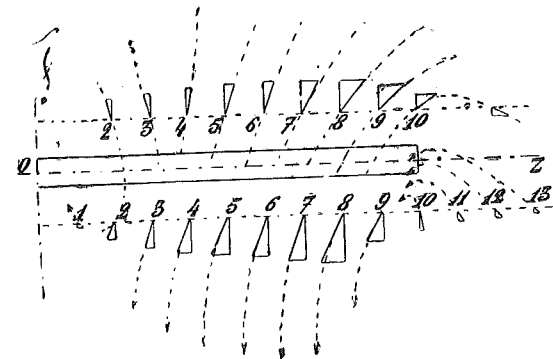


Fig. 45.

On observera que le dernier élément de la pale travaille dans le même sens que les autres, et que la vitesse axiale négative mesurée au point 10 s'explique par l'entraînement de particules d'air au voisinage de la périphérie.

Aux environs de l'axe où il se produit un vide par suite de l'appel d'air qui se crée vers la périphérie de l'hélice, il y a des tourbillonnements et les filets rebroussement chemin dès leur sortie, vers l'aval; mais au point de vue de la poussée comme de la puissance absorbée, les éléments de la pale voisins de l'axe, ne jouent, par suite de leur faible vitesse d'entraînement, qu'un rôle insignifiant.

Fig. 46, nous avons tracé, en procédant de la même manière, les triangles des vitesses dont les côtés de l'angle droit représentent respectivement la vitesse axiale et la vitesse tangentielle en chaque point 2, 3..., 10.

Si, par la pensée, nous faisons tourner de  $90^\circ$  autour de la vitesse axiale, chacun de ces triangles, la direction

de l'hypoténuse de chacun d'eux, donnera l'inclinaison de la trajectoire hélicoïdale des filets fluides, dans l'espace.

Ainsi que l'indique la théorie (voir pages 23-26), les filets décrivent à la sortie de l'hélice, dans l'espace, des trajectoires hélicoïdales dont l'inclinaison, sur l'axe du cylindre, croît avec l'inclinaison de la pale et avec la perte de vitesse relative résultant des frottements et des remous.

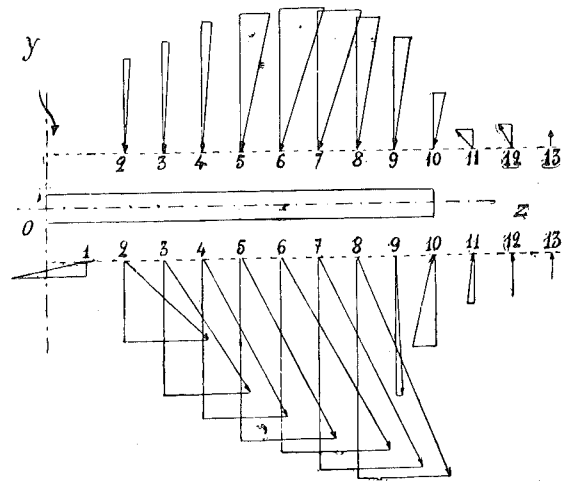


Fig. 46.

Lorsque l'angle  $\nu$  de la pale dépasse cependant 25 à 35°, c'est-à-dire pour les éléments distants de moins de  $0,5 R_1$  environ de l'axe, les phénomènes se compliquent, ainsi que le montrent les expériences sur le plan mince (fig. 10, page 14), et il en résulte des remous qui se traduisent sur la fig. 45, aux points 1, 2 et 3, par des valeurs très faibles de la vitesse absolue, et par une inclinaison très grande de celle-ci sur l'axe de l'hélice.

Ainsi présenté, l'examen des résultats d'expériences de M. Riabouchinsky montre que les phénomènes accessoires tout en étant très importants, au point fixe, n'ont

pas pour effet de transformer profondément le phénomène principal que la théorie envisage uniquement.

La vitesse axiale relativement considérable, mesurée en aval, ne doit pas être regardée comme étant celle d'un courant d'air régulier donnant une vitesse absolue d'entrée importante aux filets fluides. En effet, à 100 mm. en aval du plan limitant la pale, l'air est déjà influencé par celle-ci et dévié d'un angle voisin de l'angle  $\alpha$ .

Nous avons vu que l'épaisseur du flux influencé atteignait 1,5 et même 2,5 fois la largeur de la pale ; or, dans l'hélice essayée, la largeur de la pale à  $0,7 R_1$  de la périphérie, était de 240 mm. C'est parce que la déviation du flux en aval n'était pas encore complète et égale à l'angle  $\alpha$  d'inclinaison, que l'on n'a pas mesuré la même vitesse axiale de part et d'autre de l'hélice.

En ce qui concerne le changement de direction de la trajectoire hélicoïdale au passage du flux dans l'hélice, nous nous l'expliquons mal.

Nous ferons remarquer que ce phénomène n'a d'ailleurs été constaté d'une manière appréciable, qu'à partir de 300 tours. Pour les nombres de tours de 100 et 200, la vitesse tangentielle mesurée à l'entrée était sensiblement nulle.

# TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages
PRÉFACE . . . . .	I
TABLE DES NOTATIONS ADOPTÉES DANS L'OUVRAGE . . . . .	V
INTRODUCTION . . . . .	1

## CHAPITRE I<sup>er</sup>.

### Description des deux types principaux d'hélices aériennes. Éléments caractéristiques.

Hélice en bois. — Hélice en acier . . . . .	3
Pas de de l'hélice . . . . .	5
Remarque. — Hélice à angle d'attaque constant. Profil des pales . . . . .	6

## CHAPITRE II.

### Rappel des formules fondamentales de l'aérodynamique.

§ 1. Formules théoriques . . . . .	
Formule I . . . . .	8
Formule II. . . . .	10
Formule III. . . . .	10
§ 2. Comparaison entre les différentes formules proposées. . . . .	12
Remarque I. . . . .	13
Remarque II . . . . .	13
Remarque III . . . . .	13
Formule II' . . . . .	14
§ 3. Détermination des coefficients expérimentaux . . . . .	15
A. — Plaques planes . . . . .	15
Rapport $\frac{T'}{T}$ . . . . .	
Formule IV. . . . .	18
Remarque . . . . .	19

B. — Plaques courbes. . . . .	20
Rapport $\frac{T_v}{T}$ . . . . .	20
Formule V . . . . .	23

## CHAPITRE III.

## Théorie des hélices propulsives.

A. — § 4. Théorie élémentaire de l'hélice au point fixe. . .	23
Remarque . . . . .	26
B. — Théorie de l'hélice en mouvement de translation. . .	
§ 5. Formules fondamentales. . . . .	26
Remarque . . . . .	28
§ 6. Résolution des intégrales. . . . .	30
Intégrale I . . . . .	30
" II . . . . .	31
" III . . . . .	32
" IV . . . . .	33
" V . . . . .	34
" VI . . . . .	34
" VII . . . . .	34
§ 7. Expression de la poussée $P_T$ , de la puissance absorbée $\mathcal{E}'$ et du rendement $\eta$ . . . . .	35
Formules VI, VII et VIII. . . . .	35
§ 8. Conclusions . . . . .	36
Remarques . . . . .	37
Tableau III. . . . .	38
§ 9. Courbes de rendement. — Angle d'attaque le plus favorable. — Influence du profil des pales. . . . .	
A. — Profil droit . . . . .	39
Remarques I, II, III. . . . .	41
Remarque IV . . . . .	42
B. — Profil courbe . . . . .	44
Remarques I et II. . . . .	46
Remarque III . . . . .	47
Remarque IV . . . . .	48
Conclusions. . . . .	49
§ 10. Calcul du coefficient $k$ . — Influence du nombre d'ailes et du rapport $\frac{a}{R}$ . . . . .	

Formule VI. . . . .	51
Valeur de $k$ . . . . .	53
Remarque . . . . .	59
§ 11. Calcul de la poussée $P_i$ et la puissance observée $\mathcal{E}'$ . . .	59
Remarque . . . . .	65
Efficacité. . . . .	65
§ 12. Influence du rapport $\frac{R_o}{R_i}$ . . . . .	68
§ 13. Tracé du contour d'une pale. . . . .	69

## CHAPITRE IV.

## Vérification expérimentale des formules proposées.

A. — § 14. Au point fixe. . . . .	
Première série d'expériences . . . . .	74
Deuxième série d'expériences. . . . .	75
Troisième série d'expériences. . . . .	77
B. — § 15. En mouvement de translation suivant l'axe. . . . .	79
Conclusions. . . . .	81

## CHAPITRE V.

## Calcul des hélices aériennes.

Problème I . . . . .	83
Exemples. . . . .	86
A. — Le nombre de tours étant donné . . . . .	86
B. — Le nombre de tours restant à déterminer . . . . .	89
Problème II. . . . .	91
Exemple . . . . .	92
Problème III . . . . .	96
Problème IV . . . . .	97
Conclusions générales . . . . .	98

## APPENDICE

## CHAPITRE I.

## Hélices à angle d'attaque constant.

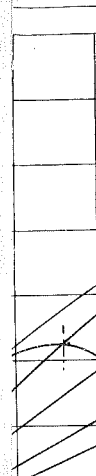
§ 1. Formules fondamentales . . . . .	101
§ 2. Résolution des intégrales.	
Intégrale I. . . . .	103
Intégrales II et III. . . . .	104
§ 3. Expressions de la poussée $P_1$ , de la puissance absorbée $\mathcal{C}'$ et du rendement $\eta$ . . . . .	105
Remarques I et II. . . . .	106
§ 4. Courbes de rendement . . . . .	106
§ 5. Calcul des hélices à angle d'attaque constant . . . . .	108

## CHAPITRE II.

Valeur de la poussée pour les hélices sustentatrices, en mouvement de translation . . . . .	113
Formule. . . . .	114
Diagrammes et conclusions . . . . .	116

## CHAPITRE III.

Au sujet du fonctionnement de l'hélice au point fixe. . . . .	119
---	-----



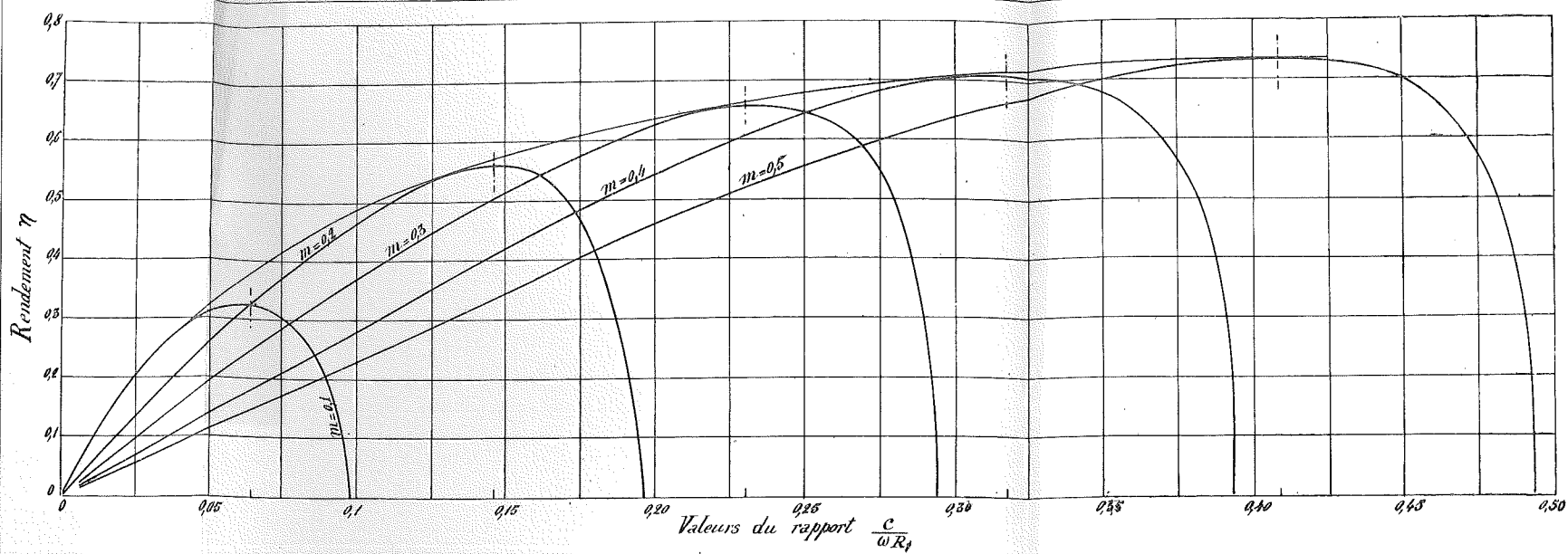


Fig. 17

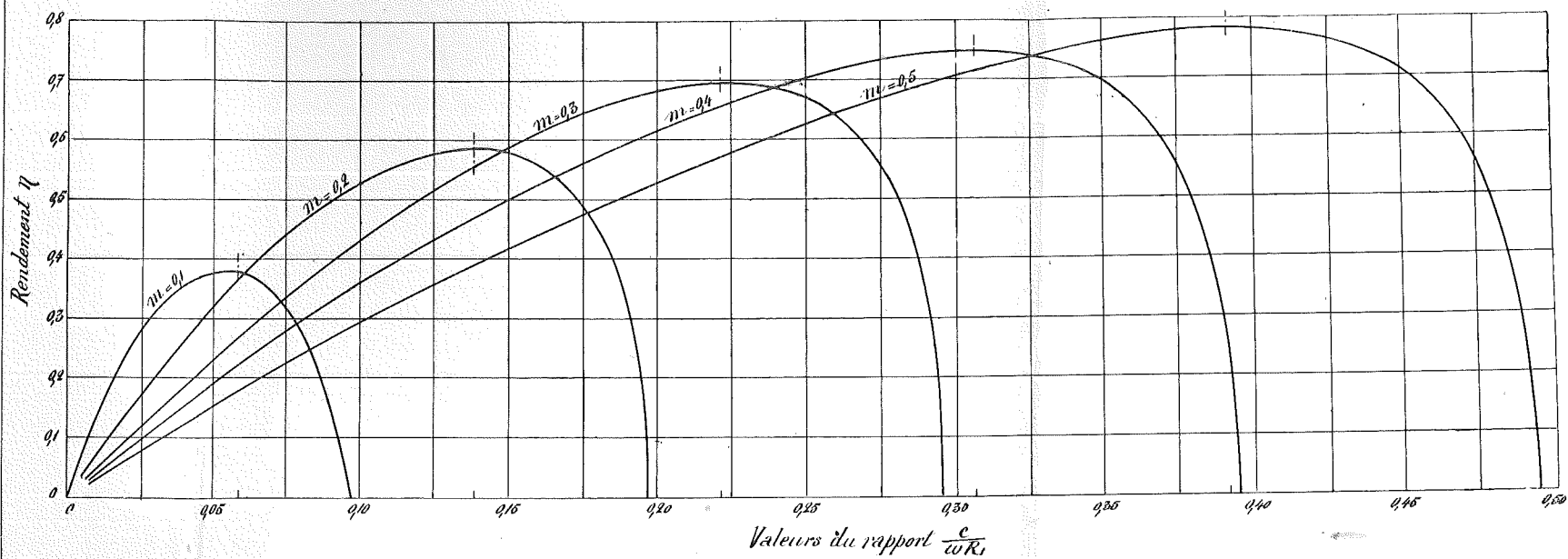


Fig. 19

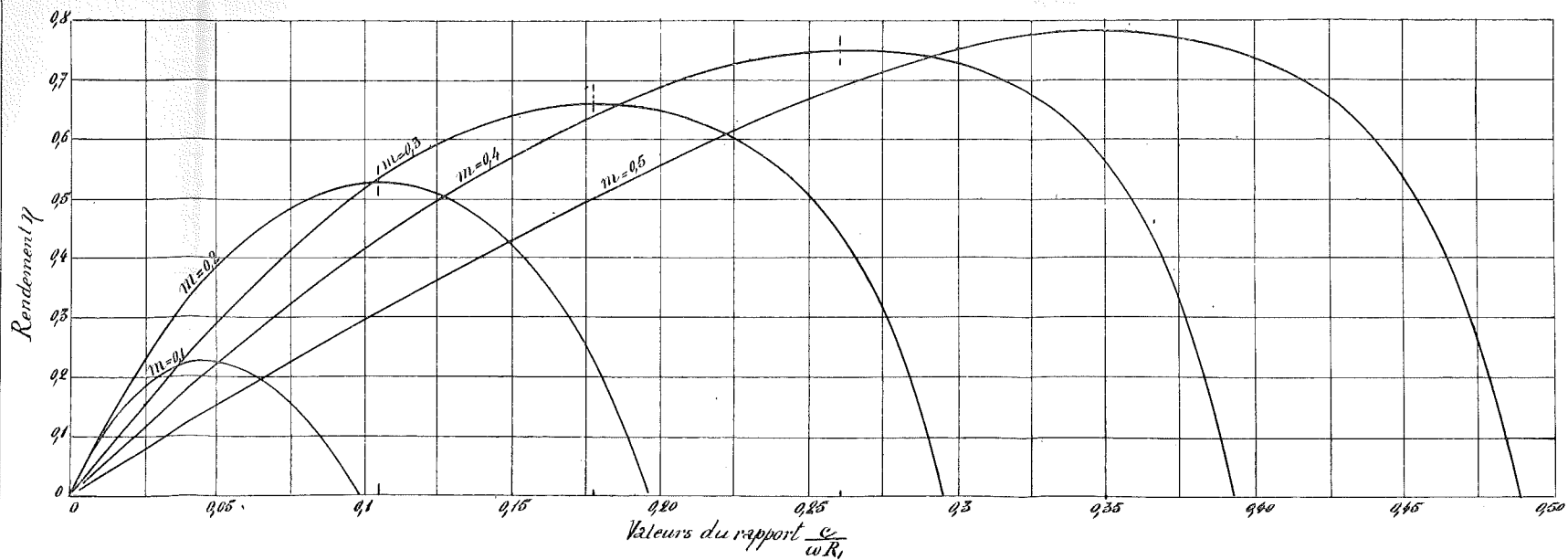


Fig. 21

Fig. 38.

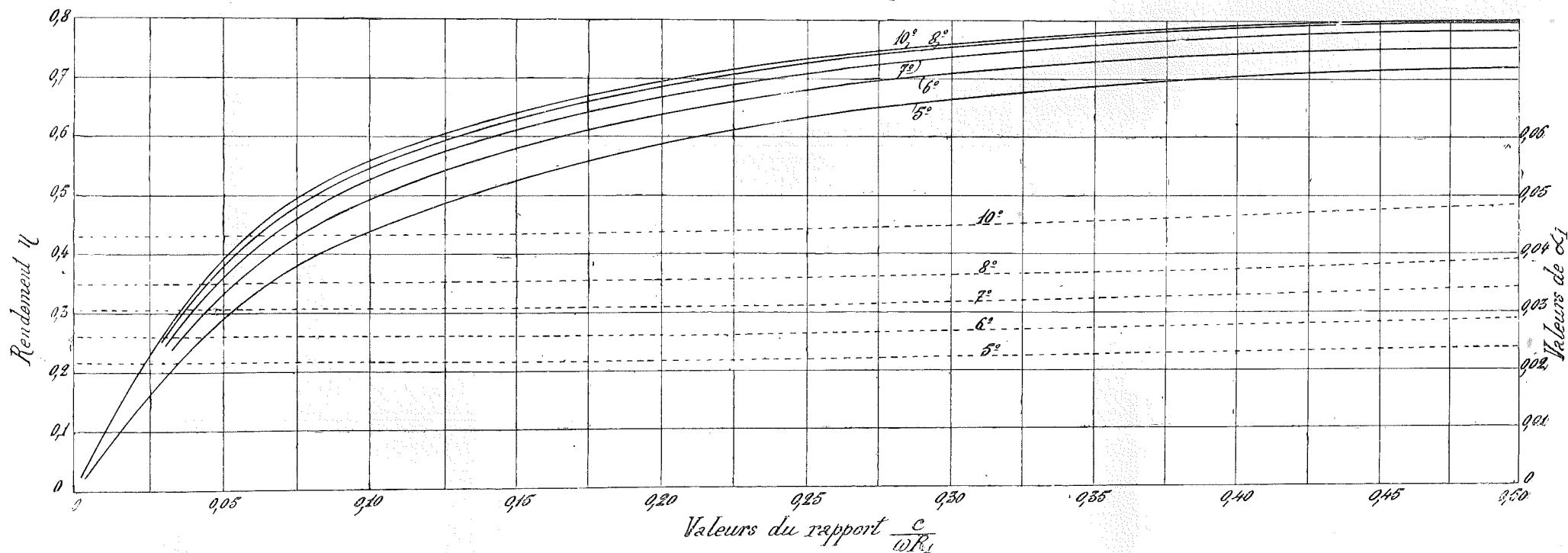
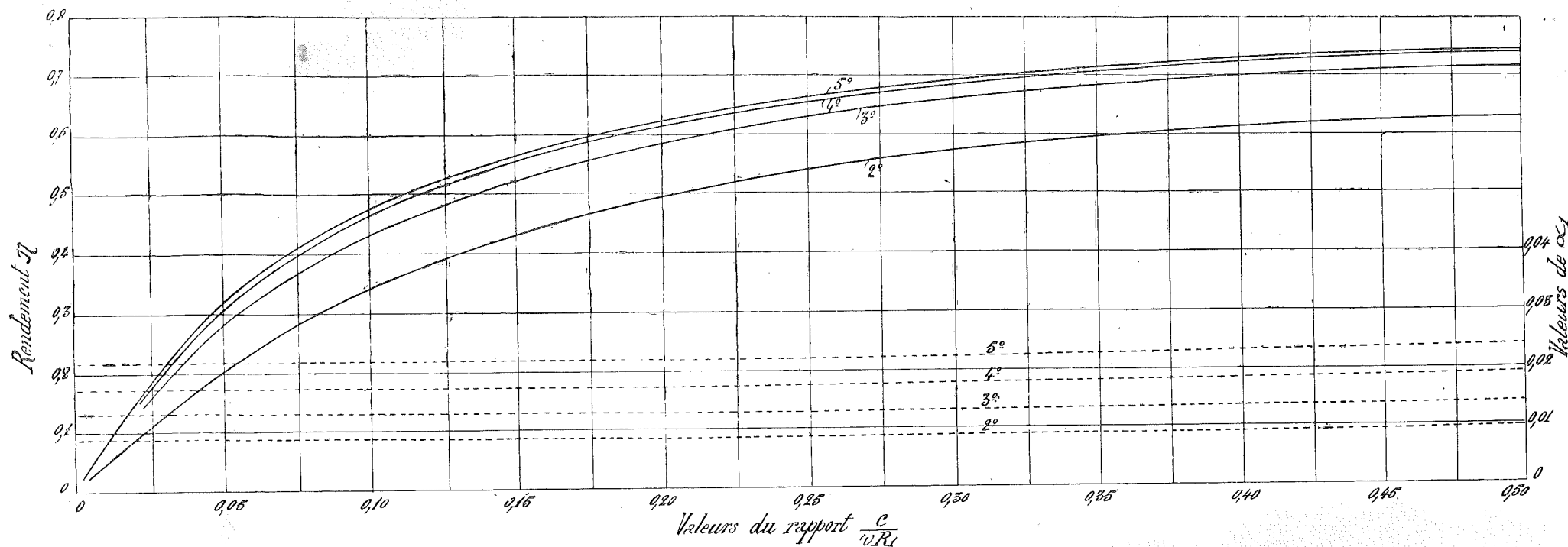


Fig. 39.