U. 2665 C Hutton André
2me E-M

UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Faculté Technique

Cours de
CONSTRUCTION DES MACHINES

**Compléments à l'usage de
la Section des Mécaniciens**

édité avec l'autorisation de

Monsieur le Professeur Ch. HANOCQ

par la **Société Coopérative de l'A. E. E. S.**

RODESTRA
Rue Jonckeu, 5
— LIÉGE —

1946

Bombée: pour que pour tout déplacement de la courroie sur la jante, il naisse des efforts ± complexes, rappelant la courroie sur ~~cett~~ le milieu de la jante. Mais il ne faut pas un profil trop bombé car alors $\vec{V}$ périphérique de la courroie n'est pas la même en tout point et où déformations.

CHAPITRE I.

CALCUL ET TRACES DES ORGANES D'ASSEMBLAGE DU VOLANT

Le calcul du poids à la jante d'un volant susceptible d'assurer un degré de régularité donné dans le fonctionnement d'une machine à piston, a été exposé au cours de mécanique appliquée aux machines alternatives. Ce calcul a conduit comme on se le rappelle à la détermination du $P.D^2$.

Le problème qui se pose ici est celui de la détermination des formes. Etant donné le $P.D^2$ à réaliser, il s'agit :

1°) d'établir le profil de la jante compte tenu de la destination du volant.

2°) de déterminer les tensions dans la jante, les bras et le moyeu.

3°) de calculer la section des bras et les assemblages à la jante et au moyeu pour que l'ensemble présente un coefficient de sécurité donné.

*

* *

1.- FORMES ET TRACES DE LA JANTE.

En ce qui concerne la section de la jante, il y a lieu de distinguer

1°) le cas du volant-poulie,

2°) le cas du volant servant uniquement de masse d'inertie.

PREMIER CAS : VOLANT-POULIE.

Dans le cas de volant-poulie, la largeur et la forme de la jante dépendent du mode de transmission employé.

a) Transmission par courroie.

La largeur l de la courroie étant connue, on en déduit la largeur de la poulie

$$l_1 = 1,07\ l + 50 \text{ mm.}$$

D'autre part, la jante devra être bombée suivant les indications fournies dans la première partie du cours, et l'épaisseur minimum de la jante sera fixée par la formule empirique

$$e = 0,01 \frac{D}{2} + 10 \text{ mm.}$$

Si la jante était simplement cylindrique, la courroie y glisserait aisément.

b) Transmission par câbles.

La largeur nécessaire découle du tracé et du nombre de gorges nécessaires.

Pour les deux modes de transmission, il y aura lieu de prévoir une couronne dentée généralement venue de fonte avec la jante, destinée à la mise en mouvement de la machine, en vue d'amener la manivelle, soit à la main, soit au moyen d'un moteur, à occuper une position favorable au démarrage.

Lorsque la manoeuvre se fait à la main, la denture présente les formes appropriées pour engrener avec un cliquet mis en mouvement au moyen d'un levier.

Si, au contraire, l'entraînement doit être réalisé par l'action d'un moteur, la denture est tracée en développante suivant les principes exposés dans la deuxième partie du cours d'Eléments de Machines

La jante est constituée dans le cas du volant-poulie d'une couronne d'épaisseur minimum tracée en utilisant les données rappelées ci-dessus, renforcée dans l'axe par une couronne de largeur et d'épaisseur calculée pour donner à la masse totale le $P.D^2$ imposé.

On pourra tenir compte de ce que le poids du moyeu et des bras ramené au diamètre D représente environ $0,1\ P$.

Sur cette base, on pourra fixer les dimensions de la couronne intérieure; en effet, il suffira d'écrire (fig. 2),

$$P_1 . r_1^2 + P_2 . r_2^2 = 0,9\ P . \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{0,9}{4} P . D^2 . \qquad (1)$$

Le rayon r_1 et le poids P_1 résultant du tracé de la couronne extérieure. Le poids P_2 peut s'exprimer en fonction de r_1 et r_2 puisque

$$P_2 = \delta . 2\pi . r_2 . e_2 . l_2 = \delta . 2\pi . r_2 . (r_1 - \frac{e_1}{2} - r_2) . 2\ l_2 . \qquad (2)$$

La largeur l_2 étant choisie de façon à pouvoir placer les boulons d'assemblage de part et d'autre de la couronne intérieure, on voit que les relations (1) et (2) fixent la valeur de r_2 en fonction de la donnée fondamentale $P.D^2$.

La valeur de D et partant celle de r_1 résultera, elle, de la vitesse à la jante choisie en s'inspirant des considérations exposées au chapitre des courroies et câbles.

DEUXIEME CAS : VOLANT SERVANT UNIQUEMENT DE MASSE D'INERTIE.

Lorsque le volant ne doit pas servir de poulie, la largeur et la vitesse à la jante ne sont pas fixées par des considérations de bon fonctionnement ou d'économie. La vitesse est limitée par une question de sécurité, suivant le matériau employé : disons que pour les volants en fonte on ne dépasse généralement pas 28 à 30 m./sec.

Lorsque les valeurs du $P.D^2$ sont très élevées et que l'on est obligé d'avoir recours à des vitesses périphériques dépassant 30 m/sec, on

Cylindres de laminoir: volants avec 32 m/sec. ce qui semble exceptionnel. Mais en réalité le coût du volant $\nearrow$ qd la v périph. $\searrow$ car la masse réduite $\nearrow$ pour pouvoir amener le m̂ Kx.

dispose des solutions suivantes :

a) jante en fonte, bras en fer,
b) jante et bras en acier coulé.

La forme rationnelle de la jante dans les deux cas est la forme en U renversé comme l'indique la figure 3.

La longueur l_1 et la hauteur h_1 étant choisies de manière à pouvoir réaliser le $P.D^2$ imposé sans devoir recourrir à des épaisseurs de métal trop grandes qui introduiraient des tensions internes préjudiciables à la sécurité.

L'épaisseur e_1 résulte de la forme des assemblages adoptés pour réunir les différentes parties de la jante : la largeur l_1 est déterminée dès que l'on s'est fixé une largeur limite e_1 .

Le volant peut être construit en une ou plusieurs pièces. Jusqu'à 2 m. on peut concevoir le volant en une pièce avec moyeu fendu, en vue d'assurer le retrait. Entre 2 et 6,5 m. on le construit en deux pièces assemblées à la jante et au moyeu par des boulons ou par des frettes. Au delà de 6,5 m., on le construit en 4 pièces assemblées de la même façon.

Le nombre de bras est de 6 ou 8. Si le volant est très large, les bras sont dédoublés et disposés dans deux plans symétriques par rapport au plan moyen. Nous reviendrons ultérieurement sur la question de la forme des bras après l'étude de la résistance de la jante et des bras.

Disons cependant dès maintenant que la section la plus employée est la section elliptique ou la section dérivant de cette dernière et représentée figure 4.

Généralement, les bras s'élargissent vers le moyeu où se trouve leur section dangereuse.

*
* *

2.- ETUDE DES CONDITIONS DE RESISTANCE DE LA JANTE ET DES BRAS.

Les efforts qui se développent dans la jante d'un volant sont dus :

a) à la force centrifuge,
b) à la force d'inertie tangentielle due aux variations de vitesse de rotation,
c) à la force transmise à la jante par le lien de transmission lorsque le volant sert de poulie.

Si la jante était entièrement libre de se dilater, c'est-à-dire si les bras n'établissaient pas de liaison entre la jante et le moyeu dans le SENS RADIAL, le force centrifuge n'aurait d'autre effet que de soumettre les fibres de la jante à des extensions, et le calcul des tensions pourrait se faire très simplement.

La présence des bras a pour effet de donner à la jante soumise à la force centrifuge une forme lobée qui implique à la fois des tensions d'extension et de flexion que la théorie ci-après permet de déterminer..

VOLANT SOUMIS A L'ACTION DE LA FORCE CENTRIFUGE SEULE.

Nous examinerons d'abord le cas le plus simple de la jante soumise à la force centrifuge seule.

Examinons ce qui se passe pour un élément d'angle au centre $d\varphi$ pris dans l'arc de la jante compris entre deux bras séparés par un angle 2α (fig. 5).

Cet élément isolé est en équilibre sous l'action de la force extérieure dF (force centrifuge élémentaire) et des forces de liaison :

a) forces normales à la section N d'une part et $N + dN$ d'autre part,
b) forces tangentielles ou efforts tranchants T d'une part et $T + dT$ d'autre part,
c) moments fléchissants M d'une part et $M + dM$ d'autre part.

Pour trouver les valeurs N, T et M dans une section quelconque, il suffira d'exprimer les conditions d'équilibre qui se traduisent par trois équations. Les deux premières expriment que la somme des projections de toutes les forces sur la normale puis sur la tangente est égale à zéro. La troisième étant obtenue en exprimant que la somme des moments de toutes les forces par rapport au centre de gravité de la section est égal à zéro.

Explicitement, on obtient ainsi :

$$dF + T\cos\frac{d\varphi}{2} - (T + dT).\cos\frac{d\varphi}{2} - N.\sin\frac{d\varphi}{2} - (N + dN).\sin\frac{d\varphi}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$N.\cos\frac{d\varphi}{2} + T.\sin\frac{d\varphi}{2} - (N + dN).\cos\frac{d\varphi}{2} + (T + dT).\sin\frac{d\varphi}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$M - T.\cos\frac{d\varphi}{2}.R\frac{d\varphi}{2} - (T + dT).\cos\frac{d\varphi}{2}R\frac{d\varphi}{2} - (M + dM) = 0 \qquad (3)$$

équations qui simplifiées en négligeant les infiniments petits du second ordre deviennent

$$\frac{\sigma.\delta}{g}R^2.\omega^2.d\varphi - dT - N.d\varphi = 0 \qquad (I)$$

$$- dN + T.d\varphi = 0 \qquad (II)$$

$$- dM - T.R.d\varphi = 0\,. \qquad (III)$$

Puisque dF a pour valeur

$$dF = \frac{\sigma.\delta}{g}R^2.\omega^2.d\varphi$$

expression dans laquelle σ désigne la section de la jante, δ le poids spécifique, et ω la vitesse angulaire.

Pour résoudre ces équations différentielles, tirons de la première la valeur de $\frac{dT}{d\varphi}$ et dérivons. Nous obtenons

$$\frac{d^2 T}{d\varphi^2} = - \frac{dN}{d\varphi} = - T \qquad (IV)$$

Cette équation (IV) peut se résoudre aisément en posant

$$\frac{dT}{d\varphi} = y$$

on obtient, en effet,

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dT} \cdot \frac{dT}{d\varphi} = y \frac{dy}{dT} = - T$$

ou

$$y.dy = - T.dT$$

ou encore, par intégration

$$y^2 = - T^2 + c^2$$

d'où

$$y = \sqrt{- T^2 + c^2}$$

et, remplaçant y par sa valeur, il vient alors

$$d\varphi = \frac{dT}{\sqrt{- T^2 + c^2}}$$

qui donne directement $(\varphi + c_1) = \pm \text{arc sin} \frac{T}{c}$

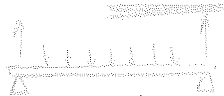
soit $T = \mp c.(\sin\varphi.\cos c_1 + \sin c_1 .\cos\varphi)$

En posant

$c.\cos c_1 = a$ $\qquad$ $c.\sin c_1 = b$

il viendra $T = \mp (a.\sin\varphi + b.\cos\varphi)$ $\qquad$ (V)

Pour déterminer les constantes a et b nous disposons de deux conditions au limites. En effet, en désignant par T_o la moitié de la réaction d'un bras, nous obtenons



pour $\varphi = 0$ $\qquad T = - T_o = - b$ $\qquad$ (VI)

pour $\varphi = 2\alpha$ $\qquad T = + T_o = - (a.\sin 2\alpha + b.\cos 2\alpha)$ $\qquad$ (VII)

b étant essentiellemen positif puisque la direction de F est choisie comme positive.

D'où, en comparant VI et VII

$$+ b = - (a.\sin 2\alpha + b.\cos 2\alpha)$$

et

$$a = - b \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = - T_o \frac{2 \cos\alpha}{2 \sin\alpha.\cos\alpha} = - \frac{T_o}{tg\,\alpha}$$

En remplaçant les valeurs trouvées pour a et b dans l'équation V, nous obtenons :

$$T = - T_o.(- \cos\alpha.\sin\varphi + \sin\alpha.\cos\varphi) \frac{1}{\sin\alpha} = + T_o \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\alpha}$$

Ce qui nous conduit aux valeurs suivantes pour T, N et M en fonction de T_0

$$T = T_0 \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \alpha} \qquad \text{(IX)}$$

$$N = \frac{\sigma.\delta}{g} \omega^2.R^2 - T_0 \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \qquad \text{(X)}$$

$$M = - R.N + c = - \frac{\sigma.\delta}{g} \omega^2.R^3 + T_0.R \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} + c_2 \qquad \text{(XI)}$$

Pour déterminer la constante c_2 nous ferons appel à la relation

$$\int_0^{2\alpha} \frac{M}{E.I} ds = 0$$

que nous croyons nécessaire d'établir tout d'abord.

En partant de la relation

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E.I}$$

et en tenant compte de ce que

$$\varrho.d\varphi = ds \qquad\qquad \varrho'.d\varphi' = ds'$$

il vient en effet, $$\frac{d\varphi'}{ds'} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{E.I}$$

ou $$\left(d\varphi' \frac{ds}{ds'} - d\varphi\right) = \frac{M}{E.I} ds$$

et, ayant remarqué que $\frac{ds}{ds'}$ peut être pris égal à l'unité, il vient, en intégrant,

$$\int_0^{2\alpha} d\varphi' - \int_0^{2\alpha} d\varphi = \int_0^{2\alpha} \frac{M}{E.I} ds = 0$$

Les deux termes du premier membre étant égaux chacun à 2α par raison de symétrie dans les déformations de la jante.

En tenant compte de ce que la section est supposée constante et que partant I est constant, on peut tirer de là, en remplaçant M par sa valeur,

$$- \int_0^{2\alpha} \frac{\sigma.\delta}{g} \omega^2.R^4.d\varphi + T_0.R^2 \int_0^{2\alpha} \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} d\varphi + \int_0^{2\alpha} c_2.R.d\varphi = 0$$

soit $$- \frac{\sigma.\delta}{g} \omega^2.R^4.2\alpha + 2 T_0.R^2 + 2 c_2.R.\alpha = 0$$

d'où $$c_2 = \frac{\sigma.\delta}{g} \omega^2.R^3 - \frac{T_0}{\alpha} R$$

M est donc à présent déterminé en fonction de T_0 :

$$M = T_0.R.\left[\frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha}\right] \qquad \text{(XII)}$$

Les expressions IX, X et XII peuvent être représentées graphiquement et ce d'une façon simple en prenant comme variable indépendante $\sin(\varphi - \alpha)$ qui est proportionnel aux abscisses mesurées à partir de l'axe de symétrie (fig. 6).

En déterminant les valeurs particulières de T, M et N pour $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = 2\alpha$. On voit que les diagrammes représentatifs doivent avoir l'allure indiquée fig. 6.

Détermination de T_o .

Les valeurs de N, T et M ne sont toutefois connues qu'en fonctions de T_o lequel reste à déterminer.

La traction des bras sur la jante représentée par $2\ T_o$ est liée à la déformation des bras par rapport à la déformation de la jante. On peut s'en rendre compte physiquement en imaginant les bras constitués d d'une matière présentant un coefficient d'élasticité très faible (c'est-à-dire très extensible); la jante tendrait à rester parfaitement circulaire, et le tension radiale dans les bras serait nulle.

Pour rechercher T_o force est donc d'établir d'une part l'allongement des bras sous l'action de la force $2\ T_o$ provenant de la jante et de la force centrifuge appliquée aux bras et d'autre part d'établir l'allongement de la jante sous l'action de la tension normale N , puis de rechercher la relation qui lie les deux déformations.

Pour ce qui concerne l'allongement des bras, nous pouvons tout d'abord évaluer la force appliquée dans une section à la distance ρ de l'axe de rotation

$$F_1 = 2\ T_o + \int_\rho^R \frac{\sigma_1 . \delta_1}{g}\, \omega^2 . \rho . d\rho$$
$$= 2\ T_o + \frac{\sigma_1 . \delta_1}{g}\, \omega^2\, \frac{R^2 - \rho^2}{2}$$

σ_1 désignant la section moyenne du bras, δ_1 le poids spécifique de la matière constituant le bras.

L'allongement ΔR du bras (en confondant le rayon à la naissance du bras avec le rayon moyen de la jante, approximation généralement suffisante) sera donnée par

$$\Delta R = \int_r^R \frac{F}{\sigma_1 . E_1}\, d\rho = \frac{2\ T_o}{\sigma_1 . E_1}(R - r) + \frac{\delta_1}{g . E_1} . \frac{\omega^2}{6}(R - r).(2\ R^2 - R.r - r^2) \quad \text{(XIII)}$$

Pour ce qui concerne l'allongement de l'élément de jante correspondant à $2\ \alpha$ nous pourrons le calculer par la relation

$$2\int_o^\alpha \frac{N.R.d\varphi}{\sigma . E} = 2\int_o^\alpha \frac{R}{\sigma . E}\left[\frac{\sigma . \delta}{g}\, \omega^2 . R^2 - T_o . \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha}\right] . d\varphi$$
$$= 2\left[\frac{\delta}{g . E}\, \omega^2 . R^2 . \alpha - \frac{T_o}{\sigma . E}\, R\right]$$

Si nous admettons à présent que sous l'action de la tension N la longueur développée de la fibre moyenne déformée d'angle au centre 2α ne diffère pas sensiblement de la longueur de l'arc de cercle de rayon $R + \Delta R$, nous pourrons écrire que

$$2\,\alpha.(R + \Delta R) - 2\,\alpha.R = 2\int_0^{\alpha} \frac{N.R}{\sigma.E}\,d\varphi$$

et nous en déduirons

$$\Delta R = \frac{\delta}{g.E}\,\omega^2.R^3 - \frac{T_o.R}{\sigma.E}\cdot\frac{1}{\alpha} \qquad \text{(XIV)}$$

En égalant les deux valeurs de ΔR fournies par les équations (XIII) et (XIV), nous obtenons une relation donnant la valeur de T

$$T_o = \frac{\delta.\omega^2.R^2}{g}\cdot\frac{\frac{E_1}{E} - \frac{\delta_1}{\delta}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)\right]}{2\left(1 - \frac{r}{R}\right) + \frac{\sigma_1.E_1}{\sigma.E}\cdot\frac{1}{\alpha}}\,\sigma_1 \qquad (XV)$$

*

*   *

3.- APPLICATION DES FORMULES TROUVEES AU CAS SIMPLE DU VOLANT ENTIEREMENT EN FONTE.

Dans ce cas, la formule qui donne T_o se simplifie du fait que $E_1 = E$ et $\delta_1 = \delta$

$$T_o = \frac{\delta}{g}\,\omega^2.R.\sigma_1\,\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{R}}{2\left(1 - \frac{r}{R}\right) + \frac{\sigma_1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\alpha}}$$

et l'on peut déduire la valeur de $\frac{F_1}{\sigma_1}$ maximum (pour $\rho = r$ rayon du moyeu)

$$\frac{F_1}{\sigma_1} = \frac{\delta}{g}\,\omega^2.R^2.\left[\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{R}}{\left(1 - \frac{r}{R}\right) + \frac{\sigma_1}{\sigma}\cdot\frac{1}{2\alpha}} + \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{2}\right].$$

La quantité entre crochets ne dépendant que des rapports $\frac{r}{R}$, $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ et de l'angle 2α c'est-à-dire du nombre de bras, on peut déduire de la formule que, pour tous les volants géométriquement semblables, les points homologues des bras sont soumis aux mêmes tensions si la vitesse périphérique reste la même.

Si l'on examine les valeurs de $\frac{T}{\sigma}$ et $\frac{N}{\sigma}$ on peut en déduire la même conclusion pour la jante.

En ce qui concerne les tensions de flexion, on peut les évaluer en partant de la formule d'équarrissage et en utilisant les relations (XII) et (XV), il vient en effet :

$$t = \frac{M}{\left(\frac{I}{v}\right)} = \frac{\delta}{g}\,\omega^2.R^2\;\frac{R.\sigma_1}{\frac{I}{v}}\;\left[\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{R}}{2\left(1 - \frac{r}{R}\right) + \frac{\sigma_1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\alpha}}\right].\left[\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right]$$

formule qui montre qu'à vitesses périp'ériques égales, la tension maximum de flexion est constante pour tous les volants géométriquent semblables, puisque le module de flexion varie comme le cube du rapport λ de similitude et que, partant, la quantité $\frac{R.\sigma}{\frac{I}{v}}$ reste constante quelle que soit la valeur de λ .

REMARQUE.- Il est intéressant de chercher quelle est la tension dans une couronne de rayon moyen R entraînée à la vitesse $\omega.R$ dans l'hypothèse où les bras n'exercent aucune action radiale c'est-à-dire lorsque $T_o = 0$

On voit, d'après les formules IX, X et XII que

$$T = 0 \qquad\qquad N = \frac{\sigma.\delta}{g}\,\omega^2.R^2 \qquad\qquad M = 0$$

La valeur de N pourrait se déterminer directement en notant que la somme des composantes verticales de dF pour une demi couronne est égale à 2 N

$$2\,N = \int_0^{\pi} dF.\sin\varphi = \int_0^{\pi} \frac{\sigma.\delta}{g}\,R.\omega^2.R.\sin\varphi.d\varphi = 2\,\frac{\sigma.\delta}{g}\,R^2.\omega^2$$

et que la tension par unité de surface doit être par conséquent

$$t = \frac{\delta}{g}\,R^2.\omega^2$$

En prenant la résistance à la rupture égale à 12 kg/mm^2 ,on trouve que l'anneau devrait se rompre à la vitesse périphérique de 130 m/sec.

Des expériences effectuées sur des volants réduits en fonte, ont montré qu'en raison des assemblages malgré la présence des bras, cette vitesse de 130 m/sec correspondait généralement à la rupture.

*
* *

4.- CALCUL DU VOLANT SOUMIS A L'ACTION DES EFFORTS TANGENTIELS.

L'origine des efforts tangentiels est celui des forces d'inertie provenant des variations de vitesse dans le temps, le volant ayant pour mission de régulariser le couple de la machine.

Lorsque le volant sert de poulie, l'effort tangentiel utile vient s'ajouter aux forces d'inertie.

L'intervention de ces efforts tangentiels a pour effet de soumettre chacun des bras à une force

$$N_1 = K.2\alpha$$

la force élémentaire ayant pour valeur :

$$\frac{\sigma.R.\delta}{g}\,d\varphi.R\,\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sigma.\delta}{g}\,R^2\,\frac{d\omega}{dt}\,d\varphi = K.d\varphi \quad .$$

Connaissant $\frac{d\omega}{dt}$ on peut, comme on voit, déterminer K et partant N_1 .

Les tensions introduites par N_1 dans la jante sont faibles et négligeables. Pour le bras, elles ne peuvent être négligées mais on reste assez près de la vérité en supposant le bras encastré au moyeu et fixé à la jante par une rotule. Dans ce cas,

$$M = N_1 .(R - r)$$

$$R_f(\text{à l'encastrement}) = \frac{M_f}{\frac{I}{v}}$$

$$\lambda = \left[R_f + \frac{F_1}{\sigma_1}\right] .$$

Les forces en jeu pour assurer l'équilibre de l'élément limité par deux plans faisant entre eux un angle $d\varphi$ sont respectivement (fig. 7)

1°) N et N + dN

2°) T et T + dT

3°) $K.d\varphi$ appliqué au centre de gravité de l'élément.

En projetant ce système de forces sur la tangente puis sur la normale, on obtient les deux équations suivantes

$$N.d\varphi + dT = 0$$

$$K.d\varphi + dN - T.d\varphi = 0 \quad .$$

Un troisième équation est fournie par la relation des moments par rapports au centre de rotation,

$$dM - K.R.d\varphi - R.dN = 0 \quad .$$

On est conduit à une relation analogue à celle trouvée dans le premier cas, mais en fonction de N

$$\frac{d^2N}{d\varphi^2} = \frac{dT}{d\varphi} = -N \quad .$$

La détermination des constantes d'intégration est plus difficile que dans le premier cas, mais les conclusions sont les suivantes.

Le moment à la jante est faible ou négligeable vis-à-vis du moment créé par la force centrifuge. Seules les tensions dans les bras provenant de la flexion sont considérablement accrues et il n'est pas possible de ne pas en tenir compte. Seulement, on ne commet pas d'erreur appréciable en supposant que chaque bras se comporte comme s'il était soumis à une force $\frac{N_f}{n}$ en restant articulé à la jante.

CAS DU VOLANT D'INERTIE.

Etant en possession de la courbe de ralentissement $\omega = f(t)$ (fig.8), on détermine facilement $\frac{d\omega}{dt}$ le plus défavorable en traçant la tangente la plus raide à la courbe.

Dès lors,

$$N_1 = - \frac{P}{g} R \frac{d\omega}{dt} .$$

CAS DU VOLANT POULIE (fig. 9).

Appelons Q l'effort tangentiel moyen (effort de régime),
ρ le rayon de la manivelle,
N' l'effort appliqué à la jante

$$N_1' = \frac{Q.\rho}{R} .$$

Entre I et II le volant accélère et supporte les effets d'inertie en sens inverse de la rotation.

Pour l'ensemble du bras

$$N = (N_1' + N_1'') \frac{P}{R} .$$

Pour un bras, ce sera la n^e partie.

*
* *

5.- CALCUL DES ASSEMBLAGES.

I.- DES SEGMENTS DE JANTE ENTRE EUX.

A présent que nous sommes en état de déterminer les efforts agissant aux différents points de la jante, nous pouvons examiner les solutions possibles pour établir les liaisons entre les différentes parties de la jantes d'un volant.

Le point d'assemblage est généralement pris sur la bissectrice de l'angle formé par deux bras voisins. L'assemblage dans l'axe des bras exige le dédoublement de ceux-ci dans le plan de séparation des deux demi-volants.

a) Assemblage par boulons.

C'est le mode d'assemblage le plus simple mais qui ne peut guère être employé que pour les volants de faible poids tournant à une vitesse périphérique modérée (fig. 10).

D'après ce que nous avons vu, l'effort appliqué au centre de gravité de la section est donné par la formule (X) dans laquelle $\varphi = \alpha$. Nous devons y ajouter $\frac{N_1}{n}$ si nous tenons compte des efforts tangentiels. Quoi qu'il en soit, nous désignerons l'effort total par N .

De plus le moment fléchissant dans la section d'assemblage est donnée par la formule (XII) dans laquelle $\varphi = \alpha$; représentons-le par M .

L'assemblage devra être tel, que les boulons s'opposent à l'ouverture du joint malgré l'action de la force N et du moment M dont l'effet est de déterminer la rotation des brides autour de leur arête inférieure ab .

L'équilibre des forces appliquées exige que

$$N.\lambda + M = X.x$$

X représentant la force exercée par l'ensemble des boulons

d'où

$$X = N\frac{\lambda}{x} + \frac{M}{x}$$

+ x est grand, + X est petit

On voit tout l'interêt qu'il y a à relever les boulons vers la jante et d'autre part à abaisser le centre de gravité, c'est-à-dire de réduire λ .

Les boulons seront au nombre de 4 ou de 6 et l'on pourra utiliser en vue de pouvoir les rapprocher davantage de la couronne extérieure des tiges filetées aux deux bouts.

b) <u>Assemblage par clavettes</u> (fig. 11).

Lorsque la largeur du volant devient faible par rapport à la masse, cas du volant-masse d'inertie, on a vu que la forme rationnelle d'une section de la jante est celle d'un U renversé, forme qui se prête mal à l'asemblage par boulons. On peut alors utilisé l'assemblage par clavette (fig. 11).

La tige peut être à section circulaire ou à section carrée introduite dans une douille appropriée brut de fonderie. L'axe pourra coïncider très approximativement avec le centre de gravité de la section, ce qui revient à poser dans l'équation ci-dessus $x = \lambda$.

La détermination des proportions de l'assemblage ainsi que le choix du taux de travail de ses éléments se fera comme il a été dit dans ce chapitre réservé à cette question, dans la première partie du cours.

c) <u>Assemblage par frette</u>.

Pour la disposition de la jante en U renversé, un bon moyen d'assemblage consiste à utiliser des frettes placées latéralement (fig. 12).

Ces frettes seront circulaires autant que possible, les faces à assembler dressées, les tenons parfaitement tournés et calibrés.

On placera les frettes à chaud avec un certain serrage initial pour qu'en marche les joints ne baillent pas.

Le calcul doit se faire en tenant compte de la tension de fixation, de l'effort N défini au paragraphe a, ainsi que du moment M qui tend à faire bailler le joint.

Pour les très lourds volants, on peut munir le joint d'une frette tangentielle extérieure de façon à équilibrer Q de la relation précédente.

Quelque fois, pour soulager les frettes latérales, on ajoute une frette tangentielle à l'intérieur.

Pour le calcul de la section de la frette, il faudra se reporter au chapitre traitant de cette question.

II.- <u>DES BRAS A LA JANTE ET AU MOYEU.</u>

Les b ras sont, dans ce cas, des fers plats encastrés à frottement dur et serrés en place par des boulons traversant la jante et chassés au marteau dans les trous (fig. 13).

Pour faciliter le travail d'ajustage des boulons, on peut utiliser des boulons travaillant simplement à la traction. Les bras seront maintenu en place par des broches concentriques aux boulons et chassées dans des trous alésés avec précision (fig. 14).

III.- <u>DU MOYEU.</u>

Lorsque le moyeu est en deux pièces, on l'assemble généralement par boulons ou par frettes. Pour les très grands volants seuls les assemblages par frettes sont utilisés.

Pour le calcul des boulons ou des frettes, on doit composer les différentes forces 2 T agissant dans l'axe des bras (fig. 15).

En ce qui concerne l'épaisseur, on peut adopter

$$D_2 = 1{,}8 \text{ à } 1{,}6\ D_1$$

suivant l'importance.

Le moyeu est évidé au centre et ne porte que sur la moitié de sa longueur (fig. 16);une douille fendue dans le sens axial enveloppe cependant la cale sur toute sa longueur.

Cette longueur est égale normalement à deux fois la largeur de la jante sauf pour les volants poulies. Dans ce cas, c'est le diamètre de l'arbre qui règle la longueur qui est sensiblement égale au diamètre.

On rencontre actuellement des volants pleins en acier coulé ayant la forme d'un disque. Ces volants sont utilisés sur les groupes asynchrone-génératrice à continu (grande vitesse périphérique 80 à 100 m/sec). (fig. 17).

Ces groupes actionnant, par exemple, des machines d'extraction, il fallait éviter de donner des à coups à la centrale. Le moteur alternatif ne pouvait ralentir que de 2 à 3 % (pour éviter les variations trop forte de la période du courant, ce qui gêne d'autre machine : les turbopompes pourraient se désamorcer par exemple). La régularité de marche qu'on veut obtenir dans ca cas exige l'emploi de grandes vitesses périphériques.

Du point de vue calcul, nous considérerons ce volant comme un disque.

****

CHAPITRE II.

ETUDE DE LA RESISTANCE DES DISQUES

1.- ETUDE DES DIFFERENTS CAS.

Soit un disque de profil quelconque (fig. 18). Dans un élément quelconque de ce disque d'angle au centre $d\varphi$, délimité par deux cercles concentriques de rayons r et $r + dr$, la tension tangentielle t est supposée constante puisque, par hypothèse, il n'y a pas accélération tangentielle, le nombre de tours par seconde étant supposé constant.

L'élément envisagé est soumis à la force centrifuge dF , ce qui entraîne des tensions radiales t' et $t' + dt'$.

Ecrivons la relation d'équilibre pour l'élément considéré, les forces projetées sur la normale (l'angle φ étant petit, on pourra assimiler l'angle au sinus, c'est-à-dire $\sin d\varphi \simeq d\varphi$ et $\cos d\varphi \simeq 1$) conduisent à la relation (1) suivante :

$$\frac{\delta}{g} x.dr.r.d\varphi.\omega^2.r + (x + dx).(r + dr).(t' + dt').d\varphi - r.x.t'.d\varphi - 2\, x.dr.t\,\frac{d\varphi}{2} = 0 \;; \qquad (1)$$

en négligeant les infiniments petits du second ordre,

$$\frac{\delta}{g} x.\omega^2.r^2.dr + t'.r.dx + r.x.dt' + x.t'.dr - x.t.dr = 0 \,. \qquad (1)$$

Pour pouvoir déterminer les deux inconnues t et t' , il faut une seconde équation. Nous la trouverons en faisant intervenir les déformations. Soit Δ l'allongement proportionnel,

$$\Delta = \frac{t - \eta.t'}{E} \qquad \text{ou} \qquad \Delta' = \frac{t' - \eta.t}{E}$$

Attention aux signes –

Appelons u le rayon après déformation et soit du l'épaisseur dr après déformation. Si Δ est l'allongement tangentiel et Δ' l'allongement radial

$$\Delta = \frac{u - r}{r} = \frac{2\pi(u-r)}{2\pi r} \qquad\qquad \Delta' = \frac{du - dr}{dr}$$

$$r.\Delta = u - r \qquad\qquad d(r.\Delta) = du - dr = \Delta'.dr$$

$\sigma : \varepsilon E$

$$r.d\Delta + \Delta.dr = \Delta'.dr$$

d'où finalement

$$\frac{t - \eta.t'}{E}\,dr + r\,\frac{dt - \eta.dt'}{E} = \frac{t' - \eta.t}{E}\,dr \;,$$

d'où $$t' - t = \frac{r}{1 + \eta} \left(\frac{dt}{dr} - \eta \frac{dt}{dr}\right) \qquad (2)$$

En combinant ces deux relations, on trouve

$$\frac{dx}{x} = - \frac{\frac{\delta}{g} \omega^2 . r . dr + \frac{1}{1 + \eta} (dt' + dt)}{t'} \qquad (3)$$

Voyons quelques applications.

DISQUE D'EPAISSEUR CONSTANTE.

Dans ce cas, x = constante (fig. 19) donc $dx = 0$ et la relation (3) devient

$$\frac{\delta}{g} \omega^2 . r . dr + \frac{1}{1 + \eta} (dt' + dt) = 0 \qquad (3')$$

on en tirera $$dt' = - (1 + \eta) \frac{\delta}{g} \omega^2 . r . dr - dt .$$

En intégrant de r_o à r,

$$\int_{r_o}^{r} dt' = \int_{t_o'}^{t'} dt' = - (1 + \eta) \frac{}{g} \omega^2 . \int_{r_o}^{r} r . dr - \int_{t_o}^{t} dt$$

$$t' - t_o' = - (1 + \eta) \frac{\delta}{g} . \frac{\omega^2}{2} (r^2 - r_o^2) - (t - t_o)$$

ajoutons t à chaque membre

$$t' - t = - 2 t + (t_o' + t_o) - (1 + \eta) \frac{\delta}{g} . \frac{\omega^2}{2} (r^2 - r_o^2)$$

$$= \frac{r}{1 + \eta} \left(\frac{dt}{dr} - \eta \frac{dt'}{dr}\right) \qquad (4)$$

et, en remplaçant dt' par sa valeur tirée de (3'),

$$\frac{r}{1 + \eta} \left[\frac{dt}{dr} + (1 + \eta) . \eta \frac{\delta}{g} \omega^2 . r + \eta \frac{dt}{dr}\right] = - 2 t + (t_o' + t_o) - (1 + \eta) \frac{\delta}{g} \frac{\omega^2}{2} (r^2 - r_o^2)$$

Ce qui conduit, en groupant dans le premier membre, les termes en t

$$r . dt + 2 t . dr = (t_o' + t_o) . dr - (1 + 3\eta) \frac{\delta}{g} . \frac{\omega^2}{2} r^2 . dr + (1 + \eta) \frac{\delta}{g} \frac{\omega^2}{2} r_o^2 . dr$$

soit en x'ant par r, on a

$$\int_{r_o t_o}^{r t} d(r^2 t) = (t_o' + t_o) . \int_{r_o}^{r} r . dr - (1 + 3\eta) \frac{\delta}{g} . \frac{\omega^2}{2} \int_{r_o}^{r} r^3 . dr + (1 + \eta) \frac{\delta}{g} . \frac{\omega^2}{2} \int_{r_o}^{r} r_o^2 . r . dr .$$

$$= (t_o' + t_o) \frac{r^2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right] - \frac{\delta}{g} \frac{\omega^2}{8} \left[(r^4 - r_o^4) . (1 + 3\eta) + 2 . (1 + \eta) . r_o^2 . (r^2 - r_o^2)\right]$$

de cette relation on tire l'expression de t :

$$t = \frac{1}{2} t_o \left[1 + \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right] + \frac{1}{2} t_o' \left[1 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right]$$
$$- \frac{\delta}{g} . \frac{\omega^2}{8} . \frac{1}{r^2} \left[(1 + 3\eta) . (r^4 - r_o^4) - 2 . (1 + \eta) . r_o^2 . (r^2 - r_o^2)\right]$$

$f(r, r_o)$

$$t = \frac{1}{2}\,t_o.\left[1 + \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\,t'_o.\left[1 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right] \qquad (5)$$

$$- \frac{\delta}{g}.\frac{\omega^2}{8}\left[(1+3\,\eta).r^2 + r^2.\left(\frac{r_o}{r}\right)^2.(1-\eta) - 2.(1+\eta).r_o^2\right]$$

puis

$$t' = \frac{1}{2}\,t_o.\left[1 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\,t'_o.\left[1 + \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right] \qquad (6)$$

$$+ \frac{\delta}{g}.\frac{\omega^2}{8}\left[-(3+\eta).r^2 + 2.(1+\eta).r_o^2 + (1-\eta).r_o^2.\left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right]$$

$$t - t' = (t_o - t'_o).\left(\frac{r_o}{r}\right)^2 + \frac{\delta}{g}\,\frac{\omega^2}{4}\,(1-\eta).\left[1 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^4\right].r^2 \;.$$

Si $t_o > t'$; $t > t'$ de là

$$\delta = \frac{1}{E}\,(t - \eta.t') \quad ;$$

il faut

$$E.\delta = (t - \eta.t') \leqslant R \;.$$

<u>DISQUE PLEIN</u>. (sans ouverture au centre, et d'épaisseur constante).

Pour déterminer t_o et t'_o nous pouvons admettre

1°) que la tension annulaire t_o et la tension radiale t'_o se confondent lorsque le rayon r_o prend la valeur zéro,

$$t_o = t'_o \qquad \text{pour} \qquad r_o = 0$$

on peut donc remplacer dans les équations (5) et (6) t'_o par t_o et r_o par 0 , d'où

$$t = t_o - \frac{\delta}{g}\,.\,\frac{\omega^2}{8}\,(1 + 3\,\eta).r^2$$

F = mg

$$t' = t_o - \frac{\delta}{g}\,.\,\frac{\omega^2}{8}\,(3 + \eta).r^2$$

2°) que pour $r = r_1$, $t'_1 = 0$.

$$t'_1 = t_o - \frac{1}{8}\,.\,\frac{\delta}{g}\,\omega^2.(3 + \eta).r_1^2 = 0$$

d'où

$$t_o = \frac{\delta}{g}\,.\,\frac{\omega^2}{8}\,(3 + \eta).r_1^2 \;.$$

en remplaçant

$$t = \frac{\delta}{g}\,.\,\frac{\omega^2}{8}\,r_1^2.\left[(3 + \eta) - (1 + 3\,\eta).\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right]$$

$$t' = \frac{\delta}{g}\,.\,\frac{\omega^2}{8}\,r^2.\left[(3 + \eta) - (3 + \eta).\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right]$$

<u>Conclusions</u> : 1°) On peut voir que pour $r = 0$, on a bien $t_o = t'_o$.

2°) Que t' est bien nul pour $r = r_1$, $t'_1 = 0$.

3°) Que la plus grande déformation est réalisée au centre (fig. 20).

$$\delta = \frac{t_o - \eta . t'_o}{E} = \frac{t_o.(1 - \eta)}{E}$$

et que pour que la tension ne dépasse pas R , il faut que

$$\delta . E = t_o.(1 - \eta) \leqslant R \ ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\delta}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} r_1^2.(1 - \eta).(3 + \eta) \leqslant R \ ,$$

$$\frac{\delta}{g} \ \omega^2.r_1^2 \leqslant \frac{8 \ R}{(1 - \eta).(3 + \eta)}$$

avec $\eta = 0,3$

$$\frac{\delta}{g} \ \omega^2.r_1^2 \leqslant 3,46 \ R \ .$$

Si on se fixe $R = 20 \ Kg/mm^2$, on arrive à la vitesse limite pour un disque donné.

DISQUE AVEC OUVERTURE AU CENTRE (fig. 21).

$t'_o = 0$ pour $r = r_o$ (1e condition)

$t'_1 = 0$ pour $r = r_1$ (2e condition).

$$t'_o = \frac{1}{2} \ t_o\left[1 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right] + \frac{1}{2} \ t'.\left[1 + \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{\delta}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8}\left[- (3 + \eta).r_o^2 + 2.(1 + \eta).r_o^2 + (1 - \eta).r_o^2\right] = 0 \ .$$

Cette opération montre que la première condition est toujours satisfaite si on a $t'_o = 0$ dans le second membre. En remplaçant dans l'équation r par r_1 et t'_o par 0 , il vient :

$$t'_1 = \frac{1}{2} \ t_o\left[1 - \left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2\right] + \frac{\delta}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8}\left[-(3 + \eta).r_1^2 + 2.(1 + \eta).r_o^2 + (1 - \eta).r_o^2.\left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2\right] = 0$$

d'où

$$t_o = - \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta}{g} \ \omega^2.r_1^2 \ \frac{- (3 + \eta) + 2.(1 + \eta).\left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2 + (1 - \eta).\left(\frac{r_o}{r_1}\right)^4}{1 - \left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2}$$

$$t_o = - \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta}{g} \ \omega^2.r_1^2 \ \frac{- (3 + \eta).\left[1 - \left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2\right] - (1 - \eta).\left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2.\left[1 - \left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2\right]}{1 - \left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2}$$

$$t_o = + \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta}{g} \ \omega^2.r_1^2.\left[(3 + \eta) + (1 - \eta).\left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2\right]$$

introduisant cette valeur dans l'expression de t et de t'

$$t = \frac{1}{8} \cdot \frac{\delta}{g} \ \omega^2.r_1^2.\left[(3 + \eta) + (1 - \eta).\left(\frac{r_o}{r_1}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right]$$
$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{\delta}{g} \ \omega^2.r^2.\left[(1 + 3 \ \eta) - 2.(1 + \eta).\left(\frac{r_o}{r}\right)^2 + (1 - \eta).\left(\frac{r_o}{r}\right)^4\right]$$

$$t' = \frac{1}{8}\ \frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_1^2.\left[(3+\eta) + (1-\eta).(\frac{r_o}{r_1})^2\right].\left[1 - (\frac{r_o}{r})^2\right]$$
$$- \frac{1}{8}\ \frac{\delta}{g}\,\omega^2.r^2.\left[3+\eta - 2.(1+\eta).(\frac{r_o}{r})^2 - (1-\eta).(\frac{r_o}{r})^4\right]$$

Le maximum de R correspond à $r = r_o$; nous devons donc poser

$$t_o - \eta.t'_o = R = t_o = \frac{1}{4}\ \frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_1^2.\left[(3+\eta) + (1-\eta).(\frac{r_o}{r_1})^2\right]$$

$$\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_1^2 \leqslant \frac{4\ R}{(3+\eta) + (1-\eta).(\frac{r_o}{r_1})^2}$$

Pour $\frac{r_o}{r_1} = 0{,}2$, $\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_1^2 \leqslant \frac{4\ R}{3{,}3 + 0{,}7.(0{,}2)^2} \leqslant \frac{4\ R}{3{,}3 + 0{,}028} = \frac{4\ R}{3{,}33}$

$= 1{,}2\ R$

REMARQUE : pour r_o = valeur voisine de zéro,

$$\frac{\delta.\omega^2.r_1^2}{g} \leqslant \frac{4\ R}{3+\eta} < 1{,}21\ R\ .$$

Ainsi, une ouverture au centre, si petite soit-elle, fait passer la valeur da la tension de R à $\frac{3{,}46}{1{,}21}$ R ou 2,85 R . La vitesse périphérique sera, par conséquent, réduite dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Quand on veut pousser les vitesses très loin, on évite le trou au centre du disque en employant le mode de fixation représenté par la figure 22.

DISQUE RENFORCE (fig. 23).

Pour ne pas compliquer les équations, on suppose $\eta = 0$, ce qui n'entraîne pas d'erreur bien importante dans la valeur des tensions. Les équations générales deviennent

$$t = \frac{1}{2}\ t_o.\left[1 + (\frac{r_o}{r})^2\right] + \frac{1}{2}\ t'_o.\left[1 - (\frac{r_o}{r})^2\right] - \frac{\delta}{g}.\frac{\omega^2.r^2}{8}\left[1 - 2.(\frac{r_o}{r})^2 + (\frac{r_o}{r})^2.(\frac{r_o}{r})^2\right]$$

$$t' = \frac{1}{2}\ t_o.\left[1 - (\frac{r_o}{r})^2\right] + \frac{1}{2}\ t'_o.\left[1 + (\frac{r_o}{r})^2\right] + \frac{\delta}{g}.\frac{\omega^2.r^2}{8}\left[-3 + 2.(\frac{r_o}{r})^2 + (\frac{r_o}{r})^4\right]$$

On appliquera ces deux équations successivement à l'anneau intérieur (a), au disque (b) et à la couronne (c); on obtiendra six équations contenant six constantes à déterminer.

Pour les déterminer, il nous faut six équations de conditions. Nous admettrons que

1°) $t'_o = 0$. (1e équation de condition).

2°) les tensions annulaires sont les mêmes au rayon r_1 dans la partie a et la partie b

$$(t_1)_a = (t_1)_b \qquad \text{(2e équation).}$$

3°) les tensions annulaires sont les mêmes au rayon r_2 dans la partie b et la partie c

$$(t_2)_a = (t_2)_b \qquad \text{(3}^e\text{ équation)}$$

4°) au rayon r_1 les tensions radiales dans (a) et (b) sont dans le rapport inverse des épaisseurs

$$(t'_1)_b = (t'_1)_a \cdot \frac{e}{e'} \qquad \text{(4}^e\text{ équation)}$$

5°) au rayon r_2, les tensions radiales dans (b) et (c) sont dans le rapport inverse des épaisseurs

$$(t'_2)_b = (t'_2)_c \cdot \frac{e''}{e'} \qquad \text{(5}^e\text{ équation)}$$

6°) à la périphérie, la tension radiale est nulle

$$t'_3 = 0 \qquad \text{(6}^e\text{ équation).}$$

Posons $\frac{r_0}{r_1} = m_1$, $\frac{r_1}{r_2} = m_2$, $\frac{r_2}{r_3} = m_3$,

d'où $r_0 = m_1.r_1 = m_1.m_2.r_2 = m_1.m_2.m_3.r_3$.

Si, dans les équations générales, on a soin de remplacer r_0, r_1, r_2 par leurs valeurs en fonction de r_3, il ne restera dans les équations que les rapports m_1, m_2, m_3, la quantité $\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_3^2$ et les inconnues et l'on pourra en fonction de ce facteur $\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_3^2$ déterminer t_0, t_1, t'_1, t_2, t'_2, t_3.

La plus grande des tensions obtenue pour les conditions suivantes

$$m_1 = 0,4 \qquad m_2 = 0,16 \qquad m_3 = 0,8$$

$$n_1 = \frac{e}{e'} = 5 \qquad n_2 = \frac{e'}{e''} = 0,2 \,,$$

correspond à

$$n.t'_1 = 0,96\,\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_3^2 \leqslant R$$

$$\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_3^2 \leqslant \frac{R}{0,96} = 1,04\ R\ .$$

Si on suppose que la couronne n'existe pas, la tension maximum se présente toujours au moyeu, à la naissance du disque

$$\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_3^2 \leqslant \frac{R}{0,565} = 1,77\ R$$

Enfin, si on suppose le moyeu inexistant

$$\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_3^2 \leqslant \frac{R}{0,751} = 1,33\ R\ .$$

Nous avions trouvé antérieurement pour

$$\frac{r_0}{r_3} = 0,4 \times 0,16 \times 0,8 = 0,05$$

en tenant compte du coefficient de Poisson

$$\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_3^2 \leqslant \frac{4\ R}{3 + 0,3 + 0,7.(0,05)^2} \leqslant \frac{4\ R}{0,825} = 1,22\ R$$

Pour le disque plein, $\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_3^2 \leqslant 3{,}46$ R .

et avec l'approximation admise ci-dessus, $\eta = 0$

$$\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r_3^2 < 2{,}65 \text{ R} .$$

Ainsi, sans tenir compte de η $(\eta = 0)$:

Disque avec couronne et moyeu	$\frac{\delta}{g}\,v^2 = 1{,}04$ R .
Disque sans couronne, mais avec moyeu . . .	" $= 1{,}77$ R .
Disque sans couronne, plein	" $= 2{,}65$ R .
Disque avec un trou au centre	" $= 1{,}33$ R .

<u>DISQUE D'EGALE RESISTANCE</u> (fig. 24).

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r.dr + \frac{1}{1+\eta}(dt' + dt)}{t'}$$

$$t - \eta.t' = t' - \eta.t = R$$

si $t' = t$, on a $R = t.(1-\eta)$

d'où $t = t' = \frac{R}{1-\eta}$ et $dt = dt' = 0$ (tensions constantes)

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\delta}{g}\cdot\frac{\omega^2.r.dr}{t'} = -\frac{\delta}{g}\cdot\frac{\omega^2.r.dr}{\frac{R}{1-\eta}}$$

$$\int_{x_c}^{x}\frac{dx}{x} = -\left(\frac{1-\eta}{R}\right)\frac{\delta}{g}\cdot\frac{\omega^2}{2}\,r^2$$

$$\log_e\frac{x}{x_c} = -\left(\frac{1-\eta}{R}\right)\frac{\delta}{g}\cdot\frac{\omega^2.r^2}{2}$$

$$\log_e\frac{x_c}{x} = \left(\frac{1-\eta}{R}\right)\frac{\delta}{g}\cdot\frac{\omega^2.r^2}{2}$$

$$\frac{x_c}{x} = e^{\frac{1-n}{R}.\frac{\delta}{g}.\frac{\omega^2 r^2}{2}}$$

*

* *

2.- <u>CALCUL GRAPHIQUE.</u>

Les hypothèses faites pour établir l'équation (1) impliquent :

1°) un disque de diamètre indéfini,
2°) un disque plein au centre.

Cela ne peut correspondre à rien de courant; on peut se rapprocher des conditions de sollicitation supposées en faisant agir à la périphérie un aubage exerçant sur la couronne un tension ratiale t et une tension tangentielle t', telle que

$$t = t' = \frac{R}{1 - \eta} \quad .$$

Tous les disques à profil tracé suivant l'équation ci-dessus travaillent avec la même tension pour la même vitesse périphérique. On peut toujours trouver une valeur finie de x quelle que soit la vitesse périphérique, mais le calcul montre que le rapport $\frac{x_c}{x}$ croît rapidement lorsque la vitesse périphérique grandit.

Dans la roue de Laval qui réalise des vitesses voisines de 400 m/sec, on se rapproche des conditions de sollicitations du disque d'égale résistance en évidant un trou au centre (voir fig. 26).

CALCUL D'UN PROFIL PAR LA METHODE GRAPHIQUE.

Lorsqu'il s'agit d'un profil quelconque (fig. 27), la méthode graphique est seule utilisable.

Soit p le poids de l'aubage par unité de longueur, $\frac{p}{g}\,\omega^2.r''$ représentera la force centrifuge par unité de longueur.

Rapportée au rayon r' on pourra écrire :

$$F'' = \frac{p}{g}\,\omega^2.r''\,\frac{r''}{r'}$$

Pour la jante de section σ, on aura, par unité de longueur :

$$F' = \frac{p'}{g}\,\omega^2.r' = \frac{\sigma.\delta}{g}\,\omega^2.r'$$

agissant au centre de gravité G'. Au total,

$$F = \frac{\omega^2}{g}\,(p.r''.\frac{r''}{r'} + \sigma.\delta.r') \quad .$$

Désignons par t'_n la tension radiale exercée par la couronne sur la section de rayon r_n ; par t_n la tension annulaire moyenne dans la section de la jante,

$$2\,\sigma.t_n.\sin\frac{d\varphi}{2} + r_n.d\varphi.x_n.t'_n = r'.d\varphi.F$$

or

$$2\,\sin\frac{d\varphi}{2} \simeq d\varphi$$

$$t_n = -\,t'_n\,\frac{x_n}{\sigma}\,r_n + \frac{\omega^2}{g}\,.\,\frac{r'}{\sigma}\,(p.r''\,\frac{r''}{r'} + \sigma.\delta.r')$$

$$t_n = -\,t'_n\,\frac{x_n}{\sigma}\,r_n + \frac{\omega^2}{g}\,.\,r'^2.(\frac{p}{\sigma}\,.(\frac{r''}{r'})^2 + \delta)$$

Si l'on s'impose les tensions $t'_n = t_n = R$, on pourra en déduire x_n.

L'équation (2) permettra comme nous allons le voir de déterminer de proche en proche les valeurs de t et t' en partant de $t'_n = t_n$

$$t' + \frac{\eta}{1+\eta}\, r\, \frac{dt'}{dr} = t + \frac{1}{1+\eta}\, r\, \frac{dt}{dr} \qquad (2)$$

Donnons-nous la valeur de t' en fonction de r par la courbe (fig. 28); partons de t' et aboutissons à $t'_o = 0$.

Menons la tangente à la courbe ainsi tracée; nous déterminerons $\frac{dt'}{dr}$ au point r . On fait la somme $t' + \frac{\eta}{1+\eta}\, r\, \frac{dt'}{dr}$; on introduit cette valeur dans (2) et en se donnant t pour la valeur de $r = r_n$, on pourra en déduire $\frac{dt}{dr}$.

Traçons la tangente; d'après le coefficient angulaire ainsi trouvé, nous pourrons, en confondant la courbe avec la tangente, trouver la valeur de t_{n-1} pour le rayon r voisin; et comme t'_{n-1} et $\frac{dt'_{n-1}}{dr}$ sont connus au point (n-1), on pourra comme pour le premier point déduire $\frac{dt}{dr}$.

Cette construction fera connaître la valeur de t en chaque point, celle de t' étant connue par la courbe que l'on s'est imposée. Il s'agira de vérifier si, au point le plus fatigué, la tension $t - \eta.t'$ ou $t' - \eta.t$ ne dépasse en aucun point une valeur admissible, sans quoi on modifierait la courbe de t' choisie arbitrairement de façon à réduire la valeur de t_{max} .

S'il en est ainsi, on pourra déduire de l'équation (3) le profil du disque puisque :

$$\int_x^{x_n} \frac{dx}{x} = \int_r^{r_n} L.dr$$

(L est calculable car on connaît $\frac{dt'}{dr}$ et $\frac{dt}{dr}$)

où $$L = \frac{-\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r + \frac{1}{1+\eta}\left(\frac{dt'}{dr} + \frac{dt}{dr}\right)}{t'} \qquad \log_e \frac{x}{x_n} = \int_r^{r_n} L.dr$$

Par intégration graphique, on trouvera pour toute valeur de r $\int_r^{r_n} L.dr$ et on pourra déduire x comme x_n .

En ce qui concerne R , on peut dire qu'il convient de prendre une valeur égale au quart et même au cinqième de la limite élastique pour tenir compte des tensions préexistantes dans le disque.

Pour les roues tournant à grande vitesseù on est ainsi conduit à prendre des aciers nickel à 80 et 100 kg/mm^2 avec une limite élastique de 65 Kg/mm^2 , ce qui conduit à

$$R = 13 \text{ Kg/mm}^2$$

Mais on peut aller au delà.

On peut employer des aciers à 180 Kg/mm^2 de charge de rupture et 135 Kg/mm^2 de limite élastique, pouvant conduite à une valeur de

$$R = 20 \text{ à } 25 \text{ Kg/mm}^2 .$$

Pour les vitesses de dépassant pas 150 à 180 m/sec, on peut s'en tenir à de l'acier demi-dur ordinaire de 60 à 65 Kg/mm^2 de charge de rupture avec un coefficient de sécurité de 5 ou 6

$$R = 10 \text{ à } 12 \text{ Kg/mm}^2 .$$

On peut prendre des tensions aussi élevées car les tensions restent constantes. On tolère à la machine 10 % de survitesse.

Le problème peut se poser autrement. Le disque est fabriqué, on demande d'évaluer ω et donc la tension maximum.

On s'en reporte à la première formule

$$\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r^2.x.dr + t'.r.dx + r.x.dt' + x.t'.dr - x.t.dr = 0$$

mais, $t'.r.dx + r.x.dt + x.t'dr$ = différentielle de $(x.r.t')$.

$$\frac{\Delta(x.r.t')}{\Delta r} - x.t + \frac{\delta}{g}\,\omega^2.r^2.x = 0$$

si on observe la figure 25,

$$(x.r.t')_e - (x.r.t')_i - x.t_m.\Delta r + \frac{\delta}{g}\,\omega^2.\cancel{r^2}.(r^2.x)_{moy.} = 0$$

Si on compare avec l'élément du centre $(t'_i = 0)$

$$(x.r.t')_e = A$$

fixé pour autant qu'on se donne t_i qu'on confond avec t_m .

On pourra également écrire

$$\left(\frac{t' - t}{r}\right)_m.(1 + \eta).\Delta r = (t_e - t_i) - \eta.(t'_e - t'_i)$$

$$t_e = t_i + \eta.(t'_e - t'_i) + \left(\frac{t'_e - t_e}{r}\right)_m.(1 + \eta).\Delta r \qquad (8)$$

On peut déterminer t_e au moyeu, et on continuera de proche en proche jusqu'à la périphérie. A ce moment, on devra constater que

$$t'(\text{à la périphérie}) = t'_n$$

si le disque est muni d'une couronne calculée, ou

$$t'_n = 0$$

si le disque n'est pas muni de couronne.

Etant donné qu'on ne trouvera probablement pas cette valeur au premier essai, on repart avec une nouvelle valeur de t_i .

Pour réduire les tâtonnements, on procédera comme suit. On va distinguer les résultats obtenus par les deux calculs à l'aide des indices A et B et écrire

$$t'_{e(n)} = \left[t'_{e(n)}\right]_A + K.\left[t'_{e(n)}\right]_B \begin{cases} = t'_n \\ = 0 . \end{cases}$$

La vraie valeur de $t'_{e(n)}$ est donnée par cette expression. On en déduit K et connaissant K , on va s'en servir pour calculer la tension dangereuse.

On écrit de même

$$(t_{1o}) = (t_{1o})_A + K.(t_{1o})_B .$$

Connaissant t_1 on passera à t'_e par $(x.r.t'_e) = A$ et on calculera t_0 par la relation (8).

*
* *

3.- SIMILITUDE.

On peut se demander comment faire varier x_n pour conserver les mêmes tensions, les dimensions de la couronne restant inchangées.

On doit faire varier x_n en raison inverse de r_n ; on le voit aisément si on substitue r_n par $\lambda.r_n$ et r_o par $\lambda.r_o$ $(\lambda > 1)$, σ restant invariable.

Par contre, on voit également que l'équation

$$t' + \frac{\eta}{1+\eta}\, r\, \frac{dt'}{dr} = t + \frac{1}{1+\eta}\, r\, \frac{dt}{dr}$$

n'est pas influencée par la substitution.

De même
$$\frac{dx}{x} = - \frac{\frac{\delta}{g}\,\omega^2.r.dr + \frac{1}{1+\eta}\,(dt' + dt)}{t'}$$

ne change pas quand on remplace ω par $\frac{\omega}{\lambda}$ et r par $\lambda.r$. Ainsi, pour une même vitesse périphérique, les tensions restent les mêmes en des points homologues si l'on conserve le même rapport $\frac{dx}{x}$ et $\frac{x}{x_n}$.

La grande roue est donc amincie par rapport à la petite

*
* *

4.- NOTES SUR LA "METHODE DES DIFFERENCES FINIES".

A.- L'équation (1) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta(r.x.t')}{\Delta r} - x.t + \frac{\delta}{g}\,\omega^2.r^2.x = 0$$

et on peut en tirer

$$\Delta(r.x.t') - (x.t_m).\Delta r + \frac{\delta}{g}\,\omega^2.(r^2.x)_m.\Delta r = 0$$

en désignant par t_m la tension moyenne entre les rayons r et $r + \Delta r$ (voir fig. 29).

Si nous désignons par les indices i et e les éléments se rapportant respectivement à l'intérieur et à l'extérieur, nous pourrons écrire :

$$(r.x.t')_e = (r.x.t')_i + (x.t_m).\Delta r - \frac{\delta}{g}\,\omega^2.(r^2.x)_m.\Delta r \quad .$$

Pour le premier élément, en commençant par le moyeu $t_i = 0$; choisissons un t_i arbitraire et admettons $t_m = t_i$, nous pourrons déterminer $(r.x.t')_e = A$ et partant

$$t'_e = \frac{A}{(x.r)_e}$$

B.- L'équation (2) peut se mettre sous la forme (voir fig. 30)

$$\left(\frac{t' - t}{r}\right)_m.(1 + \eta).\Delta r = (t_e - t_i) - \eta.(t'_e - t'_i) \quad .$$

de laquelle on peut déduire :

$$t_e = t_i + \eta.(t'_e - t'_i) + \left(\frac{t'_e - t_e}{r}\right)_m.(1 + \eta).\Delta r$$

Cette équation fait connaître t_e et partant, de proche en proche, toutes les valeurs de t et t'.

Etant parti d'une valeur arbitraire de t_i, on ne peut s'attendre à trouver à l'extrémité du disque la valeur de t'_e qui

1°) dans le cas d'un disque de turbine doit être égale à la tension provoquée par la couronne et l'aubage que nous désignerons par T.

2°) dans le cas d'un disque de ventilateur doit être égale à zéro.

Pour trouver cette valeur particulière, il faudrait tâtonner sur la valeur arbitraire initiale de t_i à la circonférence intérieure du moyeu.

On démontre que pour trouver directement la solution, il suffit de recommencer le calcul en supposant $\omega = 0$ et en adoptant une valeur de t_i au moyeu $(t_i)_o$ par exemple. Si nous désignons les résultats obtenus à la périphérie par les deux calculs, respectivement par les indices A et B, on pourra écrire

$$t'_{e(n)} = (t'_{e(n)})_A + K.(t'_{e(n)})_B = \begin{cases} T & \text{pour le } 1° \\ 0 & \text{pour le } 2° \end{cases}$$

c'est-à-dire que la vraie valeur de $t'_{e(n)}$ est comprise entre les deux cas; T ou 0 représente la valeur qui doit être réalisée suivant qu'il s'agisse du premier ou du second cas envisagé ci-dessus ($t'_{e(n)}$ désigne la tension t'_e à la périphérie du disque).

De là, on peut déduire la valeur de K

$$K = \frac{t'_{e(n)} - (t'_{e(n)})_A}{(t'_{e(n)})_B}$$

Connaissant K, on pourra trouver la vraie valeur de $(t_i)_o$ au moyeu en écrivant :

$$(t_i)_o = (t_{io})_A + K.(t_{io})_B$$

et le problème de la détermination de la tension t et de la tension t' en chaque point du disque sera résolu.

****

CHAPITRE III.

CALCUL DES FRETTES

PREMIERE EQUATION.

Equation générale d'équilibre (fig. 31) :

$$x.(r + dr).(t' + dt').d\varphi - x.r.t'.d\varphi + 2\ t.x.dr\ \frac{d\varphi}{2} = 0$$

soit $$x.(r + dr).(t' + dt') - x.r.t' + t.x.dr = 0$$

ou encore $$\boxed{(t + t').dr = - r.dt'} \qquad \text{(I)}$$

DEUXIEME EQUATION.

Elle est tirée de l'examen des déformations

$$\delta' = \frac{t' + \eta.t}{E} \qquad\qquad \delta = \frac{t + \eta.t'}{E}$$

Représentons par u la valeur de r après déformation
par du la valeur de dr après déformation

$$- \delta' = \frac{du - dr}{dr}\ \text{(contraction)} \qquad \delta = \frac{u - r}{r}\ \text{(dilatation)}$$

$$d(\delta.r) = du - dr = - \delta'.dr \quad \text{ou} \quad r.d\delta + \delta.dr = - \delta'.dr$$

$$r.(dt + \eta.dt') + (t + \eta.t').dr = - (t' + \eta.t).dr$$

ou encore $$\boxed{(1 + \eta).(t + t') = - \left[r\ \frac{dt}{dr} + \eta.r\ \frac{dt'}{dr}\right]} \qquad \text{(II)}$$

En groupant (I) et (II), il viendra

$$- (1 + \eta).r.dt' = - r.dt - \eta.r.dt'$$

soit $dt' = dt$ ou $$\boxed{t' = t + A} \qquad \text{(III)}$$

En utilisant à présent (I) nous pouvons écrire

$$(t + t').dr = - r.dt = - r.dt' = - \frac{1}{2}\ r.(dt + dt') = - \frac{r}{2}\ d(t+t').$$

$$\frac{2\ dr}{r} = - \frac{d(t+t')}{t + t'} \qquad\qquad \log_e r^2 = - \log_e (t+t') + \log_e B$$

soit $$\boxed{r^2.(t + t') = B} \qquad \text{(IV)}$$

Les équations (III) et (IV) donnent t et t' si on connaissait A et B .

DETERMINATION DES CONSTANTES A ET B .

Les conditions aux limites permettent de déterminér A et B . On a en effet,

$$t'_e = p_e \qquad\qquad t'_o = p_o$$

En résolvant (III) et (IV), on obtient

$$t = \frac{B}{2\,r^2} - \frac{A}{2} \qquad\qquad t' = \frac{B}{2\,r^2} + \frac{A}{2}$$

En remplaçant, on obtient

$$p_e = \frac{B}{2\,r_1^2} + \frac{A}{2} \qquad\qquad p_o = \frac{B}{2\,r_o^2} + \frac{A}{2}$$

d'où

$$(p_o - p_e) = \frac{B}{2}\left[\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r_1^2}\right]$$

d'où

$$B = \frac{2.(p_o - p_e).r_o^2.r_1^2}{r_1^2 - r_o^2}$$

$$A = \frac{2.(p_e.r_1^2 - p_o.r_o^2)}{r_1^2 - r_o^2}$$

(car $A = 2\,p_e - \dfrac{2.(p_o - p_e).r_o^2}{r_1^2 - r_o^2}$)

Nous en tirons

$$t_o = \frac{B}{2\,r^2} - \frac{A}{2} = \frac{p_o.(r_1^2 + r_o^2) - 2\,p_e.r_1^2}{r_1^2 - r_o^2}$$

$$t_1 = \frac{B}{2\,r_1^2} - \frac{A}{2} = \frac{-p_e.(r_1^2 + r_o^2) + 2\,p_o.r_o^2}{r_1^2 - r_o^2}$$

APPLICATION DES FORMULES AUX DEUX CAS SUIVANTS.

1.- Frette libre à l'extérieur $p_e = 0$ (fig. 32)

$$t_o = \frac{p_o.(r_o^2 + r_1^2)}{r_1^2 - r_o^2} \qquad\qquad t_1 = \frac{2\,p_o.r_o^2}{r_1^2 - r_o^2}$$

2.- Arbre fretté (fig. 33).

Dans ce cas, $r_o \rightarrow 0$ et $p_o = 0$, p_e représente la pression exercée par la frette sur le coutour extérieur de l'arbre. Soit $p_e = p$.

$$t_o = \frac{-\,p.r_1^2}{r_1^2 - r_o^2} = -\,2\,p \qquad\qquad t_1 = -\,\frac{p.r_1^2}{r_1^2} = -\,p\,.$$

CALCUL D'UNE MANIVELLE (fig. 34).

Il est utile de bien définir les notations :

ρ rayon commun de la manivelle et de l'arbre après déformation,
r rayon de l'arbre avant déformation,
r_o alésage du moyeu de la manivelle avant déformation,
r_1 rayon extérieur du moyeu de la manivelle.

La nature du problème demande la détermination de $\frac{r - r_o}{r}$,
$r_o - r$ étant la différence entre l'alésage du moyeu et le rayon de l'arbre avant déformation,
$\frac{r - r_o}{r}$ est le % de cette différence par rapport au rayon de l'arbre.

Il faut que, moyennant cette différence, nous obtenions une pression telle que le frottement dû à cette pression équilibre le M_t appliqué à l'arbre.

Calculons ϱ en partant de la définition de l'allongement proportionnel des fibres de la frette.

$$\delta_o = \frac{\varrho - r_o}{r_o} = \frac{t_o + \eta . t'_o}{E} = \frac{1}{E}\left[\frac{p_o.(r_o^2 + r_1^2)}{r_1^2 - r_o^2} + \eta . p_o\right] \text{ (1er cas : frette libre à l'extérieur).}$$

$$\varrho = \frac{r_o}{E}\left[\frac{p_o.(r_o^2 + r_1^2)}{r_1^2 - r_o^2} + \eta . p_o\right] + r_o \ .$$

Calculons ϱ en partant de la définition de l'allongement proportionnel des fibres de l'arbre,

$$\delta = \frac{r - \varrho}{r} = \frac{t + \eta . t'}{E} = \frac{- p_o + \eta . p_o}{E} = - \frac{p_o}{E}(1 - \eta) \text{ (2e cas : arbre fretté)}$$

$$\varrho = \frac{r . p_o}{E}(1 - \eta) + r \ .$$

Egalons les deux valeurs de ϱ et nous obtenons

$$\frac{r - r_o}{r} = \frac{p_o}{E}\left[(\eta - 1) + \frac{r_o}{r}\left(\frac{r_o^2 + r_1^2}{r_1^2 - r_o^2} + \eta\right)\right] = \frac{p_o}{E}\left\{\frac{r_o}{r}\left[\frac{(\frac{r_1}{r_o})^2 + 1}{(\frac{r_1}{r_o})^2 - 1} + \eta\right] + \eta - 1\right\}$$

Observant que $\frac{r_o}{r}$ peut être pris égal à l'unité, nous avons

$$\frac{r - r_o}{r} = \frac{p_o}{E}\left[\frac{(\frac{r_1}{r_o})^2 + 1}{(\frac{r_1}{r_o})^2 - 1} - (1 - 2\eta)\right]$$

Nous connaissons donc, en fonction de r, la valeur de $(r - r_o)$ dès que l'on se donne p_o et les proportions du moyeu de la manivelle. Le problème est donc résolu car p_o est imposé (M_t).

a) Comme il y a une limite de R imposée, à savoir 20 Kg/mm^2, nous calculerons plutôt p_o correspondant à cette limite et nous vérifierons si la force de frottement correspondante à p_o donne un moment suffisant pour équilibrer le M_t.

Il s'agit de vérifier si R ne dépasse pas 20 Kg/mm^2 dans le moyeu de la frette,

$$\delta_o . E = R = p_o . \left[\frac{(\frac{r_1}{r_o})^2 + 1}{(\frac{r_1}{r_o})^2 - 1} + \eta\right]$$

avec $\frac{r_1}{r_o} = 1{,}8$, $\eta = 0{,}3$, $R = 20$, nous obtenons $p_o = 9\ Kg/mm^2$.

Connaissant ainsi la valeur de p_o , nous calculerons $\frac{r - r_o}{r}$ demandé

$$\frac{r - r_o}{r} = \frac{9}{20'000}\left[\frac{1{,}8^2 + 1}{1{,}8^2 - 1} + 0{,}6 - 1\right] = 0{,}00067$$

d'où
$$r_o = r.(1 - 0{,}00067) .$$

b) Vérifions si cette valeur de p_o est suffisante.

La valeur de p_o strictement nécessaire de p_o doit être inférieure à 9 Kg/mm^2. Vérifions-le

$$P.R = (2\pi.r_o.l_o).p_o.f.r_o \qquad P = p.l.d = p.1{,}3\ d^2 \qquad l_o = 1{,}5\ r_o$$

p étant la pression limite acceptable au bouton de manivelle, l et d ses dimensions.

$$p_o = \frac{p.1{,}3\ d^2}{2\pi.1{,}5\ r_o^3.f} R = p\frac{1{,}3}{\frac{\pi}{2}\times 1{,}5} . \frac{R}{r_o}\left(\frac{d}{2\ r_o}\right)^2.\frac{1}{f} = p.0{,}5\frac{R}{r_o}\left(\frac{d}{2\ r_o}\right)^2.\frac{1}{f}$$

$$R = 400 \qquad d = 140 \qquad 2\ r_o = 210 \qquad \frac{d}{2\ r_o} = \frac{2}{3} \qquad \frac{R}{r_o} = 4$$

$$p_o = p.2\ \frac{4}{9} . \frac{1}{f} = p\ \frac{8}{9} . \frac{1}{f}$$

avec $\frac{1}{f} = 0{,}06$ $\qquad p_o = \frac{800}{54} \simeq 15\ p$.

Soit $p = 50\ Kg/cm^2$ ou $0{,}5\ Kg/mm^2$

$$p_o = 7{,}5\ Kg/mm^2$$

FRETTAGE AU MOYEU (fig. 35).

Définissons les notations :

AVANT DEFORMATION		APRES DEFORMATION
r rayon de l'arbre	}	ρ rayon commun arbre et moyeu
r' alésage du moyeu	}	
r_o alésage de la frette	}	ρ_o rayon commun frette et moyeu
r'_o rayon extérieur de moyeu	}	

Soit de plus p_o la pression entre frette et moyeu
p la pression entre moyeu et arbre.

Rappel de formules.

a) formules générales

$$t_o = \frac{p_o.(r_1^2 + r_o^2) - 2\ p_e.r_1^2}{r_1^2 - r_o^2} \quad (a)$$

$$t_1 = \frac{-\ p_e.(r_1^2 + r_o^2) + 2\ p_o.r_o^2}{r_1^2 - r_o^2} \quad (b) \qquad (1)$$

b) frette libre

$$t_o = \frac{p_o.(r_o^2 + r_1^2)}{r_1^2 - r_o^2}$$

$$t_1 = \frac{2\,p_o.r_o^2}{r_1^2 - r_o^2} \qquad (2)$$

c) arbre fretté

$$t_o = -\,2\,p$$

$$t_1 = -\,p \qquad (3)$$

frette extérieure

$$\delta_o = \frac{\varrho_o - r_o}{r_o} = \frac{t_o + \eta.t_o'}{E} = \frac{1}{E}\,.\,\frac{p_o.(r_o^2 + r_1^2)}{r_1^2 - r_o^2} + \eta\,\frac{p_o}{E} \quad \text{(frette libre)}$$

moyeu ext. $$\delta = \frac{r_o' - \varrho_o}{r_o'} = \frac{t_1 + \eta.t_1'}{E} = \frac{1}{E}\left[\frac{2\,p.r'^2 - p_o.(r_2'^2 + r_o'^2)}{r_o'^2 - r'^2}\right] + \frac{\eta.p_o}{E}$$

Dans la formule (1 b) il faudra faire

$$p_e = p_o \qquad\qquad r_1 = r_o'$$

$$p_o = p \qquad\qquad r_o = r'$$

moyeu intérieur $$\frac{\varrho - r'}{r'} = \frac{1}{E}\left[\frac{p.(r_o'^2 - r'^2) - 2\,p_o.r_o'^2}{r'^2 - r'^2}\right] + \eta.\,\frac{p}{E}$$

Appliquer la formule (1 a).

Arbre $$\frac{r - \varrho}{r} = -\,(1 - \eta)\,\frac{p}{E}$$

On a donc quatre équations dans lesquelles ϱ, ϱ_o, p et p_o sont les seules inconnues.

$$t_o = p_o\,\frac{r_1^2 + r_o^2}{r_1^2 - r_o^2} \qquad\qquad R = t_o + \eta.t_o' = p\,.\left[\frac{r_1^2 + r_o^2}{r - r} + \eta\right]$$

Ayant déterminé p_o on vérifie si la tension R ne dépasse pas une valeur limite. Si on s'impose R, on peut ainsi colculer une nouvelle pression p_o et nous pouvons calculer la nouvelle valeur de ϱ_o et nous assurer de combien le moyeu s'était déformé en marche. Nous pourrons nous assurer qu'après application de la force P, s'il existe encore une pression positive sur l'arbre.

<u>Considérons le moyeu en quatre pièces</u>.(fig. 36).

La condition d'équilibre est

$$(t' + dt').(r + dr).d\varphi - t'.r.d\varphi = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{dt'}{t'} = -\,\frac{dr}{r}$$

$$\log_e t' = -\,\log_e r + \log_e C \qquad\qquad t' = \frac{C}{r}$$

Dans ce cas, l'écrasement donne une certaine liberté de déformation et t n'intervient plus dans l'équation d'équilibre.

Comme pour $r = r_o$, $t' = p_o$, $p_o = \dfrac{C}{r_o}$, $C = p_o.r_o$

$$t' = p_o\,\frac{r_o}{r} \qquad\qquad p_e = p_o\,\frac{r_o}{r}$$

Pour la déformation, nous avons

$$\delta' = \frac{t'}{E} = \frac{dr - d\varrho}{dr} = \frac{1}{E} \cdot \frac{p_o . r_o}{r}$$

$$\varrho = r - \frac{p_o . r_o}{E} \log_e r + C.r$$

soit $$\varrho_1 - \varrho_o = (r_1 - r_o) - \frac{p_o . r_o}{E} \log_e \frac{r_1}{r_o}$$

frette extérieure $$\frac{\varrho_o - r_o}{r_o} = \frac{1}{E} \cdot \frac{p_o . (r_1^2 + r_o^2)}{r_1^2 - r_o^2} + \eta . \frac{p_o}{E}$$

moyeu extérieur $$p_o = p \frac{r'}{r'_o}$$

moyeu intérieur $$\varrho_o - \varrho = (r'_o - r') - \frac{p.r'}{E} \log_e \frac{r'_o}{r'}$$

arbre $$\frac{r - \varrho}{r} = (1 - \eta) \frac{p}{E}$$

Exemple de calcul.

Arbre		1050 4/100	$r = 525,02$
Alésage du moyeu		1049 89/100	$r' = 524,945$
Extérieur du moyeu		1800	$r'_o = 900$
Frette	intérieur	1798 2/10	$r_o = 899,1$
	extérieur	2300	$r_1 = 1750$

$$\frac{\varrho_o - r_o}{r_o} = \frac{1}{E} p_o . \left(\frac{r_1 + r_o}{r_2^2 - r_o^2} + \eta\right) = 4,95 \frac{p_o}{E}$$

$$p = p_o \frac{r'}{r'} = p_o \frac{900}{524} = 1715 \; p_o \qquad \varrho_o - \varrho = 375,056 - 282,5 \frac{p}{E}$$

$$\frac{r - \varrho}{r} = 0,7 \frac{p}{E} \qquad p_o = 4,14 \text{ Kg/mm}^2 \qquad p = 3,5 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\varrho = 524,8407 \qquad \varrho_o = 899,854 \qquad t_1 = 17,16 \text{ Kg}$$

En marche 20 Kg/mm^2

Serrage de l'arbre 0,074 mm.

****

CHAPITRE IV.

EQUILIBRAGE DES MASSES EN ROTATION

EQUILIBRAGE DES MASSES EN ROTATION.

L'une des conditions essentielles de bon fonctionnement des turbines est l'équilibrage parfait de la partie mobile.

Pour qu'il ne se produise pas des vibrations de l'axe, il faut que le centre de gravité de la partie mobile coïncide avec l'axe de rotation et que celui-ci coïncide avec l'un des axes principaux d'inertie.

La première condition ne suffit pas, car on peut imaginer deux masses m_1 et m_2 à des distances r_1 et r_2 de l'axe (cfr. fig. 37). Elles se font équilibre l'arbre étant au repos; mais en mouvement ces deux masses donnent naissance à des forces d'inertie $m_1.\omega^2.r_1$ et $m_2.\omega^2.r_2$ qui vont réagir en sens inverse l'une de l'autre mais qui n'agissent pas dans le même plan donnent lieu à un couple.

Il ne suffit donc pas d'équilibrer statiquement la partie mobile pour éviter des réactions sur les paliers et des vibrations, celles-ci provoquées par l'action de la force centrifuge sur les éléments du balourd.

Pour préciser les méthodes employées supposons que le BALOURD existant dans le rotor résulte de la présence de deux masses excentrées m_1 et m_2 à des distances respectives de r_1 et r_2 (cfr. fig. 38); on pourra toujours équilibrer l'action de ces deux masses par l'introduction des deux masses additionnelles dans chacun des deux plans parallèles A et B .

Nous pourrons, en effet, calculer m'_1, m''_1, m'_2, m''_2, r'_1, r''_1, r'_2, r''_2 de telle façon que les quatre équations d'équilibre suivantes soient satisfaites

$$m_1.r_1.\omega^2 = m'_1.\omega^2.r'_1 + m''_1.\omega^2.r''_1$$

$$m'_1.r'_1.a'_1.\omega^2 = m''_1.r''_1.a''_1.\omega^2$$

$$m_1.r_1 = m'_1.r'_1 + m''_1.r''_1$$

$$m'_1.r'_1.a'_1 = m''_1.r''_1.a''_1$$

$$m_2.r_2 = m'_2.r'_2 + m''_2.r''_2$$

$$m'_2.r'_2.a'_2 = m''_2.r''_2.a''_2$$

On pourra adopter les équations supplémentaires suivantes

$$m_1 = m'_1 = m''_1$$

$$m_2 = m'_2 = m''_2$$

et déduire r'_1, r'_2, r''_1, r''_2 .

Les masses m'_1, m'_2 et m''_1, m''_2 pourront être remplacées par deux masses uniques M' et M''.

Malheureusement, on ne connaît pas les positions des balourds, ni la valeur de leur masse. Dans ces conditions, le calcul ci-dessus est inapplicable, mais il montre que l'on peut toujours équilibrer dynamiquement un rotor par l'application de deux masses additionnelles de grandeur appropriée placées dans deux plans quelconques perpendiculaires à l'axe de rotation.

*
* *

1.- METHODE EMPLOYEE.

I.- CAS D'UN DISQUE.

Dans ce cas, l'équilibrage statique suffit, car la distance l qui pouvait exister entre deux masses m_1 et m_2 se faisant équilibre statiquement est toujours négligeable.

Appareil pour opérer avec précision :

a) sur rails
b) sur balance.

a) Expérience sur rails.

L'arbre portant le disque roule sur deux rails. Le disque avance, recule, prend un mouvement alternatif s'il n'est pas équilibré. Il finit par amener le balourd au point le plus bas. On mettra donc de la matière au-dessus, c'est-à-dire à l'endroit diamétralement opposé. Si le disque est parfaitement équilibré, l'arbre roulera toujours dans le même sens. D'habitude, on remplacera le balourd ainsi trouvé en enlevant une certaine quantité de matière correspondant au balourd mais en un point diamétralement opposé.

b) Expérience au moyen d'une balance (fig. 39).

L'arbre du disque repose dans deux encoches entaillées en forme de V de façon à ce que le disque n'ait pas tendance à se déplacer. Un contrepoids placé à la partie inférieure peut être réglé pour amener le centre de gravité de l'ensemble légèrement plus bas que le point de suspension. Des fléaux solidaires du V sur lequels repose l'arbre permettent de rétablir l'équilibre. En déplaçant le disque d'un angle connu, après chaque mesure du poids P qui amène l'équilibrage de la balance, on peut tracer un tableau, puis un diagramme en fonction de l'angle fixant la position de l'arbre. En traçant une courbe qui relie les points, on trouvera l'angle qui rend p nul et qui fixe la position du balourd et sa valeur (fig. 40).

II.- CAS D'UN TAMBOUR OU D'UN ARBRE CHARGE D'UNE SERIE DE DISQUES NON EQUILIBRES ISOLEMENT.

Il n'y a plus d'intérêts à s'efforcer d'obtenir l'équilibrage statique et l'on peut procéder directement à l'équilibrage dynamique.

Le rotor étant entraîné à une vitesse de rotation appropriée, l'amplitude des oscillations prend une valeur appréciable et l'on peut noter le point d'élongation maximum en approchant un crayon de la périphérie du tambour du côté où le palier a été rendu libre. Le balourd se trouve nécessairement en avance sur le point ainsi trouvé, car, en raison de l'inertie, le maximum d'écart dans le plan horizontal ne saurait coïncider avec la direction de la force accélératrice à cet instant.

En faisant tourner la masse en sens inverse et à la MEME VITESSE, on obtiendra un second point de contact; la bissectrice de l'angle formé par les rayons aboutissant à ces deux points donnera la direction dans laquelle il convient de porter le contrepoids. La valeur de celui-ci de même que le rayon correspondant ne pourra être trouvé que par tâtonnement. On opérera aux deux extrémités du tambour successivement et, par approximations successives, on arrivera à l'équilibrage parfait.

*

* *

2.- ETUDE DE LA VITESSE CRITIQUE.

Un arbre parfaitement exécuté, portant une masse bien centrée dont l'axe coïncide avec un des axes principaux d'inertie de la masse mobile reste fléchi avec une flèche constante dans le plan de la charge résultante AUSSI LONGTEMPS que sa vitesse n'atteint pas une certaine valeur qui est appelée *vitesse critique*. A cette vitesse, en effet, l'équilibre est indifférent et la flèche que prend l'arbre tend à croître indéfiniment. L'expérience montre que cette vitesse critique est la même que l'arbre soit placé horizontalement ou verticalement.

1er cas.

Considérons tout d'abord le cas le plus simple d'un arbre supposé sans poids, tournant sur deux paliers et supportant un disque calé à égale distance des appuis (fig. 41).

Supposons que le centre de gravité du disque soit situé à une distance e de l'axe et que celui-ci sous l'action de la force centrifuge prenne une flèche y.

La force qui sollicitera le disque indépendamment de la pesanteur, dont nous faisons abstraction, aura pour valeur :

$$F = \frac{P}{g}\,\omega^2 (y + e)$$

Si on exprime la flèche y en fonction de l'effort F qui infléchit l'arbre, on obtient :

$$y = \frac{F.l^3}{48\ E.I}$$

pour un arbre reposant librement sur deux appuis distants de l et dont le moment d'inertie est I . Cette flèche est proportionnelle à la force et partant, on peut représenter par f la flèche correspondant à l'action d'une force de 1 Kg. :

$$f = \frac{l^3}{48\ E.I}$$

de telle sorte que nous pourrons écrire

$$y = F.f$$

D'où

$$y = f\,\frac{P}{g}\,\omega^2.(y + e)$$

et

$$y.(1 - f\,\frac{P}{g}\,\omega^2) = f\,\frac{P}{g}\,\omega^2.e$$

$$y = \frac{\omega^2}{\frac{g}{f.P} - \omega^2}\,e$$

On voit que y tend vers l'infini pour :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f.P}}$$

c'est-à-dire que, pour cette vitesse angulaire appelée VITESSE CRITIQUE, la flèche croît indéfiniment jusqu'à rupture sans que l'arbre puisse trouver une position d'équilibre (fig.42).

Cette vitesse est indépendante de e . Si e est nulle toutefois, la valeur de y prend la forme

$$y = \frac{0}{0}$$

Quand ω atteint la valeur critique, la flèche prend une valeur quelconque et l'équilibre est indifférent.

Pour une vitesse supérieure à la vitesse critique, la valeur de y devient de signe contraire à celle de e c'est-à-dire que le centre de gravité vient se placer entre l'axe déformé et l'axe idéal de rotation. La valeur de y tend vers e en valeur absolue, c'est-à-dire que le centre de gravité se rapproche de plus en plus de l'axe géométrique de rotation.

Au point de vue physique, on peut comprendre le phénomène de la vitesse critique de la manière suivante. Par rapport à la force infléchissante, la résistance élastique qu'oppose l'arbre à la déformation pour une flèche y devient de plus en plus faible de telle sorte que l'arbre se comporte comme s'il n'avait d'autre effet que de transmettre au disque le couple de torsion. Dans ces conditions, tout se passe pour le disque comme s'il n'était soumis à d'autres forces qu'à un couple et l'on sait qu'un corps qui n'est soumis qu'à un couple tend à prendre un mouvement de rotation autour d'un de ses axes principaux d'inertie.

Le phénomène reste le même quand l'arbre est vertical; la moindre flèche que l'arbre tend à prendre pour une cause quelconque tend à grandir indéfiniment si l'on se trouve à la vitesse critique.

<u>2e cas.</u> <u>Disque à inégale distance des appuis.</u>

$$f = \frac{l_1^2 . l_2^2}{3\ E.I.l}$$

Mais il faudrait tenir compte de ce que le disque ne restant pas normal à l'axe, l'action de la force centrifuge tend à redresser celui-ci.

<u>3e cas.</u>- <u>Disque calé sur arbre encastré aux extrémités.</u>

$$f = \frac{l^3}{192\ E.I}$$

La vitesse critique est toutefois deux fois plus élevées. Mais l'encastrement ne peut jamais être considéré comme parfait.

Il faut d'ailleurs considérer l'influence de l'inertie transversale.

****

CHAPITRE V.

VITESSE CRITIQUE D'ARBRES CHARGES

Nous avons déterminé plus haut la vitesse critique d'un arbre supposé sans poids, de section constante, chargé d'un disque, dans les conditions suivantes :

1°) placé à égale distance des appuis,
2°) placé à inégale distance des appuis.

Et dans les deux hypothèses limites :

a) arbre libre aux appuis,
b) arbre encastré d'une façon parfaite aux appuis.

Cette vitesse a pour expression : $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{f.P}}$

f représentant $\dfrac{l^3}{48\ E.I}$ pour le 1er cas (a),

$\dfrac{l_1^2.\ l_2^2}{3\ E.I.l}$ pour le 2e cas (a)

$\dfrac{l^3}{192\ E.I}$ pour le 1er cas (b)

REMARQUE.- Pour le cas où le disque est calé à distance inégale des appuis la vitesse calculée par la formule ci-dessus ne tient pas compte de l'influence de l'inertie tranversale qui tend à réduire la flèche et partant à accroître la vitesse angulaire. puisque $\omega = f\left(\frac{1}{f}\right)$

ARBRE CHARGE UNIFORMEMENT.

p par unité de longueur

Nous examinerons le cas d'un arbre de section constante chargé uniformément et libre aux appuis (en négligeant toutefois l'influence de l'inertie transversale) (fig. 44).

On a vu qu'à la vitesse critique, lorsqu'il n'existe aucun balourd l'équilibre est indifférent, il y a donc constamment égalité entre les forces intérieures représentées ici par l'action de la force centrifuge sur les différents éléments et les réactions moléculaires provoquées par les déformations.

Si nous désignons par conséquent par M le moment de flexion dans une section quelconque, dû à la force centrifuge; par I le moment d'inertie, par p le poids par unité de longueur, nous pouvons écrire :

$$T = \frac{dM}{dx} = -\frac{1}{2}\int_0^l \frac{p}{g}\,\omega^2.y.dx + \int_0^x \frac{p}{g}\,\omega^2.y.dx$$

or $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{M}{E.I}$ ou $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{1}{E.I} \cdot \dfrac{dM}{dx} = \dfrac{1}{E.I}\, T$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{E.I} \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{1}{E.I} \cdot \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{1}{E.I} \cdot \frac{p}{g}\, \omega^2 . y = a^4 . y$$

En posant $a^4 = \dfrac{p}{g} \cdot \dfrac{\omega^2}{E.I}$

L'équation différentielle qui permettra de déterminer y est du 4e ordre; son intégrale générale est la suivante :

$$y = A.\cos ax + B.\sin ax + C\, \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} + D\, \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

De cette équation, nous pourrons déduire :

$$\frac{dy}{dx} = - A.a.\sin ax + B.a.\cos ax + C.a\, \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} + D.a\, \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - A.a^2.\cos ax - B.a^2.\sin ax + C.a^2\, \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} + D.a^2\, \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

Pour déterminer les constantes, nous observons que :

$y = 0$ pour $x = 0$ (1°) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ pour $x = 0$ (3°)

$x = 1$ (2°) $x = 1$ (4°)

Les conditions ci-dessus conduisent à

$A + C = 0$ $- A + C = 0$

ce qui implique $A = 0$, $C = 0$.

Les conditions (2°) et (4°) s'expriment par la relation :

$$B.\sin al + D\, \frac{e^{al} - e^{-al}}{2} = 0$$

$$- B.\sin al + D\, \frac{e^{al} - e^{-al}}{2} = 0$$

qui est satisfaite pour $D = 0$, $B.\sin al = 0$

c'est-à-dire $al = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots.$

ou $a = 0$, $a = \dfrac{\pi}{l}$, $a = \dfrac{2\pi}{l}$, ...

La valeur de $a = 0$ doit être écartée car elle conduirait à la conclusion $y = 0$ pour toutes les valeurs de x ce qui est contraire aux faits observés. Donc la 1e solution est :

$$y = B.\sin \frac{\pi}{l}\, x$$

Et comme, pour $x = \dfrac{l}{2}$, y prend la valeur de la flèche y_o :

$$y_o = B.\sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} = B.\sin \frac{\pi}{2} = B$$

On conclut : $y = y_o . \sin \dfrac{\pi}{l}\, x$

Cette formule permet de déterminer la vitesse critique d'un arbre chargé de disques concentrés P_1, P_2, ... à la condition de pouvoir déterminer la vitesse critique ω de l'arbre soumis à son propre poids.

La vitesse critique résulte de la relation :

$$a^4 = \frac{p}{g} \cdot \frac{\omega^2}{E.I} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^4$$

et donne :

$$\omega = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{g.E.I}{p}}$$

Il existe d'autres solutions : la seconde correspond à $a = \frac{2\pi}{l}$

$$\omega = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{g.E.I}{p}} = 4 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{g.E.I}{p}}$$

vitesse quadruple de la précédente.

Il existe donc une deuxième vitesse critique. Voyons comment l'on peut expliquer celà.

Remarquons que y s'annule pour :

$$x = 0 \qquad x = \frac{1}{2} \qquad x = 1$$

L'arbre prend la forme caractéristique de la seconde vitesse critique (fig. 45).

De même, il existe une troisième vitesse critique correspondant à $a = \frac{3\pi}{l}$ égale à 9 fois la première vitesse et qui correspond à la forme donnée par la figure 46, de l'arbre déterminé.

M. Stodola a pu vérifier expérimentalement la valeur de la théorie ci-dessus et constater les faibles écarts entre les valeurs observées et les valeurs calculées à la 1e et à la 2e et même à la 3e vitesse critique.

THEOREME DE DUNCKERLEY.

Pour passer au calcul de la vitesse critique d'un arbre à section constante chargé d'une manière quelconque de disques P_1, P_2, ..., on peut appliquer la formule de Dunckerley déduite des recherches expérimentales mais qui a pu aujourd'hui être démontrée en partant de la théorie pure. Ce théorème s'exprime mathématiquement par la relation ci-contre :

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots\dots\dots$$

Ω représentant la vitesse critique de l'ensemble,
ω celle de l'arbre seul,
ω_1, ω_2, ... les vitesses critiques de l'arbre supposé sans poids chargé exclusivement et respectivement des poids : P_1, P_2, ...

La méthode analytique n'est plus utilisable lorsque l'on a affaire à un arbre chargé d'une masse distribuée d'une manière quelconque sur un arbre dont la section varie. Force est de recourir à la méthode graphique.

METHODE DE CALCUL.

Elle est basée sur cette remarque qu'à la vitesse critique, l'équilibre est indifférent (fig. 47)

On se donne à priori la forme de la fibre moyenne déformée; on peut choisir en particulier la forme de la fibre moyenne sous l'action des forces appliquées représentées par les poids P_1, P_2, ... des disques augmentés du poids de la partion correspondante de l'arbre.

Connaissant y en chaque point d'application, nous pourrons déterminer $\frac{P}{g}\,\omega^2.y$ et déterminer sous l'action de ces forces la forme de la fibre moyenne par la méthode graphique.

Si elle coïncide avec la première, on peut dire que ω représente la vitesse critique car, dans ce cas l'équilibre existera jusqu'à la rupture entre les forces appliquées provenant de l'action de la force centrifuge sur les masses en rotation et les réactions moléculaires provoquées par les déformations.

S'il n'en est pas ainsi, on pourra calculer la valeur de Ω qui aurait donné la flèche initiale puisque celle-ci est proportionnelle aux forces

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{y}{Y} \qquad\qquad \Omega = \omega.\sqrt{\frac{y}{Y}}$$

En réduisant toutes les ordonnées dans le rapport $\frac{Y}{y}$, on obtiendra une courbe qui se superposera approximativement à la première. Si les écarts sont trop grands, on pourra recommencer le calcul en prenant une courbe intermédiaire.

Dans les arbres chargés en plusieurs points, on constate également l'existence d'une 2e et d'une 3e vitesse critique.

Pour déterminer ces vitesses dans le cas d'un arbre de section variable chargé d'une manière quelconque, on ne peut procéder que par tâtonnements en partageant au jugé l'arbre en deux parties et en attribuant des signes contraires aux charges appliquées de part et d'autre du point choisi (fig. 48).

On pourra se rendre compte de l'exactitude de l'hypothèse faite en observant que pour le point de partage des deux parties, la tangente à la fibre moyenne déformée doit être commune.

Lorsque l'arbre repose sur 3 paliers à rotule, on peut considérer le cas où l'élastique prend la forme ci-dessous (fig. 49).

On peut au moyen du théorème des trois moments déterminer les réactions aux points d'appuis, ce qui permet de calculer les moments dans une section quelconque (fig. 49).

Mais on peut envisager que la flèche prise par l'arbre dans la seconde travée est de signe contraire (fig. 50).

On arrive ainsi à la 2e vitesse critique.

****

CHAPITRE VI.

LES POMPES A PISTON

Malgré les perfectionnements apportés dans le calcul et la construction des pompes centrifuges, la pompe à piston est encore employée aujourd'hui :

1°) pour les faibles débits (inférieurs à 10 m^3/h sous 8 à 10 kg/cm^2),
2°) pour les fortes et très fortes pressions (100-200 kg/cm^2),
3°) pour les liquides visqueux ou chargés de matières en suspension,
4°) pour certaines applications spéciales.

Une pompe à piston en ordre de marche a, dans des conditions d'application normales, un meilleur rendement que la pompe centrifuge correspondante, mais :
1°) elle coûte 5 fois plus cher,
2°) il y a plus d'ennuis mécaniques possibles (soupapes, etc...)
3°) elle est plus encombrante.

Les vitesse habituelles pour les pompes à pistons sont 30 à 40 tours/m. On ne dépasse généralement pas 70 à 90 tours /m. pour des raisons qui seront exposées plus loin, à moins qu'il ne s'agisse de très petits débits.

*
* *

La première pompe de mine qui fut utilisée est la machine de Newcomen (fig. 51).

La pompe se trouvait au fonds du puits, la machine motrice à la surface. La commande de la pompe est faite par la "maîtresse tige" en bois équarri, T , qui par son poids assure le refoulement de l'eau jusqu'à la surface et l'aspiration de vapeur à la pression atmosphérique dans le cylindre C . Le piston ayant atteint le haut de sa course, le robinet a est fermé, de l'eau froide est admise en jet pulvérisé pour assurer la condensation de la vapeur. Sous l'action de la pression atmosphérique sur l'autre face du piston, celui-ci descend, remontant la maîtresse tige. Le cylindre avait des dimensions respectables (Ø = 2,5 à 3 mètres). Cette machine à laquelle on donnait le nom de machine à feu, tournait à environ 7 à 8 tours/min.

*
* *

Dans les pompes à piston actuelles, on rencontre :
1°) des pompes à double effet (fig. 52),
2°) des pompes à simple effet à piston plongeur assurant l'étanchéité

par un bourrage accessible (fig. 53). Elles sont les plus répandues.
3°) les pompes à piston plongeur en parallèle suivant l'une des dispositions des figures 54, 55, 56.

L'introduction du système à piston plongeur est justifiée par le fait que, normalement le liquide pompé est,plus particulièrement lorsque ce liquide est de l'eau, chargé d'impuretés en suspension de nature à amener des rayures dans le cylindre, pour autant qu'on utilise pas pour les organes d'étanchéité du piston un matériau très souple, très élastique. L'utilisation de ce mode d'étanchéité qui comporte une surveillance et un remplacement fréquent exige un accès facile; le piston plongeur réalise cette condition primordiale très simplement.

Le système est rendu possible parce qu'avec un fluide incompressible l'espace mort ne joue aucun rôle nuisible.

La commande peut se faire :
1°) par balancier (analogue à la machine de Watt),
2°) par accouplement en tandem sur la tige d'une machine à vapeur,
3°) par bielle-manivelle (nécessaire dans le cas d'une commande électrique).

Les pompes peuvent être disposées :

A) horizontalement. Ex : grosse pompe commandée en tandem par machine à vapeur.

B) verticalement. Ex : petites et moyennes pompes à simple effet; généralement, le cylindre est ouvert vers le haut, mais si l'on veut disposer d'un carter, il faut bien mettre l'ouverture du cylindre vers le bas; cette disposition entraîne des complications et de toute façon une augmentation de la hauteur d'aspiration. Cette disposition ne convient guère que pour les pompes fonctionnant en charge.

*
* *

CALCUL DES DIMENSIONS GENERALES.

Le problème du calcul des dimensions générales d'une pompe hydraulique à piston soulève la question du choix du nombre de tours et de la vitesse moyenne du piston.

En effet, la donnée fondamentale est le débit Q par seconde. Pour obtenir ce débit, il suffit d'admettre un diamètre D et une course C telle que

$$\eta_v \cdot \frac{\pi . D^2}{4} C \frac{2 N}{60} = Q$$

si la machine est à double effet et piston unique. η_v représente le rendement volumétrique, c'est le rapport entre le volume réellement débité et le volume engendré à l'aspiration.

Nous avons donc une équation et 3 inconnues D, C, N . Mais l'étude de l'inertie des colonnes d'eau d'aspiration et de refoulement et l'étude des conditions de bon fonctionnement des soupapes fourniront deux autres relations.

Remarquons que la vitesse doit d'autre part s'adapter à la commande soit par moteur électrique, soit par machine à vapeur, ce qui implique une vitesse généralement la plus grande possible.

ETUDE DES EFFETS D'INERTIE SUR LES COLONNES D'EAU.

1°) Formule de Bernouilli en régime varié.

Reprenons la formule I du cours sur les turbomachines sous la forme différentielle

$$v.dp - dz - dT_f = \frac{1}{g} \cdot \frac{dc}{dt}\, ds \qquad (I)$$

En régime permanent c était fonction de s exclusivement. En régime varié,

$$c = f(s,\ t)$$

donc

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t}$$

$$\frac{dc}{dt}\, ds = \frac{\partial c}{\partial s}\, c.ds + \frac{\partial c}{\partial t}\, ds$$

car

$$\frac{ds}{dt} = c$$

$$\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{dc}{dt}\, ds = \frac{1}{g}\int_1^2 d\left(\frac{c^2}{2}\right) + \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t}\, ds$$

La formule I donne alors

$$\int_2^1 v.dp + (z_1 - z_2) - T + \frac{1}{2\,g}\left(c_1^2 - c_2^2\right) = \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t}\, ds$$

or

$$Q = \sigma . c$$

σ représentent la section de la conduite. Q n'est fonction que de t et ne varie pas avec s, donc

$$\frac{\sigma c}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

σ étant, lui, fonction de s ; finalement

$$\int_2^1 v.dp + (z_1 - z_2) - T_f + \frac{1}{2\,g}\left(c_1^2 - c_2^2\right) = \frac{1}{g} \cdot \frac{dQ}{dt}\int_1^2 \frac{ds}{\sigma} \qquad (1)$$

2°) Application à la tuyauterie d'aspiration.

Voir figure 57 (N.B.- Sens de rotation inverse de celui d'une machine à vapeur).

Si on néglige l'obliquité de la bielle, le déplacement du piston x est donné par la relation :

$$x = r.(1 - \cos\alpha)$$

D'où
$$v = \omega . r . \sin \alpha$$
$$c_o . \sigma_o = s . \omega . r . \sin \alpha$$
$$c_o = \frac{s}{\sigma_o} \omega . r . \sin \alpha$$
$$\frac{\partial c_o}{\partial t} = \frac{s}{\sigma_o} \omega^2 . r . \cos \alpha$$
$$\frac{dQ}{dt} = s . \omega^2 . r . \cos \alpha$$
$$v.(p_a - p_o) + (z_1 - z_2) - T + \frac{1}{2g}(\sigma - c_o^2) = \frac{1}{g} . \frac{dQ}{dt} . \frac{1}{\sigma}$$

car
$$\int_1^2 \frac{ds}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$$

si on admet que σ reste constant jusqu'à la soupape.

On peut en tirer $v.p_o$, soit

$$v.p_o = (v.p_a - h_o - T_f) - \frac{1}{2g}\left(\frac{s}{\sigma_o}\right)^2 . \omega^2 . r^2 . \sin^2\alpha - \frac{1}{g} . \frac{s}{\sigma} \omega^2 . r . l . \cos \alpha \quad (2)$$

Or, il faut que $p_o > 0$, donc

$$(v.p_a - h_o - T_f) - \frac{1}{2g}\left(\frac{s}{\sigma_o}\right)^2 . \omega^2 . r^2 . \sin^2\alpha - \frac{1}{g} . \frac{s}{\sigma} \omega^2 . r . l . \cos \alpha > 0$$

Plaçons nous dans les conditions les plus défavorables c'est-à-dire celles où le premier membre est minimum. On voit facilement que cela a lieu pour $\alpha = 0$

$$(v.p_a - h_o - T_f) - \frac{1}{g} . \frac{s}{\sigma} \omega^2 . r . l > 0$$

$$\omega^2 . r < (v.p_a - h_o - T_f) \frac{g}{s} . \frac{\sigma}{l} \quad (3)$$

Dans le cas de l'eau à la température normale de 15° et au niveau de la mer $v.p_a$ ne peut pas dépasser 10,33 m. alors, on doit avoir

$$\omega^2 . r < (10,33 - h_o - T_f) \frac{g}{s} . \frac{\sigma}{l}$$

sinon une séparation se produirait dans la colonne liquide et un choc violent se ferait sentir au moment où le piston reviendrait en contact avec la colonne immobilisée.

Si l est assez grand, cette condition conduit à un nombre de tours trop faible. On dispose alors une cloche à air (fig. 58). Dans ce cas, les choses se passent à peu près comme si l représentait non plus la longueur du tuyau depuis l'aspiration jusque la soupape, mais la longueur de tuyau comprise entre la cloche et la soupape puisqu'avant la cloche, le mouvement est uniforme. On peut ainsi fixer le rapport $\frac{s}{\sigma . l}$. On adopte généralement $\frac{\sigma}{s . l} \simeq 1$.

On voit qu'on peut alors dresser un tableau des hauteurs géométriques d'aspiration limites en fonction du nombre de tours N , de la course C et pour les conditions normales de température et de pression atmosphérique

$$\omega = \frac{2\pi.N}{60} \qquad r = \frac{C}{2}$$

C	N						
	40	50	60	70	80	90	100
1	7,90	7,30	6,80	5,60	4,60	3,50	2,20
0,8	8,20	7,60	7,00	6,30	5,60	4,60	3,60
0,6	8,35	8,00	7,80	7,00	6,30	5,70	5,00
0,4	8,60	8,30	8,00	7,60	7,10	6,80	6,30
0,3	8,70	8,50	8,30	8,00	7,60	7,30	7,00

Ces valeurs sont des valeurs limites puisqu'elles supposent une charge négligeable sur la soupape d'aspiration T_f désignant par hypothèse la perte de charge dans la colonne d'aspiration.

REMARQUES.- a) Le tableau est établi pour une pression atmosphérique de 10,33 mètres d'eau. Si on est en montagne, $p_a < 10,33$ m. et les valeurs limites sont plus faibles.

b) Si la température n'est pas de 15°, mais sensiblement plus élevée il faut remplacer la valeur 10,33 par $10,33 - H_{ta}$, H_{ta} désignant la tension de vaporisation du liquide à la température t .

En d'autres termes, la condition $p_o > 0$ doit être remplacée par

$$p_o > H_{ta}$$

3°) Application à la tuyauterie de refoulement.

Reprenons l'équation (1); introduisons les données de la figure 59

$$v.p_r = (v.p_a + h_r + T_f) + s.\omega^2.r\,\frac{l_r.\cos\alpha}{g.\sigma_r} - \frac{1}{2g}\left(\frac{s}{\sigma_o}\right)^2.\omega^2.r^2.\sin^2\alpha$$

Il faut $p_r > 0$.

Plaçons nous dans les conditions les plus défavorables (α = 180°)

$$\omega^2.r < (v.p_a + h_r + T_f')\,\frac{g.\sigma_r}{l_r.s} \qquad (4)$$

On introduit également une cloche à air au refoulement pour régulariser le débit. l_r ne représente alors que la longueur de conduite entre la soupape et la cloche, puisque le mouvement du fluide est uniforme après celle-ci.

ETUDE DU FONCTIONNEMENT DES SOUPAPES.

Soit H la hauteur motrice qui détermine la vitesse d'écoulement sous le siège, hauteur motrice qui dépend de la charge que supporte la soupape.

On peut écrire que le volume engendré par le piston pendant le temps dt est égal au volume qui passe sous la soupape dans le même temps augmenté du volume supplémentaire qui s'accumule sous la soupape pendant la levée dh (fig. 60).

$$s.\omega.r.\sin\alpha.dt = \sigma_o.dh + k.m.h.\sqrt{2\,g.H'}\,.dt$$

m est le périmètre de la soupape,
k est le coefficient de débit de l'ajutage formé par le siège et la portée de la soupape.

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \qquad\qquad dt = \frac{d\alpha}{\omega}$$

$$s.r.\sin\alpha.d\alpha = \sigma_o.dh + k.m.h.\sqrt{2\,g.H}\;\frac{d\alpha}{\omega}$$

Posons $s.r = a$ et $\frac{k.m}{\omega}\sqrt{2\,g.H} = b$

L'équation devient $a.\sin\alpha.d\alpha = \sigma_o.dh + b.h.d\alpha$

Cette équation a pour intégrale générale

$$h = C.e^{-\frac{b}{\delta_o}\alpha} + \frac{a}{b^2 + \sigma_o^2}(b.\sin\alpha - \sigma_o.\cos\alpha) \qquad (5)$$

Pour $\alpha = 0$, $h = 0$ (REFOULEMENT : PREMIER DEMI-TOUR),

$$C = \frac{a.\sigma_o}{b^2 + \sigma_o^2}$$

$$h = \frac{a.\sigma_o}{b^2 + \sigma_o^2}\left(e^{-\frac{b}{\delta_o}\alpha} + \frac{b}{\sigma_o}\sin\alpha - \cos\alpha\right) \qquad (6)$$

On voit que, pour $\alpha = \pi$, $h \neq 0$

$$h = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = \pi + \delta$$

δ étant déterminé par

$$e^{-\frac{b}{\delta_o}(\pi+\delta)} + \frac{b}{\sigma_o}\sin(\pi+\delta) - \cos(\pi+\delta) = 0$$

et comme le premier terme est négligeable vis-à-vis des deux autres

$$tg(\pi+\delta) = \frac{\sigma_o}{b} \qquad\qquad \delta = \frac{\sigma_o}{b} \qquad (7)$$

Pour l'ASPIRATION : $h = 0$ pour $\alpha = \delta$ puisque la soupape de refoulement n'est fermée qu'à ce moment

$$0 = C.e^{-\frac{b}{\delta_o}\delta} + \frac{a}{b^2 + \sigma_o^2}(b.tg\,\delta - \sigma_o).\cos\delta_o$$

$$0 = C.e^{-\frac{b}{\delta_o}\delta} + \frac{a}{b^2 + \sigma_o^2}\left(b\,\frac{\sigma_o}{b} - \sigma_o\right)$$

d'où $C = 0$

L'équation qui donne le mouvement de la soupape d'aspiration à partir du premier demi-tour doit donc s'écrire

$$h = \frac{a}{b^2 + \sigma_o^2}(b.\sin\alpha - \sigma_o.\cos\alpha) \qquad (8)$$

Elle montre que la soupape d'aspiration ne se fermera que quand

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{b} = \operatorname{tg} \delta$$

c'est-à-dire pour $\alpha = \delta$.

Donc, si, tenant comnte de ceci, on reprend la formule (5) pour étudier le mouvement de la soupape de refoulement après le premier demi-tour, on retrouvera la relation (8).

Ainsi, le retard à la fermeture et à l'ouverture est le même pour les deux soupapes. L'équation du mouvement est aussi la même

$$\delta = \frac{\sigma_o}{b} = \frac{\omega}{k\,(\frac{m}{\sigma_o})\sqrt{2\ g.H}} \tag{9}$$

Ouverture au point mort $\qquad h = \dfrac{a.\sigma_o}{b^2 + \sigma_o^2}$

Ouverture maximum pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \delta$

$$h_{max} = \frac{a}{b} = \frac{\omega.s.r}{k.m.\sqrt{2\ g.H}} \tag{10}$$

En dérivant (8) par rapport à t , nous obtiendrons la vitesse de levée

$$w = \frac{dh}{dt} = \omega \frac{a}{b^2 + \sigma_o^2}\,(b.\cos \alpha + \sigma_o.\sin \alpha) \tag{11}$$

Nous obtiendrons la vitesse de la soupape à la fermeture en introduisant

$$\alpha = \pi + \delta \qquad (\cos \delta \simeq 1)$$

$$w = -\ \omega \frac{a}{b} = -\ \frac{\omega^2.s.r}{k.m.\sqrt{2\ g.H}} \tag{12}$$

Or, il faut limiter la vitesse à la fermeture pour éviter le bruit et assurer la conservation des sièges. On adopte généralement

$$w = 0{,}1 \text{ m/sec.}$$

D'autre part : $k = 0{,}6$ (expérimental) et pour H on s'en tient généralement à un mètre d'eau.

(12) devient $\qquad \omega^2.r.s = 0{,}26.m \qquad (13)$

(9) devient $\qquad \delta = 0{,}39 \dfrac{N}{(\frac{m}{\sigma})} \qquad (14)$

(10) devient $\qquad h_{max} = \dfrac{\omega.s.r}{0{,}6\ m.\sqrt{2\ g.H}} = \dfrac{\omega.s.r}{0{,}26.m} \qquad (15)$

CONCLUSIONS.

Si la question de la hauteur d'aspiration limite n'est pas en jeu, on peut dire que ce qui limite la vitesse de rotation de la pompe, c'est la vitesse de chute lors de la fermeture des soupapes.

Comme la hauteur d'aspiration est limitée par la charge H sur la soupape, il faut limiter H à une valeur faible. Si nous adoptons 1 m. comme une limite, la relation (13) est déterminante.

En effet, la condition de débit pour une pompe à double effet ou une pompe jumelée simple effet est

$$\eta_v . s . 2 . r \frac{\omega}{\pi} = Q$$

En désignant par Q_a le débit apparent égal à $\frac{Q}{\eta_v}$, on pourra écrire

$$s . r . \omega = A$$

avec $A = \frac{\pi . Q_a}{2}$ qui est une donnée fondamentale.

La condition (13) peut donc se mettre sous la forme

$$A . \omega = 0,26 \text{ m} \qquad (18)$$

qui correspond à l'hypothèse que la vitesse de contact de la soupape avec son siège ne dépasse pas 0,1 m/sec. La vitesse angulaire se trouve ainsi déterminée dès que l'on s'est fixé m .

ω pourra être d'autant plus grand que m pourra être pris plus grand : de là les soupapes constituées par une couronne ou une série de couronnes concentriques dont nous donnons des exemples plus loin.

Il y aura lieu de vérifier si la relation (3) est satisfaite

$$\omega^2 . r . s < g . H' . \frac{\sigma}{l} \qquad (19)$$

H' représentant $v . p_a - h_o - T - H_{ta}$

dans laquelle on a pris :

1°) pour $v . p_a$: la pression barométrique du lieu exprimée en mètres du liquide pompé;

2°) pour H_{ta} la tension de vapeur du liquide pompé à la température t_a du liquide;

3°) pour h_o le hauteur comprise entre le plan d'eau inférieur et l'axe de la pompe.

4°) T_f la perte de charge à l'aspiration y compris la hauteur H de la charge sur la soupape d'aspiration.

Cette dernière condition se ramène à

$$A . \omega < g . H' \frac{\sigma}{l} \qquad (20)$$

ou encore, en tenant compte de la relation (18)

$$0,26 \frac{m}{\sigma} < g \frac{H'}{l} \qquad (21)$$

H' désignant la dépression effective limite qui peut règner dans l'axe de la pompe au point le plus défavorable de la course.

D'après celà, le seul moyen d'en sortir est de réduire la distance l de l'axe de la pompe au plan d'eau moyen de la cloche à air et de faire grandir $\frac{m}{\sigma}$.

REMARQUE.- La condition (13) peut se mettre sous la forme

$$\omega^2.r \frac{s}{\sigma} = 0,26 \frac{m}{\sigma}$$

ou encore $$\omega.V \frac{s}{\sigma} = 0,26 \frac{m}{\sigma} \qquad (22)$$

V désignant la vitesse au bouton de manivelle proportionnelle à V_m vitesse moyenne du piston.

$$V_m = \frac{2}{\pi} V$$

La condition (20) ayant fait connaître la vitesse angulaire ω, la relation (22) fixe la vitesse moyenne dès que l'on se donne s/σ et m/σ.

Cette relation ainsi écrite fait ressortir la loi de similitude suivante :

Pour deux pompes géométriquement semblables pour ce qui concerne la distribution (même s/σ et même m/σ), il y a identité de fonctionnement si on fait décroître la vitesse angulaire de façon que le produit reste constant. Cette condition exclut la similitude géométrique complète, la course devant diminuer de façon que $\omega^2.r$ reste constant. Celà revient à dire que la vitesse angulaire doit diminuer à mesure que le volume engendré par la pompe doit augmenter.

CALCUL DE LA CLOCHE A AIR GREFFEE SUR LA CONDUITE DE REFOULEMENT.

La pompe donne un débit pulsatoire que l'on voudrait rendre permanent. Le cas le plus défavorable est celui de la pompe à simple effet (fig. 61).

La cloche doit pouvoir emmagasiner le volume hachuré dans les deux sens. C

Considérons la cloche représentée par la figure 62

$$\frac{v_o}{v_1} = \frac{p_1}{p_o}$$

$$\frac{v_o - v_1}{v_o} = \frac{p_1 - p_o}{p_1}$$

Or, $v_o - v_1$ doit être égale au volume représenté par l'aire hachurée dans les deux sens. Ce volume, dans le cas de la pompe à simple effet est égal à 0,55 du volume engendré par coup de piston.

$$v_o - v_1 = 0,55 \ V .$$

On admet une variation de pression de 2,5 % dans la cloche

$$\frac{p_1 - p_o}{p_1} = \frac{2,5}{100}$$

D'où $$\boxed{v_o = 22 \ V}$$

Dans le cas de la pompe à double effet,

$$\boxed{v_o = 4,2 \ V} \qquad \text{(fig. 63)}$$

DESCRIPTION DE SOUPAPES.

Nous avons vu que, pour augmenter N , il fallait augmenter m . Donc le problème est de réaliser le plus grand m possible pour une surface σ_0 donnée.

On caractérise souvent les soupapes par le rapport $\frac{m}{\sigma_0}$

Les figures 64, 65, 66 montrent trois types de soupapes à $\frac{m}{\sigma_0}$ croissant.

La portée des sièges est calculée pour ne pas dépasser

150 kg/cm^2 pour le bronze,
80 kg/cm^2 pour la fonte.

EXEMPLES.

Voici les données recueillies dans "V.D.I." de 1905 sur une machine importante attaquant directement les pompes à double effet (avec piston analogue aux Worthington placé entre le bâti et les cylindres à vapeur) voir fig. 67.

H.P. Ø 550
M.P. Ø 925
B.P. Ø 1000
2 en parallèle

Jumellés { tandem {H.P. / B.P ; tandem {M.P / B.P }

2 cylindres à eau	Ø 485
Course commune	700
Nombre de tours max.	70
Rendement volumétrique	98 %

Débit : 45.000 m^3 par 23 heures.

Soupapes. - Multiples à sièges annulaires de Ø 64 (extérieur) (fig. 65).
Nombre de soupapes : $2 \times 19 + 4 \times 18 = 38 + 72 = 110$
à l'aspiration comme au refoulement.

****

CHAPITRE VII.

LES COMPRESSEURS A PISTON

Le compresseur à piston est représenté schématiquement (fig. 68) Le diagramme, pour une face du piston est représenté à la figure 69. Avant que ne s'ouvre la soupape d'admission, l'air resté dans l'espace mort, se détend (1,2) jusqu'à la pression d'entréeù puis il y a aspiration (2,3), compression jusqu'à la pression de sortie p_s (3,4), puis émission (4,1). Cette émission s'arrête quand le volume d'air renfermé dans le cylindre est égal au volume de l'espace mort. L'espace mort est généralement très petit. L'espace mort n'augmente pas directement le travail indiqué du compresseur, mais il diminue le débit, du fait que la détente de l'air qui reste enfermé dans cet espace mort réduit fortement le volume d'air aspiré. Si l'espace mort est plus grand, pour un débit donné, il faudra un compresseur plus volumineux (pour lequel les pertes par frottements et autres seront plus élevées). D'où une machine plus coûteuse et de rendement moins bon.

On définit le rendement volumétrique du compresseur

$$\eta_v = \frac{V - V_p}{V}$$

c'est le rapport à la cylindrée, du volume de gaz théoriquement débité. Il y a des pertes par fuites, dans un compresseur; après l'aspiration, les soupapes ne retombent pas instantanément sur leur siège, ce qui fait que le piston dont la vitesse est rapidement assez grande, ne peut comprimer le gaz, du fait que la soupape d'aspiration reste ouverte.

Il y a encore des pertes dues à la résistance à l'aspiration et à la résistance au refoulement. L'influence du refroidissement des parois, nécessaire pour ne pas les gripper, est [illegible]ible.

Si on trave le diagramme réel du compresseur, on a une surface S' du diagramme plus grande que celle du diagramme théorique dont le surface est S (cfr. fig. 69, surface hachurée en plus).

$\Delta = \frac{S'}{S}$ est appelé ACCROISSEMENT PROPORTIONNEL DU TRAVAIL THEORIQUE.

On a introduit dans l'étude du compresseur la notion du rendement isothermique

$$\eta_{isoth} = \frac{\text{travail isothermique}}{\text{travail effectif}} = \frac{\mathcal{T}_{isoth}}{\mathcal{T}_e} = \frac{\mathcal{T}_{isoth}}{\mathcal{T}_i} \cdot \frac{\mathcal{T}_i}{\mathcal{T}_e}$$

Le travail adiabatique est le travail du cycle théorique (fig. 69) comportant détente (1,2) et compression (3,4) suivant la loi de l'adiabatique.

Le travail isothermique est le travail du cycle qui ne comporterait que des détentes et compressions isothermiques.

Pourquoi introduire ici la notion de rendement isothermique η_{isoth}? Parce que, pour l'industriel, le travail disponible après refroidissement du fluide, est $\mathcal{T}_i$; or, le fluide s'échauffant pendant la compression a exigé un travail $\mathcal{T}_0$ plus grand, alos qu'après refroidissement dans le réservoir où il se rend avant utilisation, on ne saurait retirer du gaz comprimé que le travail théorique résultant du tracé du diagramme, au travail isothermique.

Pour passer de la puissance indiquée à la puissance effective, il faut introduire la notion du rendement organique.

$$\eta_e = \eta_i \cdot \eta_o$$

La puissance à fournir à l'arbre est toujours supérieure à celle employée au cylindre étant donné le travail absorbé par les frottements du piston et des différents organes en rotation.

Pour améliorer le rendement isothermique du compresseur, on construit des compresseurs multi-étagés (cfr. fig. 70, le diagramme d'un bi-étagé). Un premier cylindre comprime le fluide à une pression intermédiaire, puis celui-ci passe dans un réservoir où une circulation d'eau à la température ambiante va le refroidir; puis, le fluide passe au second cylindre (éventuellement,pour les multi-étagés, dans un 3e cylindre, puis un quatrième, etc... jusqu'à atteindre à la sortie du dernier cylindre la pression p_s).

Si l'on examine la figure 70, on voit que, par rapport à la compression adiabatique de p_e à p_s dans un cylindre, on a gagné avec un compresseur bi-étagé, le travail représenté par l'aire hachurée.

La compression isothermique de p_e à p_s dans un seul cylindre est donnée par la courbe —.—.—.—.— .

On voit que le compresseur bi-étagé se rapproche de la compression isothermique. On gagne aussi sur le rendement volumétrique (l'espace mort du deuxième cylindre est plus petit).

Pour les pressions supérieures à 2-3 Kg/cm^2, on construit d'habitude des compresseurs bi-étagés. Pour des pressions de l'ordre de 35 kg, on a quatre étages. Pour les très fortes pressions (1000 kg/cm^2 : synthèse de NH_3), on a des compresseurs multiétagés.

La détermination des pression intermédiaires dans le compresseur multi-étagé se fait EN PARTANT DE LA CONDITION DU MINIMUM DE TRAVAIL. On peut démontrer, et nous le faisons dans le chapitre consacré au calcul des turbo-compresseurs, que si la compression était rigoureusement adiabatique et si le refroidissement après passage dans le réfrigérent était complet, c'est-à-dire se faisait jusqu'à la température de l'air à l'entrée du compresseur, le minimum du travail total pour l'ensemble des n étages serait obtenu lorsque le travail indiqué serait le même pour chacun des étages.

Le rendement volumétrique réel est toujours plus petit que le volume calculé au diagramme par suite des rentrées par la soupape de refoulement et des pertes à la soupape d'aspiration pendant la compression.

Pour déterminer le rendement volumétrique réel, on peut utiliser la méthode des deux réservoirs (fig. 75).

Le premier sert d'amortisseur; par réglage du robinet r , on peut faire en sorte que la pression qui règne dans le premier reservoir, soit à peu près constante et égale à la pression de refoulement garantie. Lorsque le régime est établi, on ferme, à un instant déterminé, le robinet R après avoir noté la pression p_1 et la température t_1 . Lorsque la pression p_s est atteinte, on ouvre le robinet R et on note le temps t qu'il a fallu pour arriver à remplir le second réservoir de volume connu V_s .

Le poids emmagasinné dans le réservoir par seconde peut s'écrire

$$P = \frac{\delta_s . V_s - \delta_1 . V_s}{t} = \frac{(\delta_s - \delta_1). V_s}{t} .$$

Or, δ_s et δ_1 peuvent être calculés en fonction des pressions et températures

$$\frac{p.V}{T} = R \qquad \delta = \frac{p}{R.T} \qquad \delta_1 = \frac{p_1}{R.T_1} \qquad \delta_s = \frac{p_s}{R.T_s} .$$

Le poids P correspond à un volume V_a pris à la pression atmosphérique normale p_a et à la température normale t_a (15°) égal à

$$V_a = P \frac{p_a}{R.T_a} .$$

Le volume engendré par seconde par les piston étant représenté par V le rendement volumétrique réel pourra s'évaluer en écrivant

$$\eta_{V\ réel} = \frac{V_a}{V} .$$

Si l'on veut passer au calcul des dimensions du compresseur, on voit que l'on a une première équation résultant du débit en volume

$$\frac{\pi . D^2}{4} C \frac{2 N}{60} \eta_v = V_a$$

pour un compresseur à double effet.

On peut ajouter une équation, celle de la vitesse moyenne

$$\frac{2 C.N}{60} = 2,5 \text{ m/sec à } 3 \text{ m/sec.}$$

La valeur de 3 m/sec n'étant pas souvent dépassée. En ce qui concerne le choix du nombre de tours, il faut se laisser guider par la question de la durée d'utilisation.

Si le compresseur a une durée d'utilisation journalière très élevée, il faudra s'en tenir à des vitesses relativement lentes 100 à 200 tours par minute. S'il s'agit de groupes qui doivent être rendus transportables, il faut bien adopter des vitesses plus grandes, de l'ordre de 500 à 600 t/min. pour les petites unités.

Dans ce cas, on a recours au graissage forcé, avec bâti formant carter fermé. Les machines sont construites avec des clapets libres à ressorts de la forme indiquée à la figure 71.

La figure 73 donne un schéma général du compresseur bi-étagé avec réfrigérant entre les deux cylindres.

La figure 72 représente un compresseur bi-étagé avec piston différentiel.

La figure 74 montre schématiquement en compresseur à 35 Kg (4 étages) Les quatre pistons forment un seul bloc; il n'y a qu'un bourrage de faible diamètre; pour le reste, les cercles des pistons assurent l'étanchéité pour chaque cylindre, ce qui évite les pertes de fluide extérieures.

****