

LES POMPES CENTRIFUGES

PAR

Ch. HANOCQ,

Ingénieur, Répétiteur à l'Université de Liège.

Communication faite à l'Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liège (Section de Liège), le 22 novembre 1908.

INTRODUCTION.

Depuis quelques années, l'installation de centrales électriques dans les usines et les charbonnages se généralise en raison des facilités que l'électricité offre au transport de l'énergie à distance, et de la diminution des frais d'exploitation qui résultent de la concentration, en un seul endroit, de toute la force motrice, concentration qui permet l'emploi d'unités plus importantes et partant plus économiques, qui facilite la surveillance et l'entretien, etc.

Dans le but de centraliser davantage, on a même vu se créer des usines n'ayant d'autre but que de produire l'énergie électrique et de vendre à la grande industrie, des kilowatts.

Une conséquence de cette modification profonde dans l'exploitation industrielle, a été la nécessité d'approprier

tous les appareils récepteurs, à la vitesse souvent excessive des moteurs électriques.

Le vieux mécanisme de transformation du mouvement continu en mouvement alternatif, la bielle et la manivelle, n'a pu s'accommoder de ces grandes vitesses qui entraînaient des effets d'inertie importants.

On s'est donc trouvé dans la nécessité ou de réduire, par l'intermédiaire d'un engrenage ou d'une courroie, le nombre des tours des moteurs, ce qui entraînait une perte d'énergie et une augmentation des frais d'entretien, ou de chercher à éliminer la bielle et la manivelle dans les appareils comportant ce mécanisme.

Un cas typique a été l'évolution des pompes à piston pour les grandes hauteurs de refoulement. On a d'abord cherché à accroître leur vitesse de rotation pour la porter à 150 et 200 tours; le moteur à cette vitesse, restait encombrant et coûteux; la pompe était de construction difficile et l'entretien devait être très soigné.

Pour réduire les dimensions du moteur, on a substitué à l'attaque directe, l'attaque par engrenage ou par courroie, d'où une diminution de rendement et une sujétion de plus au point de vue des arrêts possibles.

En présence de ces inconvénients, la solution offerte par les appareils à mouvement continu comme les pompes centrifuges, offrait un intérêt considérable et, malgré les difficultés qui se présentaient et qui laissaient peu d'espoir d'arriver à un résultat satisfaisant, notamment au point de vue du rendement, cette solution fut tentée par les constructeurs.

Refouler d'un seul jet à 500 et 600 m de hauteur au moyen d'une pompe centrifuge, cela paraissait irréalisable il y a une dizaine d'années.

A l'heure actuelle, le problème est résolu, le rendement pouvant être considéré comme satisfaisant, si pas comme équivalent à celui des pompes à piston. Si le rendement

est d'ailleurs un peu plus faible, les pompes centrifuges ont pour elles la sécurité, la facilité d'installation qui les font adopter de plus en plus.

Elles sont employées pour l'épuisement des mines, l'alimentation des châteaux d'eau, l'alimentation des chaudières, etc.

C'est la maison *Sulzer* qui, la première, a résolu le problème d'une manière satisfaisante. Les difficultés à surmonter étaient surtout d'ordre pratique; mais il faut ajouter que les théories incomplètes qui avaient été faites et qui suffisaient pour le calcul des pompes ordinaires, étaient de nature à induire en erreur. Le manque d'expériences, de renseignements pratiques au sujet des coefficients, amenaient bien des auteurs à conclure qu'il était impossible de dépasser une hauteur de refoulement de 20 à 25 m par roue.

Chaque constructeur possède évidemment une méthode pour la détermination des dimensions des pompes dans des conditions déterminées; cette méthode est souvent expérimentale, c'est-à-dire qu'elle est basée sur la connaissance des courbes caractéristiques relevées par des essais sur une pompe à peu près semblable.

Nous allons exposer une théorie qui, en permettant de tenir compte de toutes les pertes, est basée sur la connaissance des coefficients de frottement de l'eau dans les canaux, de l'eau contre les roues, et de l'arbre dans ses paliers, ces coefficients étant déduits d'expériences.

L'avantage de cette théorie sur la méthode expérimentale sera évident: les conclusions ne dépendront pas des dimensions particulières de la pompe étudiée, et il sera possible, en faisant varier dans les calculs les valeurs des différents éléments, de déterminer l'influence de chacun d'eux sur le rendement et la hauteur de refoulement.

Avant d'aborder cette étude, nous classerons les différents types de pompes centrifuges et nous en donnerons une description rapide.

CHAPITRE I.

Classification et fonctionnement des différents types de pompes centrifuges.

Les pompes centrifuges ne forment qu'une des deux catégories des pompes à réaction. Celles-ci sont constituées, d'une manière générale, par des canaux disposés soit perpendiculairement, soit parallèlement à l'axe d'une roue, ces canaux étant parcourus par le fluide sous l'action des forces d'inertie.

Lorsque les canaux sont disposés parallèlement à l'axe, on donne à la pompe le nom de pompe axiale; dans le cas où les canaux sont disposés perpendiculairement à l'axe, on a affaire aux pompes centrifuges proprement dites. Nous ne parlerons que de ces dernières, parce que ce sont les seules qui sont employées.

Parmi les différents systèmes de pompes centrifuges, on peut distinguer :

1° *les pompes pour grand débit et faible hauteur;*

2° *les pompes pour faible débit et grande hauteur :*

a) *à une seule roue ; b) à plusieurs roues travaillant en série.*

Chacun de ces systèmes peut être réalisé avec l'axe disposé horizontalement ou verticalement.

Les canaux peuvent être disposés symétriquement de part et d'autre d'un plan perpendiculaire à l'axe, le fluide pénétrant alors dans les roues, à la fois par les deux côtés; dans ce cas, on dit que la pompe est à *deux ouïes*.

Lorsque le fluide ne pénètre dans les canaux que d'un seul côté, on dit que la roue est à *simple ouïe*.

Toutes ces distinctions n'ont d'importance qu'au point de vue construction. Au point de vue fonctionnement, en effet, il n'y a entre les deux systèmes qu'une différence: celle qui résulte de la présence ou de l'absence d'un *diffuseur* dont nous parlerons plus loin.

I. — Pompe centrifuge pour grand débit et faible hauteur.

La fig. 1, Pl. 6, donne le type primitif de la pompe tel qu'il a été présenté par *Appold* en 1867, et tel qu'on le réalise encore aujourd'hui lorsqu'on demande au système d'être simple, robuste, peu encombrant, peu coûteux, comme par exemple, pour les fouilles de fondations. Le rendement pour ces sortes d'applications est, en effet, un élément secondaire dans l'appréciation de la valeur du système.

Le fluide pénètre par deux ouïes et, sous l'action de la force centrifuge, est projeté du centre à la périphérie, à travers les canaux constitués par des aubes et deux joues venues de fonderie avec le moyeu.

Le fluide, à la sortie de la roue, est recueilli dans un canal *c* sur lequel vient se brancher la conduite de refoulement.

II. — Pompe centrifuge pour faible débit et grande hauteur.

a) *A une roue.* — Nous donnons fig. 2, Pl. 6, le tracé au $\frac{1}{5}$ d'une pompe que nous avons étudiée, et qui représente le type perfectionné des pompes centrifuges actuelles destinées aux grandes hauteurs de refoulement.

La pompe ne possède qu'une ouïe, ce qui n'est pas essentiel, mais qui, cependant, est le cas général dans les pompes de cette catégorie.

Le fluide est ici dirigé normalement au plan de la roue, pour réaliser, autant que possible, les conditions théoriques de fonctionnement qui supposent un mouvement uniforme et parallèle de tous les filets liquides.

On a cherché, en outre, dans le but d'éviter des remous, à supprimer les changements brusques de section à l'ouïe et à la sortie de la roue. Pour équilibrer les pressions s'exerçant sur la roue, on a divisé les deux faces de

celle-ci en deux parties par deux joints à la même hauteur; par des ouvertures pratiquées en *e*, on a réalisé des pressions égales de part et d'autre de la roue en dessous et au-dessus du joint.

La différence essentielle entre ce type et le précédent, est que le fluide, à sa sortie de la roue, est reçu dans un récupérateur, appelé ordinairement *diffuseur*, destiné à ramener la vitesse du fluide qui est très considérable, à une valeur plus petite et, par conséquent, à transformer en énergie potentielle de pression l'énergie cinétique du fluide.

Le diffuseur à aubes *d* est suivi d'un canal en volute, destiné à augmenter la récupération en abaissant encore la vitesse par l'accroissement progressif de la section de passage.

Dans les pompes de la catégorie I, il arrive souvent que le canal *c* de la fig. 1 est remplacé par celui de la fig. 2, dont l'ouverture en ajutage et la forme en volute ont pour effet d'augmenter le rendement. Il y a cependant lieu de remarquer que dans ce cas, la pompe est plus encombrante et de construction plus coûteuse.

Nous n'insistons pas sur les détails de construction; l'arbre est porté par deux paliers; le palier de butée, seul dessiné, permet de régler la position de la roue; enfin les bourrages sont suivis de buselures ne possédant qu'un jeu très faible de 2 ou 3 dixièmes de millimètre avec l'arbre.

Des conduits *t* permettent, en outre, d'amener l'eau sous pression dans les bourrages par l'intermédiaire de robinets et cela, afin d'éviter des rentrées d'air très nuisibles au bon fonctionnement.

b) *A plusieurs roues.* — Lorsqu'on ne peut pas atteindre une hauteur de refoulement suffisante avec une seule roue, on associe plusieurs pompes en tension, c'est-à-dire que l'on dispose les choses de telle façon que la première pompe refoule dans la seconde, et ainsi de suite.

Pratiquement, les roues sont fixées sur un arbre comme l'indique la fig. 3, Pl. 6, et le fluide qui sort du diffuseur de la première roue, identique à celui de la fig. 2, est dirigé par des aubes fixées à la paroi D, vers l'ouïe de la deuxième roue. Ces aubes sont nécessaires pour éviter des tourbillonnements importants qui auraient pour conséquence la transformation en chaleur d'une partie de l'énergie récupérée dans le diffuseur.

On peut associer sur un même arbre jusqu'à 8 roues.

Les différents systèmes de pompes multicellulaires se distinguent les uns des autres :

1° par la manière dont l'équilibrage des pressions sur les roues est obtenu;

2° par la manière dont le démontage peut s'effectuer.

Au sujet de l'équilibrage, on peut dire qu'il ne reste plus en présence que deux systèmes : celui qui consiste à équilibrer chaque roue en disposant deux joints à la même hauteur, comme dans le cas de la fig. 2, et celui qui consiste à supprimer les ouvertures *e* et le joint opposé à l'ouïe, en équilibrant la somme des pressions s'exerçant sur chacune des roues, par l'action de la pression de l'eau sortant de la dernière roue, sur un piston A de surface convenablement calculée, disposé entre celle-ci et la boîte à bourrage (fig. 3).

Quel que soit le système adopté, il est nécessaire de ménager un dispositif spécial qui diffère avec chaque constructeur, et qu'on pourrait désigner sous le nom de piston compensateur, dont l'effet est de corriger automatiquement l'équilibrage jusqu'à le rendre à peu près parfait.

En ce qui concerne la manière dont le démontage peut s'effectuer, le système généralement adopté est celui indiqué fig. 3 (type de la firme Schwartzkopf), dans lequel les différents éléments sont successivement introduits dans une enveloppe d'une seule pièce. L'étanchéité des joints

existant entre celle-ci et les diffuseurs, est obtenue par l'introduction, à frottements doux, de bagues en bronze. Le démontage de ce système est assez compliqué.

Certains constructeurs adoptent une enveloppe en deux pièces avec joint horizontal, ce qui permet d'enlever l'arbre avec ses roues; mais cette construction est beaucoup plus difficile et plus coûteuse.

Enfin, dans le système *Jaeger*, la pompe est constituée par autant d'anneaux qu'il y a de roues, chacun de ces anneaux portant le diffuseur et les ailettes destinées à ramener le fluide de la sortie du diffuseur à l'ouïe de la roue suivante.

Cette description rapide des différents types de pompes centrifuges étant faite, nous allons établir les lois fondamentales sur lesquelles repose la théorie et le calcul des pompes centrifuges.

Mais avant, nous définirons nettement le problème à résoudre, qui peut s'énoncer comme suit : déterminer les dimensions d'une pompe pouvant refouler Q m³ par seconde, à la hauteur de H m, de manière à obtenir le maximum de rendement possible.

Pour trouver la solution de ce problème, nous ferons remarquer que l'on peut procéder en sens inverse et déterminer le débit et la hauteur de refoulement qui correspondent au rendement maximum pour une roue donnée, fonctionnant à un nombre de tours également donné. Que ce rendement maximum existe, c'est ce qu'il sera facile de comprendre en observant qu'il y a une hauteur de refoulement pour laquelle le débit donné par la roue tournant à une certaine vitesse est nul, et que, pour une hauteur nulle, le débit est évidemment maximum. Il résulte, en effet, de cette remarque que, pour ces deux limites, le rendement est nul et que, entre ces limites, il doit exister un maximum.

Cela étant, nous chercherons à tracer les diagrammes

du rendement en fonction du débit, pour différents types de roues avec aubes soit recourbées en arrière, soit radiales, soit recourbées en avant.

Pour tenir compte de toutes les pertes, nous étudierons séparément le rendement en ne faisant intervenir que l'influence des frottements du fluide dans la roue et dans le diffuseur; nous donnerons à l'expression trouvée le nom de *rendement indiqué*.

Évaluant les pertes par frottement de la roue contre le fluide et de l'arbre dans les paliers et les boîtes à bourrage, nous déterminerons le *rendement organique* de la pompe.

Multipliant l'un par l'autre, nous obtiendrons le *rendement effectif*.

Il nous restera alors à examiner le rôle et l'importance des fuites au point de vue du rendement total et à donner un exemple d'application de la méthode proposée, à l'étude d'un avant-projet de pompe centrifuge.

CHAPITRE II.

Théorie des pompes centrifuges.

§ 1. — Formules générales.

Rapportons à deux axes rectangulaires ox et oz le plan médian de la roue d'une pompe centrifuge, et soit $abcd$ un des canaux formés par deux aubes consécutives (fig. 4, Pl. 6).

La démonstration des formules fondamentales de la théorie des pompes centrifuges exige que l'on puisse supposer :

1° Qu'une tranche de fluide comprise entre deux surfaces concentriques ab , $a'b'$, se déplace dans le canal parallèlement à elle-même, de manière à rester limitée dans tout son parcours, par deux surfaces concentriques (hypothèse des tranches parallèles) ;

2° Que les vitesses des différents éléments d'une tranche $mnpq$ soient égales à celle du centre de gravité G de cette tranche ;

3° Que les différentes forces qui sollicitent les éléments d'une tranche, aient leur résultante passant par le centre de gravité de cette tranche.

Ces hypothèses permettent de ramener l'étude du mouvement d'une tranche ab , $a'b'$ à l'étude du mouvement de son centre de gravité G_0 où l'on suppose concentrés tous ses éléments; mais ces hypothèses ne sont réalisées que dans le cas limite où l'on suppose les aubes ac et bd infiniment rapprochées.

Dans toutes les considérations qui vont suivre, nous désignerons par :

- ω la vitesse relative du centre de gravité G , dirigée suivant l'axe du canal ;
- u la vitesse d'entraînement ou vitesse de rotation autour de l'axe O , du point G ;
- c la vitesse absolue correspondante ;
- ω la vitesse angulaire ;
- r le rayon OG ;
- N le nombre de tours par minute de la roue ;
- p la pression dans la section mq ;
- σ la section en G du canal, parallèle à la section d'entrée ;
- σ' la section normale en G ;
- m le périmètre de cette section normale ou bien, au § 4, le rapport entre le rayon initial r_0 et le rayon final r_1 ;
- dJ la résistance élémentaire opposée par les frottements, au déplacement de la tranche infiniment mince $mnpq$;
- dX la réaction opposée par l'aube db ;
- $d\pi$ le poids de la tranche ;
- ν le volume spécifique du fluide évoluant ;
- δ le poids du mètre cube correspondant ;
- Q le débit ;

- α l'angle que fait la direction de la vitesse absolue avec la vitesse de rotation u ;
 β l'angle que fait la direction de la vitesse relative avec la vitesse de rotation u , compté dans le même sens que α ;
 θ l'angle que fait la direction du rayon r , passant par le centre de gravité G avec la direction de la vitesse ω ;
 μ le coefficient de frottement du fluide contre les parois ;
 n le rapport entre les vitesses relatives à l'entrée et à la sortie ;
 k un coefficient de proportionnalité.

Nous affecterons les notations dont les valeurs varient avec la section :

- 1° De l'indice 0 pour la section d'entrée de la roue ;
 2° De l'indice 1 pour la section de sortie de la roue ;
 3° De l'indice 2 pour la section de sortie du diffuseur.

Formule I. — Cherchons d'abord une relation entre les forces appliquées à la tranche $mnpq$ et la vitesse absolue c .

Pour cela servons-nous de l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\Sigma \bar{f} = m \bar{\varphi}.$$

En projetant le système des forces sur la direction de la vitesse absolue c , nous aurons, en vertu de cette équation fondamentale :

$$\Sigma \text{proj. } f = m \frac{dc}{dt}$$

ou explicitement, en employant les notations adoptées ci-dessus :

$$[\sigma p - \sigma(p + dp)] \cos(cp) - d\pi \cos(cd\pi) - dJ \cos cdJ + \\ + dX \cos(c dX) = \frac{d\pi}{g} \frac{dc}{dt}.$$

Désignons par ds' la portion de la trajectoire du mouvement absolu, limitée par les deux arcs $m\eta$ et np ; divisons les deux membres de l'équation précédente par $d\pi$ et multiplions-les par ds' ; nous aurons :

$$-\sigma dp \frac{ds' \cos(cp)}{d\pi} - ds' \cos(cd\pi) - \frac{dJ}{d\pi} ds' \cos(cdJ) + \\ + \frac{dX}{d\pi} ds' \cos(cdX) = \frac{1}{g} ds' \frac{dc}{dt}. \quad (1)$$

Si nous supposons que l'axe oz est vertical, $d\pi$ sera parallèle à l'axe oz et nous pourrons écrire :

$$ds' \cos(cd\pi) = dz.$$

D'autre part, $dJ ds' \cos(cdJ)$ et $dX ds' \cos(cdX)$ représentent respectivement le travail élémentaire pour un déplacement ds' , de la résistance due aux frottements et de la réaction de l'aubage. En divisant par $d\pi$ ces deux expressions, nous obtiendrons respectivement la valeur du travail des frottements et celle du travail fourni par la roue, par kg de fluide, dans un déplacement infiniment petit ds' ; nous pourrons donc remplacer le troisième et le quatrième terme de l'équation (1) par dT_f et dT_r .

Pour ce qui concerne le premier terme, nous pourrons le transformer, en remarquant :

$$1^\circ \text{ Que } ds' \cos(cp) = dr,$$

dr représentant l'épaisseur de la tranche $mnpq$ dans la direction r ;

$$2^\circ \text{ Que } \sigma dr \delta = \frac{\sigma dr}{\nu} = d\pi ; \quad (2)$$

nous aurons alors :

$$-\nu dp - dz - dT_f + dT_r = \frac{1}{g} ds' \frac{dc}{dt}. \quad (3)$$

Si le régime uniforme est établi dans le canal, après un certain temps dt , toujours le même, la tranche $mnpq$

sera remplacée par la tranche qui la précède; le centre de gravité aura parcouru le chemin ds' à un infiniment petit du second ordre près; sa vitesse c sera donc égale à $\frac{ds'}{dt}$ et on pourra écrire la relation :

$$ds' \frac{dc}{dt} = \frac{ds'}{dt} dc = c dc = d\left(\frac{c^2}{2}\right),$$

qui, introduite dans l'équation (3) donnera, après intégration entre le point d'entrée que nous désignerons par 0 et le point de sortie que nous désignerons par 1,

$$\varphi(p_0 - p_1) - (z'_1 - z_0) - T_f + T_i = \frac{1}{2g} (c^2_1 - c^2_0). \quad (I)$$

Dans cette équation z'_1 représente la hauteur du centre de gravité G'_1 du canal fictif formé par les positions successives dans l'espace, de la tranche $mnpq$; T_f et T_i , le travail dû aux frottements et le travail fourni par la roue, pour chaque kg de fluide qui traverse celle-ci.

Formule II. — Cherchons, maintenant, une relation entre les forces appliquées à la tranche $mnpq$, la vitesse relative ω et la vitesse de rotation u . Servons-nous encore de la même relation fondamentale :

$$\Sigma \bar{f} = m \bar{\varphi},$$

dans laquelle nous remplaçons $\bar{\varphi}$ par sa valeur

$$\bar{\varphi}_r + \bar{\varphi}_e + \bar{\varphi}_c,$$

c'est-à-dire par la somme vectorielle de l'accélération dans le mouvement relatif, de l'accélération dans le mouvement d'entraînement et de l'accélération complémentaire φ_c .

Si nous projetons le système des forces sur la direction de la vitesse relative ω , nous aurons cette fois :

$$\Sigma \text{proj. } f = m \frac{d\omega}{dt} - m \frac{u^2}{r} \cos \theta.$$

En effet, la projection de φ_c sur la direction ω est évidemment égale à $\frac{d\omega}{dt}$; le mouvement d'entraînement étant supposé uniforme, l'accélération dans le mouvement d'entraînement φ_e se ramène à $\frac{u^2}{r}$, et si nous appelons θ l'angle que fait la direction du rayon r , passant par G , avec la direction de la vitesse ω , la projection de φ_e sur la direction ω sera égale à $\frac{u^2}{r} \cos \theta$; quant à la projection de φ_r , elle est nulle, puisque l'accélération complémentaire est toujours perpendiculaire à ω .

En écrivant explicitement le premier membre de l'équation ci-dessus, nous aurons, dJ étant dirigé suivant l'axe du canal, par conséquent suivant ω :

$$[\sigma p - \sigma(p + dp)] \cos(\omega p) - d\pi \cos(\omega d\pi) - dJ + dX \cos(\omega dX) = \frac{d\pi}{g} \frac{d\omega}{dt} - \frac{d\pi}{g} \frac{u^2}{r} \cos \theta.$$

Désignons par ds la portion de la trajectoire du mouvement relatif, limitée par les arcs mq et np ; divisons les deux membres de l'équation précédente par $d\pi$ et multiplions-les par ds . Nous aurons :

$$- \sigma dp \frac{ds \cos(\omega p)}{d\pi} - ds \cos(\omega d\pi) - \frac{dJ}{d\pi} ds + \frac{dX}{d\pi} ds \cos(\omega dX) = \frac{1}{g} ds \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{g} \frac{u^2}{r} ds \cos \theta. \quad (4)$$

L'axe oz étant supposé vertical,

$$ds \cos(\omega d\pi) = dz.$$

dX étant perpendiculaire à l'aubage et, par conséquent à la direction ω , le terme $\frac{dX}{d\pi} ds \cos(\omega dX)$ est nul. Le

terme $\frac{dJ}{d\pi} ds$ représente comme précédemment le travail

élémentaire de frottement par kg de fluide dépensé; nous pourrions donc le remplacer dans la suite par dT_f . En ce qui concerne le premier terme, nous pourrions observer comme précédemment que

$$ds \cos(\omega p) = dr,$$

et que
$$d\pi = \frac{\sigma dr}{\rho};$$

nous aurons alors :

$$-vdp - dz - dT_f = \frac{1}{g} \frac{d\omega}{dt} ds - \frac{1}{g} \frac{u^2}{r} ds \cos \theta. \quad (5)$$

En supposant le régime établi et en raisonnant comme dans le cas précédent :

$$ds \frac{d\omega}{dt} = \frac{ds}{dt} d\omega = \omega d\omega = d\left(\frac{\omega^2}{2}\right);$$

d'autre part, ω étant la vitesse angulaire et θ étant l'angle que fait le rayon r passant par G, avec la direction ω , nous aurons :

$$\frac{u^2}{r} = \omega^2 r, \quad ds \cos \theta = dr,$$

et par conséquent :

$$\frac{u^2}{r} ds \cos \theta = \omega^2 r dr = d\frac{\omega^2 r^2}{2} = d\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

En substituant ces valeurs de $ds \frac{d\omega}{dt}$ et de $\frac{u^2}{r} ds \cos \theta$ dans l'équation (5), et en intégrant entre le point d'entrée et le point de sortie, il viendra :

$$v(p_0 - p_1) - (z_1 - z_0) - T_f = \frac{1}{2g}(\omega_1^2 - \omega_0^2) - \frac{1}{2g}(u_1^2 - u_0^2) \quad (II)$$

Dans cette équation z_1 représente la hauteur du centre de gravité G_1 de la section de sortie du canal $abcd$, T_f le travail dû aux frottements par kg de fluide traversant la roue.

Formule III. — En soustrayant, membre à membre, les équations (I) et (II), nous pouvons obtenir une troisième relation où n'entre plus le travail de frottement T_f et les pressions p_0 et p_1 .

$$T_i = \frac{1}{2g}(c_1^2 - c_0^2) - \frac{1}{2g}(\omega_1^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2g}(u_1^2 - u_0^2) + (z_1' - z_1). \quad (III)$$

Cette relation peut être transformée en remarquant que, dans les triangles des vitesses à l'entrée en G_0 et à la sortie en G_1 (fig. 4) :

$$\omega_0^2 = c_0^2 + u_0^2 + 2u_0 c_0 \cos \alpha_0, \quad (6)$$

$$\omega_1^2 = c_1^2 + u_1^2 + 2u_1 c_1 \cos \alpha_1. \quad (7)$$

En soustrayant la seconde de la première, et en remplaçant dans l'équation (III), il vient, en effet :

$$T_i = -\frac{1}{g}(u_1 c_1 \cos \alpha_1 - u_0 c_0 \cos \alpha_0) + (z_1' - z_1). \quad (III)$$

Remarque. — Dans le cas des pompes centrifuges qui nous occupe actuellement, le liquide pénètre sur tout le pourtour de la roue; tous les canaux étant identiques, les équations précédentes peuvent se simplifier. En effet, si on considère deux canaux diamétralement opposés les termes

$$(z_1' - z_0), \quad (z_1 - z_0), \quad (z_1' - z_1),$$

seront égaux et de signes contraires, et les équations appliquées au mouvement du liquide non plus dans un des canaux, mais dans la roue, ne contiendront plus ces termes.

La méthode que nous donnons ici pour la démonstration des formules fondamentales, a l'avantage de ne nécessiter que le rappel de deux théorèmes de la mécanique

$$\Sigma \bar{f} = m \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_r + \bar{\varphi}_e + \bar{\varphi}_c.$$

Elle permet, en outre, de bien préciser les hypothèses que leur démonstration entraîne et que nous avons indiquées au début de ce chapitre.

§ 2. — Application de la formule I à l'écoulement dans un tuyau.

Si nous supposons la roue de la fig. 4 immobile, nous aurons $T_i = 0$. Le canal fictif $abc'd'$ coïncidera avec le canal réel $abcd$, et la formule I dans laquelle nous ferons $T_i = 0$, $z_1' = z_1$ s'appliquera à l'écoulement dans un canal fixe.

Représentons par h la hauteur d'élevation du liquide égale à $(z_1 - z_0)$, il viendra :

$$\rho(p_1 - p_0) + h + T_f + \frac{1}{2g}(c_1^2 - c_0^2) = 0. \quad (\text{IV})$$

Cette équation est connue sous le nom de *équation de Bernouilli*.

§ 3. — Calcul du terme T_f relatif aux frottements.

Cherchons à évaluer T_f ; d'après ce que nous avons vu, T_f est le travail dû aux frottements par kg de liquide passant dans le canal $abcd$; il a pour expression

$$T_f = \int_0^1 \frac{dJ}{d\pi} ds.$$

Représentons par m le périmètre de la section normale en G; le périmètre de la section mouillée sera $\frac{m}{\cos \theta}$, puisque la section $mnpq$ est perpendiculaire au rayon OG et que nous avons représenté par θ l'angle du rayon OG avec la direction ω (fig. 4).

Or, on admet que la résistance dJ provenant des frottements du fluide contre la paroi d'un canal rectiligne, est proportionnelle à la surface mouillée, au poids spécifique δ et au carré de la vitesse c .

Si nous n'envisageons que le cas d'un canal rectiligne ou d'un canal à faible courbure, nous pourrions donc écrire :

$$T_f = \int_0^1 \mu \frac{m dr}{\cos \theta} \frac{\delta}{d\pi} c^2 ds, \quad (8)$$

μ étant un coefficient qui dépend de la nature du liquide et de l'état de la surface du canal.

Observons que $d\pi = \sigma dr \delta$, σ représentant la section normale au rayon OG. Si nous désignons par σ' la section normale à l'axe du canal, nous aurons donc

$$d\pi = \frac{\sigma'}{\cos \theta} dr \delta,$$

et par conséquent, en remplaçant $d\pi$ dans l'équation (8), par cette valeur,

$$T_f = \mu \int_0^1 \frac{m}{\sigma'} c^2 ds. \quad (\text{V})$$

L'intégration peut s'effectuer dans le cas simple où il s'agit d'un canal rectiligne de *section constante*; la vitesse pour un fluide incompressible, est alors constante, et on peut écrire :

$$T_f = \mu \left(\frac{m}{\sigma'} \right) c^2 s. \quad (\text{VI})$$

Cette formule donne la *perte de charge* dans une conduite rectiligne de longueur s , de périmètre m et de section σ' , c étant la vitesse du fluide qui le traverse.

Dans le cas général où $\frac{m}{\sigma'}$ et c varient, on peut calculer pour des sections très rapprochées, les valeurs de $\left(\frac{m}{\sigma'} \right) c^2$ et, par intégration graphique de la courbe ayant pour abscisses les valeurs de s , et pour ordonnées les valeurs de $\left(\frac{m}{\sigma'} \right) c^2$, obtenir la valeur de T_f .

Remarque. — Cherchons un moyen approché de déterminer algébriquement la valeur de T_f lorsque la vitesse varie, afin de pouvoir éliminer ce terme dans les formules fondamentales I et II.

Nous pouvons admettre, parce qu'il y a lieu de chercher autant que possible à réaliser cette hypothèse, que la vitesse varie uniformément depuis l'entrée jusqu'à la sortie de la roue. La vitesse c en un point de l'axe du canal est, dans ce cas, égale à la vitesse à l'entrée c_0 , augmentée d'une quantité proportionnelle à la distance s du point considéré au point d'entrée, c'est-à-dire que

$$c = c_0 + ks.$$

Si l'on observe maintenant qu'il s'agit ici d'évaluer le frottement T_f pour des canaux courbes, que la vitesse c dans une section normale à l'axe de ces canaux, n'est pas la même en tous les points, que d'autre part les formules dans lesquelles on doit introduire la valeur T_f , ne s'appliquent rigoureusement qu'à des canaux irréalisables de section infiniment petite, on comprendra que l'on reste dans les limites de l'approximation, en posant :

$$\int_0^1 \frac{m}{\sigma'} c^2 ds = \left(\frac{m}{\sigma'}\right) \int_0^1 c^2 ds,$$

$\left(\frac{m}{\sigma'}\right)$ représentant la valeur moyenne des rapports du périmètre à la section, pour les sections d'entrée et de sortie du canal.

Grâce à cette hypothèse nous pourrions poser :

$$T_f = \mu \left(\frac{m}{\sigma'}\right) \int_0^1 (c_0 + ks)^2 ds = \mu \left(\frac{m}{\sigma'}\right) \left[c_0^2 + ks_1 c_0 + \frac{k^2 s_1^2}{3} \right] s_1$$

s_1 représentant la longueur du canal suivant l'axe.

Appelons c_1 la vitesse à la sortie ;

$$c_1 - c_0 = ks_1$$

et par conséquent :

$$T_f = \mu \left(\frac{m}{\sigma'}\right) \left[c_0^2 + c_0 (c_1 - c_0) + \frac{(c_1 - c_0)^2}{3} \right] s_1.$$

Représentons par n le rapport $\frac{c_0}{c_1}$ et posons :

$$\frac{2g}{3} \mu \left(\frac{m}{\sigma'}\right) s_1 = (1 - \varphi^2); \quad (\text{VII})$$

nous aurons :

$$T_f = (1 - \varphi^2) \left[\frac{1}{2g} c_0^2 \left(2 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2g} (c_1^2 - c_0^2) \right] \quad (\text{VIII})$$

Lorsque la roue de la pompe est supposée en mouvement, les vitesses de déplacement du fluide dans les canaux prennent alors le nom de vitesses relatives, et nous avons désigné la vitesse relative d'une manière générale par ω . D'autre part, lorsque le fluide pénètre dans la roue en mouvement, une partie de l'énergie cinétique est transformée en chaleur par chocs et tourbillonnements, et il en résulte une perte proportionnelle à $\frac{\omega_0^2}{2g}$. La valeur de T_f peut donc s'exprimer dans le cas d'une roue en mouvement par :

$$T_f = (1 - \varphi^2) \left[\frac{1}{2g} \omega_0^2 \left(2 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2g} (\omega_1^2 - \omega_0^2) \right] + \frac{k}{2g} \omega_0^2, \quad (9)$$

k représentant la perte en % résultant des chocs à l'entrée de la roue, n le rapport $\frac{\omega_0}{\omega_1}$.

Posons pour simplifier la transcription des équations :

$$(1 - \varphi^2) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + k = (1 - \psi^2); \quad (\text{IX})$$

nous aurons :

$$T_f = (1 - \psi^2) \frac{\omega_0^2}{2g} + (1 - \varphi^2) \frac{1}{2g} (\omega_1^2 - \omega_0^2). \quad (\text{X})$$

La valeur T_f mise sous cette forme montre que les pertes par frottements dans la roue d'une pompe centrifuge, sont fonction de deux coefficients qui sont liés entre eux dans une certaine mesure (équation IX), et qui affectent l'un, l'énergie disponible à l'entrée, l'autre l'énergie cinétique acquise dans la roue.

Ces coefficients φ et ψ ont ainsi la même signification que ceux employés dans la théorie des turbines à vapeur.

§ 4. — Rendement indiqué des pompes centrifuges.

Dans ce qui va suivre, nous supposons qu'il existe un distributeur à l'entrée de la roue de la pompe centrifuge et un diffuseur à la sortie; nous supposons encore que les angles β_1 et β_0 des aubes de la roue (fig. 4) restent invariables, tandis que les angles α_0 et α_1 du distributeur et du diffuseur, varient avec le débit Q de la pompe.

En désignant ce débit en mètres cubes par Q , on doit, en effet, avoir la relation :

$$\begin{aligned} 2\pi r_0 l_0 c_0 \sin \alpha_0 &= Q, \\ 2\pi r_1 l_1 c_1 \sin \alpha_1 &= Q, \end{aligned}$$

$c_0 \sin \alpha_0$ et $c_1 \sin \alpha_1$ représentent respectivement les composantes des vitesses c_0 et c_1 , normales à la section d'entrée et à la section de sortie de la roue.

Rappelons que nous avons désigné par

r_0 le rayon de la roue à l'entrée;

r_1 le rayon de la roue à la sortie;

l_0 la largeur de la roue à l'entrée;

l_1 la largeur de la roue à la sortie;

$m = \frac{r_0}{r_1}$, le rapport des rayons r_0 et r_1 ;

$n = \frac{\omega_0}{\omega_1}$ le rapport de la vitesse relative à l'entrée à la

vitesse relative à la sortie de la roue, rapport qui ne dépend que des sections à l'entrée et à la sortie, s'il ne se produit ni tourbillonnement, ni rentrée d'air.

Nous avons indiqué fig. 5 l'installation générale d'une pompe centrifuge aspirant sur le parcours oe et refoulant sur le parcours os . Nous avons appelé :

h_1 la hauteur comptée entre le plan d'eau inférieur et l'axe de la pompe;

h_2 la hauteur comprise entre l'axe de la pompe et l'extrémité du tuyau de refoulement;

c_s la vitesse de l'eau à la sortie du tuyau de refoulement;

c_2 la vitesse à la sortie du diffuseur;

p_2 la pression correspondante;

p la pression atmosphérique que nous supposons la même au niveau du plan d'eau inférieur et à l'extrémité du tuyau de refoulement;

T'_f la perte de charge dans le tuyau d'aspiration jusqu'à l'ouïe de la roue;

T''_f la perte de charge dans le tuyau de refoulement à partir du diffuseur;

H la hauteur totale $h_1 + h_2$.

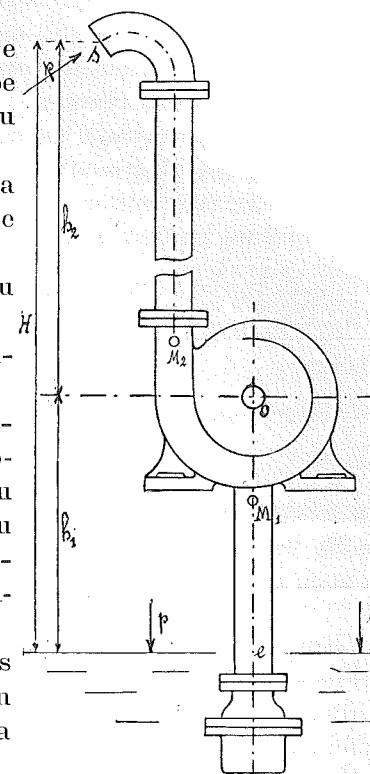


Fig. 5.

Nous appellerons *rendement indiqué de l'installation* le rapport.

$$\eta_i = \frac{H}{T_i}, \quad (\text{XI})$$

T_i étant défini par la relation (III) établie précédemment. Ce serait le rendement net dans l'hypothèse où le frottement de la roue contre le fluide et le frottement de l'arbre dans ses paliers et dans les boîtes à bourrage seraient nuls. En effet, H kgm représente le travail utile par kg d'eau élevée, et T_i le travail dépensé par kg.

Nous allons chercher à exprimer ce rapport en fonction des pressions et des vitesses.

Appliquons au tuyau d'aspiration la relation (IV); nous aurons avec les notations ci-dessus :

$$v(p_0 - p) + h_1 + T'_f + \frac{1}{2g} c_0^2 = 0,$$

la vitesse initiale étant nulle.

Pour le tuyau de refoulement, en appliquant la même formule

$$v(p - p_2) + h_2 + T''_f + \frac{1}{2g} (c_s^2 - c_2^2) = 0;$$

et en ajoutant membre à membre :

$$(h_1 + h_2) + (T'_f + T''_f) + \frac{1}{2g} (c_s^2 + c_0^2 - c_2^2) + v(p_0 - p_2) = 0. \quad (10)$$

Éliminons maintenant le terme $v(p_0 - p_2)$. Pour cela tirons la valeur de $v(p_0 - p_1)$ de la relation (II), dans laquelle nous aurons remplacé préalablement T_f pour la valeur (X); nous obtiendrons :

$$v(p_0 - p_1) = \frac{1}{2g} \left[\omega_1^2 (2 - \varphi^2) - \omega_0^2 (1 + \psi^2 - \varphi^2) - (u_1^2 - u_0^2) \right]$$

(Nous rappelons que le terme $(z_1 - z_0)$ peut être négligé dans l'étude des pompes centrifuges.)

Si l'on remarque que les vitesses u_0 et u_1 sont dans le rapport $\frac{r_0}{r_1}$, et que, pour tous les régimes de la pompe, il existe un rapport constant entre ω_0 et ω_1 que nous

avons représenté par n , et qui est égal à l'inverse du rapport des sections à l'entrée et à la sortie, la valeur ci-dessus pourra s'écrire :

$$v(p_0 - p_1) = -\frac{1}{2g} \left\{ u_1^2 (1 - m^2) + \omega_1^2 \left[n^2 (1 + \psi^2 - \varphi^2) - 2 + \varphi^2 \right] \right\}. \quad (12)$$

Déterminons maintenant $v(p_1 - p_2)$ et pour cela, appliquons aux canaux du diffuseur l'équation (IV).

La hauteur h dans cette formule peut être négligée, puisque dans le diffuseur, nous pouvons toujours considérer deux canaux diamétralement opposés pour lesquels les valeurs de h sont égales et de signes contraires. La valeur T_f peut être calculée au moyen des équations (IX) et (X) où ω_0 serait remplacé par c_1 vitesse à l'entrée du diffuseur et ω_1 par c_2 vitesse à la sortie, n désignant alors le rapport $\frac{c_1}{c_2}$. Mais il est à remarquer que le diffuseur n'existe pas toujours, et qu'il est remplacé quelquefois par un canal en volute; pour donner plus de généralité aux formules qui vont suivre, nous nous contenterons de poser :

$$T_f = (1 - \psi'^2) \frac{c_1^2}{2g} \quad (13)$$

et d'introduire un nouveau coefficient ψ' auquel nous donnerons par la suite, toutes les valeurs depuis 0 jusqu'au maximum, de manière à connaître l'influence de ce facteur sur le rendement. Le maximum de ψ' correspondra évidemment à l'hypothèse où il existe un diffuseur, par conséquent où T_f peut être calculé par la relation (X); ψ' aura donc pour limite la valeur tirée de l'équation :

$$T_f = (1 - \psi'^2) \frac{c_1^2}{2g} + (1 - \varphi^2) \frac{1}{2g} (c_2^2 - c_1^2) = (1 - \psi'^2) \frac{c_1^2}{2g}$$

$$\text{ou } \boxed{(1 - \psi^2) - (1 - \varphi^2) \left[1 - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right] = (1 - \psi'^2)} \quad (\text{XII})$$

n représentant ici le rapport $\left(\frac{c_1}{c_2} \right)$.

En introduisant dans l'équation (IV), appliquée aux canaux du diffuseur, la valeur T_f indiquée par la relation (13), nous aurons :

$$v(p_1 - p_2) = - \left(\psi'^2 \frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g} \right).$$

Exprimons c_1^2 en fonction des vitesses u_1 et ω_1 , en nous servant de la relation tirée du triangle des vitesses à la sortie (fig. 4) :

$$c_1^2 = u_1^2 + \omega_1^2 - 2u_1\omega_1 \cos \beta_1;$$

nous aurons :

$$v(p_1 - p_2) = - \frac{\psi'^2}{2g} (u_1^2 + \omega_1^2 - 2u_1\omega_1 \cos \beta_1) + \frac{1}{2g} c_2^2 \quad (14)$$

Pour simplifier la transcription des formules, posons :

$$1 - m^2 = a,$$

$$n^2 (1 + \psi^2 - \varphi^2) - 2 + \varphi^2 = b$$

et représentons par x le rapport $\frac{\omega_1}{u_1}$ de la vitesse relative de sortie de la roue à la vitesse périphérique u_1 .

Ajoutons les équations (12) et (14), et changeons de signes les deux membres ; nous aurons :

$$v(p_2 - p_0) = \frac{u_1^2}{2g} \left[(a + \psi'^2) - 2\psi'^2 \cos \beta_1 x + (b + \psi'^2) x^2 \right] - \frac{1}{2g} c_2^2. \quad (15)$$

Avant d'introduire cette valeur dans la relation (10),

éliminons préalablement de celle-ci le terme c_0^2 , au moyen de la relation relative au triangle des vitesses à l'entrée, $c_0^2 = u_0^2 + \omega_0^2 - 2u_0\omega_0 \cos \beta_0 = u_1^2 (m^2 - 2mn \cos \beta_0 x + n^2 x^2)$

Après simplification, il viendra :

$$(h_1 + h_2) + (T_f + T'_f) + \frac{1}{2g} c_s^2 = \frac{u_1^2}{2g} \left[(a - m^2 + \psi'^2) - 2(\psi'^2 \cos \beta_1 - mn \cos \beta_0) x + (b + \psi'^2 - n^2) x^2 \right]. \quad (16)$$

Le premier membre représente la hauteur totale, y compris les pertes de charge et la hauteur correspondant à la vitesse de sortie ; désignons-le par H' .

Nous aurons :

$$\boxed{\frac{2gH'}{u_1^2} = (a - m^2 + \psi'^2) - 2(\psi'^2 \cos \beta_1 - mn \cos \beta_0) x + (b + \psi'^2 - n^2) x^2.} \quad (\text{XIII})$$

Le rapport $\eta_i = \frac{H'}{T_i}$ représentera le rendement indiqué de la pompe ; en effet, H' kgm, c'est par kg de fluide débité, le travail réellement fourni par la pompe, et T_i , c'est le travail dépensé également par kg.

Pour évaluer η_i , il nous suffira de déterminer T_i en fonction de u_1 et ω_1 au moyen de la relation (III) et des relations tirées des triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie :

$$\begin{aligned} c_0 \cos \alpha_0 &= -u_0 + \omega_0 \cos \beta_0 = -m u_1 + n \omega_1 \cos \beta_0, \\ c_1 \cos \alpha_1 &= -u_1 + \omega_1 \cos \beta_1. \end{aligned}$$

Il viendra, en effet, en multipliant ces deux relations respectivement par u_0 et u_1 et en soustrayant la première de la seconde :

$$T_i = - \frac{1}{g} (u_1 c_1 \cos \alpha_1 - u_0 c_0 \cos \alpha_0) = \frac{u_1^2}{g} \left[a - (\cos \beta_1 - mn \cos \beta_0) x \right] \quad (17)$$

a étant mis pour $(1 - m^2)$ d'après la relation adoptée ci-dessus.

En divisant maintenant les équations (16) et (17), membre à membre, nous aurons :

$$\eta'_i = \frac{1}{2} \frac{(a + \psi'^2 - m^2) - 2(\psi'^2 \cos \beta_1 - mn \cos \beta_0)x + (b + \psi'^2 - n^2)x^2}{a - (\cos \beta_1 - mn \cos \beta_0)x} \quad (\text{XIV})$$

§ 5. — Conclusions.

Des longs calculs qui précèdent, il résulte que la valeur de H' , qui mesure sensiblement la *hauteur manométrique* de refoulement, c'est-à-dire la hauteur correspondant à la différence des lectures données par deux monomètres M_1 et M_2 , qui seraient placés l'un à l'ouïe de la roue et l'autre à la sortie du diffuseur (fig. 5), il résulte, disons-nous, que la hauteur H' peut être calculée en fonction de la vitesse périphérique u_1 , du rapport x de la vitesse relative de sortie à la vitesse périphérique u_1 , et enfin en fonction des constantes dont les valeurs dépendent des dimensions de la roue et du diffuseur, ainsi que du coefficient de frottement μ .

En représentant par A, B, C les valeurs de ces constantes :

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = A + Bx + Cx^2$$

La valeur $\frac{2gH'}{u_1^2}$, qui ne dépend que de x et des constantes A, B, C, est le double du *coefficient manométrique* défini et déterminé expérimentalement par M. Rateau, dans ses essais sur les pompes centrifuges.

De la formule (XIV), il résulte que le *rendement indiqué de la pompe* est une fonction de x et ne dépend pas de la vitesse périphérique.

Remarquons que le débit Q est proportionnel à la vitesse relative ω_1 , et que l'on a la relation :

$$2\pi r_1 l_1 \omega_1 \sin \beta_1 = Q, \quad (18)$$

si l'on néglige la diminution de la section de sortie résultant de la présence des ailettes.

Pour une vitesse constante u_1 , $x = \frac{\omega_1}{u_1}$ est donc proportionnel au débit Q .

Les courbes tracées en portant les valeurs de x en abscisses, et les valeurs de $\frac{2gH'}{u_1^2}$ et de η'_i en ordonnées, donneront donc, pour une vitesse de rotation constante, le *coefficient manométrique et le rendement indiqué en fonction du débit*.

Les valeurs des ordonnées de ces courbes ne dépendront que des dimensions de la roue et du diffuseur, et de l'état des surfaces qui fixe la valeur du coefficient μ .

Dans les essais que l'on effectue sur les pompes centrifuges, on relève ordinairement la courbe du *coefficient manométrique* et la courbe de *rendement total* en fonction du débit, à une vitesse aussi constante que possible. L'allure de ces courbes varie avec le type de pompe et dépend surtout de la valeur de l'angle de sortie β_1 . Ces courbes sont appelées les *courbes caractéristiques* de la pompe.

Nous rechercherons au paragraphe 12 comment on peut déterminer par le calcul, la courbe de *rendement total* connaissant la courbe de *rendement indiqué*. Pour le moment, nous allons fixer les valeurs des différentes constantes qui entrent dans les formules, de manière que les résultats obtenus par l'emploi des formules trouvées, constituent des moyennes sur lesquelles on puisse tabler.

§ 6. — Choix des coefficients.

Valeur de m. — La valeur de m qui représente le rapport $\frac{r_0}{r_1}$ du rayon intérieur au rayon extérieur de la roue, varie dans la plupart des types de pompes existantes entre $1/2$ et $1/3$; nous adopterons :

$$m = 0,4.$$

Valeur de $\left(\frac{l_0}{l_1}\right)$. Ce rapport de la largeur de la roue à l'entrée, à la largeur de la roue à la sortie (fig. 4^{bis}, Pl. 6), varie entre 1,0 et 2,5. Cette limite 2,5 est imposée par des considérations relatives au tracé du profil de la roue qui ne doit pas être trop rapidement convergent, si l'on veut éviter une contraction de la veine fluide à la sortie. Nous choisirons :

$$\frac{l_0}{l_1} = 1,75.$$

Valeur de l_1 . La largeur de la roue à la sortie peut être prise égale à une fraction du rayon; cette largeur est rarement plus petite que $0,1r_1$. Nous adopterons cette valeur et nous examinerons plus loin quelle influence peut avoir sur le rendement, le rapport $\frac{l_1}{r_1}$.

Valeur de β_0 . Dans la plupart des pompes, il n'y a pas de distributeur à cause de la complication de construction que sa présence entraîne, et de la nécessité qu'il crée d'accroître le diamètre de l'ouïe.

Les aubes se prolongent quelquefois jusque dans le plan de l'ouïe de la roue, mais on est alors obligé de les gauchir de façon que l'entrée du fluide se fasse sans choc. En supposant que le fluide pénètre dans la roue perpendiculairement au plan de l'ouïe avec une vitesse absolue c_0 ,

on devra, en effet, donner à l'angle β_0 la valeur déterminée par les triangles des vitesses c_0 , u_0 , et ω_0 , et cette valeur sera variable puisque u_0 grandit depuis le point pris près du moyeu jusqu'au point pris sur le diamètre extérieur de l'ouïe. Dans les calculs, on sera donc forcé de prendre une valeur moyenne pour β_0 de même que pour r_0 .

Lorsque les aubes ne commencent qu'à la hauteur du rayon extérieur de l'ouïe, comme dans le cas de la fig. 2, on peut déterminer β_0 en faisant l'hypothèse que la vitesse c_0 est radiale. Le triangle des vitesses de la fig. 4 donne, en effet, dans le cas où $\alpha_0 = 90^\circ$,

$$u_0 = \omega_0 \cos \beta_0 \quad \text{ou} \quad \cos \beta_0 = \frac{u_0}{\omega_0} \quad (19)$$

Cherchons à exprimer β_0 en fonction des valeurs :

$$\frac{l_1}{l_0}, m, \quad x \text{ et } \beta_1.$$

La relation de continuité qui exprime que le volume qui passe par seconde à l'entrée est égal au volume qui passe par seconde à la sortie de la roue, peut s'écrire dans le cas d'une roue à une ouïe :

$$Q = 2 \pi r_0 l_0 \sin \beta_0 \omega_0 = 2 \pi r_1 l_1 \sin \beta_1 \omega_1. \quad (20)$$

De cette relation on peut tirer la valeur de $\sin \beta_0$:

$$\sin \beta_0 = \frac{r_1}{r_0} \frac{l_1}{l_0} \frac{\omega_1}{\omega_0} \sin \beta_1, \quad (21)$$

et en divisant cette valeur par $\cos \beta_0$ (relation 19) il viendra :

$$\text{tg } \beta_0 = \frac{r_1}{r_0} \frac{l_1}{l_0} \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\omega_0}{u_0} \sin \beta_1.$$

Dans le cas d'une roue à deux ouïes, l_0 doit être remplacé par $2 l_0$ puisque la section totale à l'entrée est doublée.

Comme nous avons représenté $\frac{\omega_1}{u_1}$ par x , $\frac{r_0}{r_1}$ par m , nous pourrions écrire : $u_0 = m u_1$, et

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{x}{m^2} \frac{l_1}{l_0} \sin \beta_1, \quad (22)$$

ou en substituant à m et à $\frac{l_1}{l_0}$ les valeurs précédemment adoptées 0,4 et 0,57 :

$$\operatorname{tg} \beta_0 = 3,57 x \sin \beta_1.$$

Dans le cas d'une roue à deux ouïes, on aurait d'après ce que nous avons dit ci-dessus :

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{3,57}{2} x \sin \beta_1.$$

On voit que β_0 dépend de β_1 et de x .

Pour les petites valeurs de x , l'angle calculé devient trop faible pour pouvoir être adopté. Il est vrai qu'avec la disposition des aubes de la fig. 2, qui ne commencent qu'à la hauteur du rayon extérieur de l'ouïe, il y a un entraînement des filets fluides dans le sens de rotation de la roue : l'angle α_0 est donc plus grand que 90° et la valeur β_0 peut donc être prise plus grande que celle donnée par la formule (22).

Quoi qu'il en soit, nous calculerons ci-dessous β_0 pour chacune des valeurs de β_1 que nous adopterons, en prenant pour x des valeurs comprises entre 0,3 et 0,6.

Valeur de β_1 . Tandis que certains auteurs proposent de prendre β_1 très petit, d'autres soutiennent qu'il faut le prendre très grand, c'est-à-dire qu'il faut recourber les aubes en avant.

Pour examiner l'influence de cet élément sur le rendement et sur la hauteur de refoulement, nous choisirons successivement :

$$(1) \begin{cases} \beta_1 = 12^\circ \\ \beta_0 = 25^\circ \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \beta_1 = 30^\circ \\ \beta_0 = 35^\circ \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \beta_1 = 90^\circ \\ \beta_0 = 45^\circ \end{cases}$$

Les valeurs de β_0 correspondent respectivement, en supposant $\alpha_0 = 90^\circ$, à des valeurs approximatives de x égales respectivement à 0,6, 0,4 et 0,3.

Si nous avons choisi $x = 0,3$ pour calculer la valeur de β_0 correspondant à $\beta_1 = 12^\circ$, nous aurions trouvé 15° ; cet angle paraît un peu petit pour un tracé convenable des aubes dont l'épaisseur encombrerait alors la section d'entrée d'une manière exagérée.

Remarque. — La relation (22) montre que la valeur de β_0 est d'autant plus petite que le rapport $\frac{l_1}{l_0}$ et le rap-

port $\frac{\omega_1}{u_1} = x$ sont plus petits. Or, pour les pompes à grande hauteur de refoulement, la vitesse périphérique u_1 est toujours très grande et, pour un débit moyen, la valeur de ω_1 est par conséquent toujours faible par rapport à u_1 ; x étant petit, il faut donc pour avoir une valeur accep-

table de β_0 , prendre $\frac{l_1}{l_0}$ assez grand et *écarter le type des roues à deux ouïes*. Dans ce type, en effet, la valeur de $\operatorname{tg} \beta_0$ est, toutes choses égales, moitié moindre.

Nous verrons au paragraphe que ce n'est pas la seule raison pour laquelle il convient d'adopter, dans les pompes à grand rendement, le type de roue à une ouïe.

Valeur de μ et de k . — Pour pouvoir calculer les coefficients φ , ψ et ψ' qui entrent dans les formules du rendement et de la hauteur manométrique, il faut connaître notamment les valeurs de μ et de k .

μ représente le coefficient de frottement du fluide contre les parois du canal de la pompe. Ce coefficient est donné, d'après *Darcy*, pour les conduites cylindriques de diamètre d exprimé en cm, par la formule :

$$\mu = 0,00025 + \frac{0,00065}{d}.$$

Comme il s'agit ici de canaux courbes à section rectangulaire de dimensions relativement faibles, il ne nous paraît pas exagéré de prendre pour μ , dans les calculs qui vont suivre :

$$\mu = 0,0006.$$

En ce qui concerne la valeur de k , qui représente la perte par choc à l'entrée, nous manquons de base pour l'apprécier ; nous le prendrons égal à 0,05, soit comme hypothèse une perte de 5 % de l'énergie disponible à l'entrée.

§ 7. — Tracé du profil des aubes. Calcul de φ et de ψ .

La question du tracé des aubes a fait l'objet d'un mémoire remarquable de M. *Van der Stegen*, mémoire publié dans les *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand* (année 1892-93).

Les valeurs de β_0 , β_1 , l_0 et l_1 étant connues, M. Van der Stegen a donné une méthode graphique pour déterminer les formes des aubes de telle manière que la vitesse relative soit la même pour tous les éléments situés à la même distance de l'axe.

Cette condition revient, en somme, à la condition du parallélisme des tranches qui, dans ce cas, sont cylindriques et concentriques.

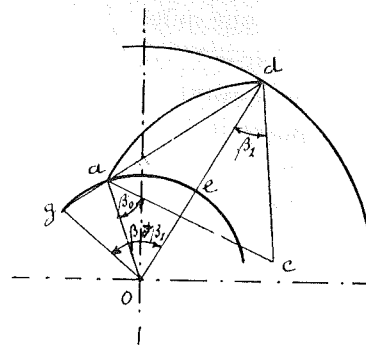


Fig. 6.

Nous indiquons fig. 6 comment on peut faire ce tracé ;

Par cette méthode, on peut donc réaliser une des hypothèses fondamentales de la théorie.

Ce tracé est assez compliqué et la courbe diffère peu d'un arc de cercle décrit, de manière que les angles d'entrée et de sortie β_0 et β_1 soient égaux respectivement aux valeurs imposées.

on détermine un angle au centre $dog = \beta_1 + \beta_2$ et on trace gd ; en faisant les angles $oac = \beta_0$ et $odc = \beta_1$, on trouve le centre c de l'arc ad qui coupe les circonférences de rayon r_0 et r_1 sous des angles β_0 et β_1 .

Nous n'insistons sur ce tracé que parce que c'est celui que nous avons adopté dans les fig. 1 et 2, en vue de la détermination des valeurs du périmètre moyen m , de la section moyenne σ' et de la longueur s_1 du canal formé par deux aubes consécutives, ces valeurs étant nécessaires pour la détermination de φ et de ψ .

Pour le tracé du profil de la roue, M. Van der Stegen s'impose la condition que la composante radiale de la vitesse relative ($\omega \sin \beta$) croisse ou décroisse uniformément depuis l'entrée jusqu'à la sortie de la roue.

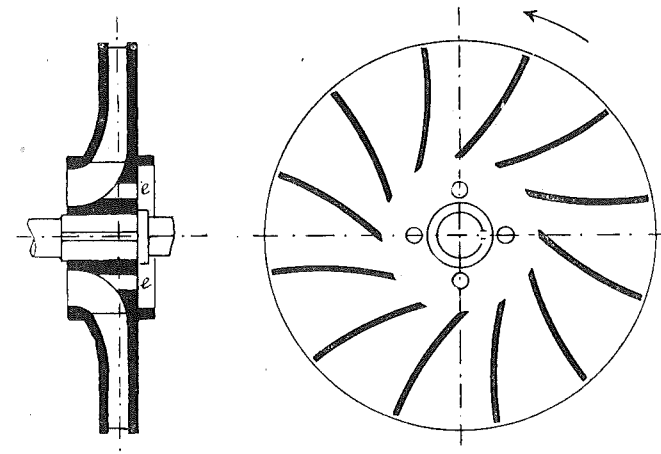


Fig. 7.

Le nombre d'aubes ne peut résulter d'aucun calcul ni d'aucune théorie ; le tracé seul peut fournir une indication à cet égard. Avec un faible nombre d'aubes, on remarque que les sections normales à l'axe d'un des canaux constitués par deux aubes consécutives, varient trop rapidement, en grandeur et en direction. Pour cette raison,

six ou sept aubes paraissent suffire pour des angles d'environ 12° , tandis que pour des angles voisins de 90° , il en faut onze ou douze.

Les aubes des fig. 1 et 2 (Pl. 6) et de la fig. 7 ont été tracées par arcs de cercle dans les hypothèses :

$$(1) \begin{cases} \beta_1 = 12^\circ \\ \beta_0 = 25^\circ \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \beta_1 = 30^\circ \\ \beta_0 = 35^\circ \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \beta_1 = 90^\circ \\ \beta_0 = 45^\circ \end{cases}$$

En supposant que la roue ait 0^m20 de diamètre, nous avons pu calculer les valeurs m , σ' , s_1 et n qui représente le rapport $\frac{\omega_0}{\omega_1}$; ce rapport peut en effet se déduire de l'équation (20) :

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = n = \frac{1}{m} \frac{l_1}{l_0} \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_0}. \quad (23)$$

En introduisant les valeurs numériques trouvées dans les formules (VII) et (IX), nous avons obtenu respectivement pour les trois hypothèses ci-dessus, correspondant aux trois figures 1 et 2 (Pl. 6) et fig. 6.

$$(1) \begin{cases} \varphi = 0,92 \\ \psi = 0,67 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \varphi = 0,95 \\ \psi = 0,82 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \varphi = 0,96 \\ \psi = 0,89 \end{cases}$$

Nous avons admis pour les trois roues le profil de la fig. 2.

En répétant les calculs dans l'hypothèse où les tracés des roues seraient faits au $1/10$, c'est-à-dire où les roues auraient un diamètre de 0^m40 , on trouve pour φ et ψ des valeurs sensiblement les mêmes; ce qui signifie que les coefficients des formules (XIII) et (XIV) sont sensiblement constants pour les roues géométriquement semblables.

§ 8. — Tracé du diffuseur. Calcul de ψ' .

La forme du diffuseur a une grande importance au point du vue du rendement. Pour que le diffuseur joue un rôle, il faut que les sections normales à l'axe des

canaux formés par deux aubes voisines, n'aillent pas croissant trop rapidement ni en direction, ni en grandeur. S'il en est autrement, en effet, le fluide ne suit plus les parois et il se produit des tourbillonnements qui transforment en chaleur, l'énergie cinétique que le diffuseur a pour mission de convertir en énergie potentielle de pression.

La recherche de la forme théorique offre évidemment de très grandes difficultés, et il ne saurait guère être question de s'en rapporter, pour le tracé, qu'au sentiment et à l'expérience.

Sur le tracé en grandeur du diffuseur représenté fig. 2 à l'échelle de $1/5$, nous avons mesuré les valeurs de la section normale moyenne σ' , du périmètre moyen m et de la longueur s_1 . Au moyen de ces valeurs et des relations (VII) et (IX), nous avons déterminé φ et ψ . (n qui représente le rapport $\frac{c_1}{c_2}$ est égal ici à l'inverse du rapport des sections d'entrée et de sortie du diffuseur.)

Connaissant φ et ψ , il nous a suffi d'introduire leurs valeurs dans la relation (XII)

$$(1 - \psi'^2) = (1 - \psi^2) - (1 - \varphi^2) \left[1 - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right]$$

pour obtenir ψ' . Les calculs donnent

$$\varphi = 0,93 \quad \text{et} \quad \psi' = 0,90.$$

En répétant ces calculs pour un diffuseur géométriquement semblable, plus grand ou plus petit, on trouve sensiblement la même valeur 0,9.

Nous examinerons successivement le cas où l'énergie cinétique à la sortie serait complètement perdue, c'est-à-dire où ψ' serait égal à 0, et le cas où ψ' aurait pour valeur 0,9, ce qui correspond au cas d'un diffuseur bien construit.

§ 9. — Courbes du rendement indiqué et du coefficient manométrique.

Tous les coefficients des formules (XIII) et (XIV) peuvent maintenant être déterminés dans les trois hypothèses que nous désignerons par les indices 1, 2, 3 où

$$(1) \begin{cases} \beta_1 = 12^\circ \\ \beta_0 = 25^\circ \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \beta_1 = 30^\circ \\ \beta_0 = 35^\circ \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \beta_1 = 90^\circ \\ \beta_0 = 45^\circ \end{cases}$$

Pour le premier cas :

$$n = 0,706 \quad [\text{formule (23)}].$$

$$a = 1 - m^2 = 0,84.$$

$$b = n^2 (1 + \psi^2 - \varphi^2) = -0,857.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 0,68 + 0,51x - 1,35x^2 \text{ pour } \psi' = 0.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 1,49 - 1,076x - 0,544x^2 \text{ pour } \psi' = 0,9.$$

$$\frac{gT_i}{u_1^2} = 0,84 - 0,723x. \quad (\text{formule 17})$$

Pour le deuxième cas :

$$n = 1,25.$$

$$a = 0,84.$$

$$b = 0,1.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 0,68 + 0,816x - 1,46x^2 \text{ pour } \psi' = 0.$$

$$\frac{2gH'}{u_1^2} = 1,49 - 0,588x - 0,650x^2 \text{ pour } \psi' = 0,9.$$

$$\frac{gT_i}{u_1^2} = 0,84 - 0,458x.$$

Fig. 8.

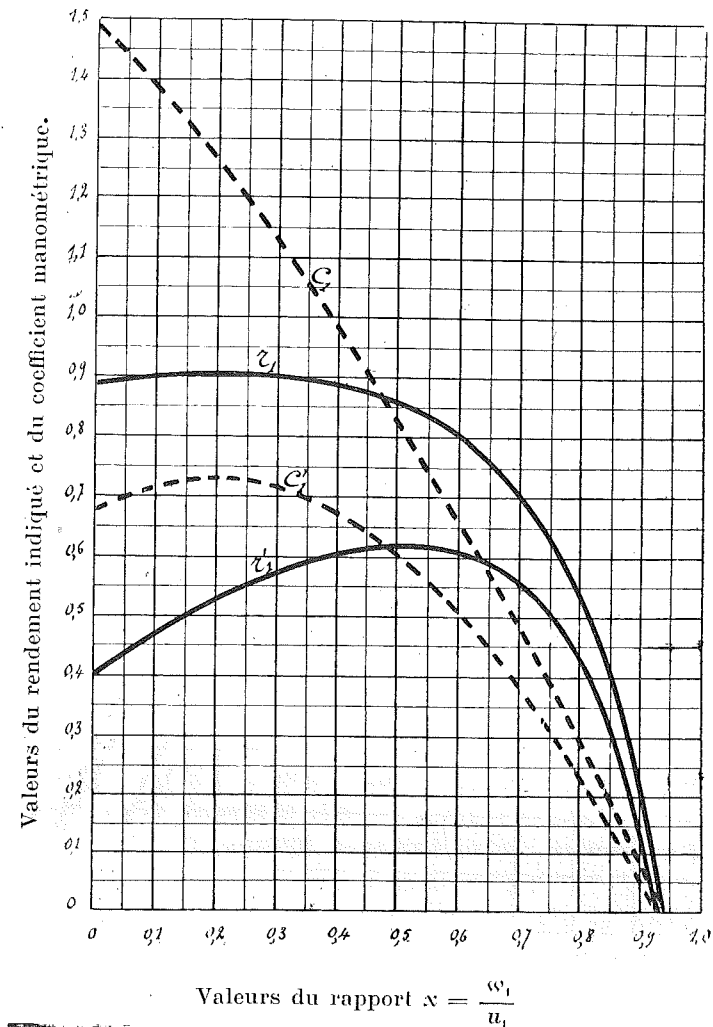
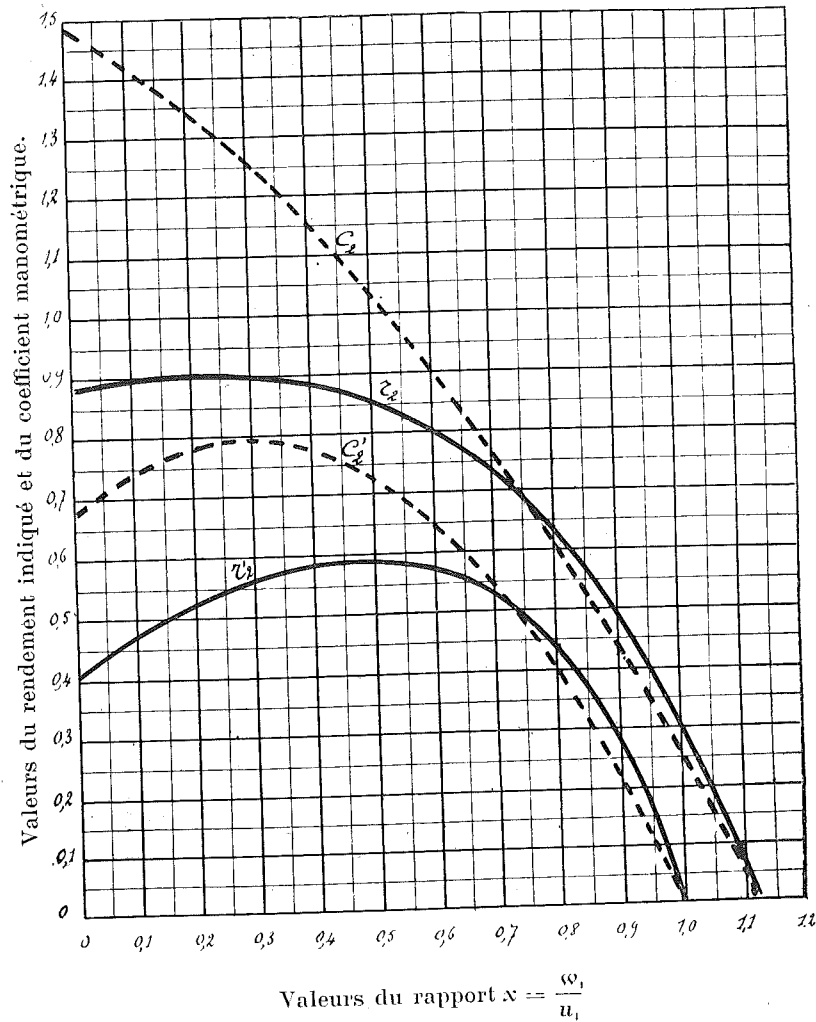


Fig. 9.



Pour le troisième cas :

$$n = 2.$$

$$a = 0,8.$$

$$b = 2,35.$$

$$\frac{2 g H'}{u_1^2} = 0,68 + 1,13 x - 1,645 x^2 \quad \text{pour } \psi' = 0.$$

$$\frac{2 g H'}{u_1^2} = 1,49 + 1,13 x - 0,835 x^2 \quad \text{pour } \psi' = 0,9.$$

$$\frac{g T_i}{u_1^2} = 0,84 + 0,565 x.$$

Les valeurs de η'_i pourront être déduites du rapport :

$$\eta'_i = \frac{1}{2} \frac{\frac{2 g H'}{u_1^2}}{\frac{g T_i}{u_1^2}}.$$

Nous avons tracé fig. 8, 9 et 10, les courbes donnant les résultats du calcul pour les trois cas, en fonction de x .

Les courbes pointillées correspondent au coefficient manométrique et les courbes en trait plein, au rendement indiqué.

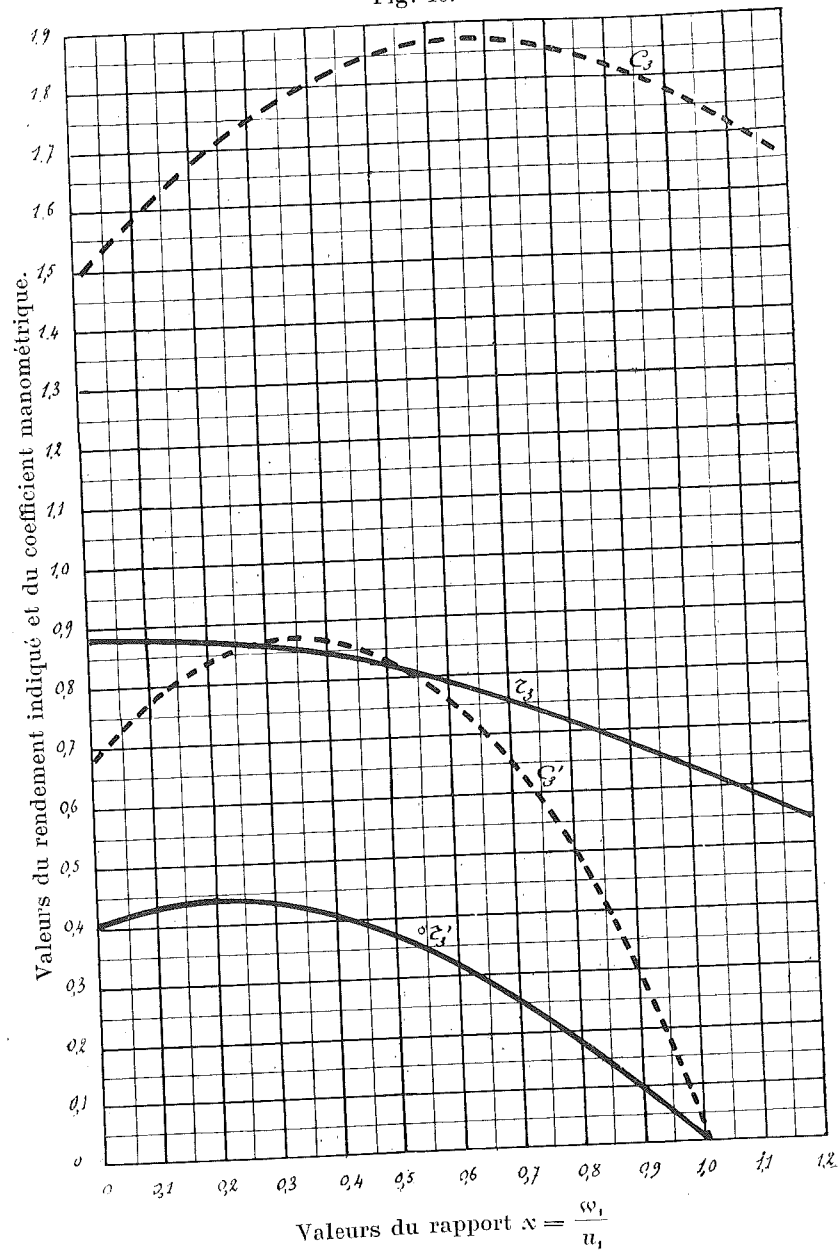
Au point de vue du coefficient manométrique, les courbes c_1 c_2 c_3 , tracées dans l'hypothèse où il existe un diffuseur, font ressortir :

1° que le coefficient manométrique augmente avec l'angle β_1 pour une même valeur de x ;

2° que pour des angles plus grands que 45° environ, le coefficient manométrique augmente d'abord pour diminuer ensuite ;

3° que pour des angles plus petits que 45° environ, le coefficient manométrique est maximum pour $x = 0$, c'est-à-dire pour un débit nul.

Fig. 10.



Comparées aux courbes c'_1 c'_2 c'_3 , tracées dans l'hypothèse où il n'existe pas de diffuseur, les courbes c_1 c_2 c_3 , montrent encore que le diffuseur a pour effet de doubler sensiblement le coefficient manométrique quand les valeurs de x sont comprises entre 0,3 et 0,4.

Au point de vue du rendement indiqué, les courbes r_1 , r_2 et r_3 montrent :

- 1° que le rendement indiqué est sensiblement le même pour les petites valeurs de x , quel que soit l'angle choisi ;
- 2° qu'il est cependant plus faible pour les valeurs de $\beta_1 > 30^\circ$.

Au sujet de cette dernière conclusion, on peut même dire que le rendement indiqué diminue un peu plus rapidement que ne le font ressortir les diagrammes, quand l'angle β_1 croît. En effet, nous avons dans les calculs, choisi une valeur constante de ψ' , ce qui suppose un diffuseur identique pour toutes les valeurs de β_1 . Or, la forme et la longueur du diffuseur doivent varier avec la vitesse de sortie c_1 , qui croît pour une même valeur de x quand β_1 augmente ; plus c_1 est grand, plus le diffuseur doit être long et moins divergent, par conséquent plus ψ' doit être faible.

Si nous comparons les courbes r'_1 r'_2 r'_3 aux courbes r_1 r_2 r_3 tracées dans l'hypothèse où il existe un diffuseur, nous voyons :

1° que le rendement indiqué est augmenté dans le rapport de $\frac{3}{2}$, par la présence d'un diffuseur, lorsque les valeurs de x sont comprises entre 0,3 et 0,4 ;

2° que contrairement à ce que nous avons conclu plus haut, le rendement d'une pompe sans diffuseur est presque diminué de moitié lorsqu'on passe d'un angle $\beta_1 = 12^\circ$, à un angle $\beta_1 = 90^\circ$.

Cette conclusion explique comment on a pu voir des auteurs soutenir qu'il fallait prendre des angles très petits, tandis que d'autres proposaient des aubes radiales.

Les premiers avaient raison pour des pompes ne possédant pas de diffuseur, ou un mauvais diffuseur, les seconds n'envisageaient probablement que des pompes avec diffuseur à aubes bien construit.

Il est possible de vérifier très simplement par l'expérience les résultats obtenus. Nous avons vu que H' représentait la différence en mètres d'eau, entre la pression à l'entrée de la roue et la pression à la sortie du diffuseur. Pour mesurer H' , il suffira donc de relier un manomètre successivement à des ouvertures pratiquées à l'ouïe et à la sortie du diffuseur. Connaissant les dimensions de la pompe et le débit, on pourra calculer x par les deux relations :

$$2 \pi r_1 l_1 \sin \beta_1 \omega_1 = Q,$$

$$x = \frac{\omega_1}{u_1};$$

par conséquent on pourra trouver un point de la courbe du coefficient manométrique en fonction de x .

Pour obtenir le point correspondant de la courbe *sans diffuseur*, il suffira de relever la pression à la sortie de la roue et de prendre pour H' la différence entre la valeur observée et celle obtenue avec le manomètre relié à l'ouïe.

Afin de pouvoir trouver plusieurs points et tracer les deux courbes, on installe la pompe avec une conduite de refoulement très courte, et on fait varier la pression à la sortie du diffuseur et le débit de la roue, en fermant plus ou moins complètement une vanne placée à l'extrémité de la conduite.

Sans pouvoir indiquer dans quelle mesure les courbes expérimentales s'accordent avec les courbes calculées, nous pouvons dire que l'allure de ces dernières correspond d'une manière satisfaisante à celle observée.

Malheureusement les résultats donnés dans les revues

techniques ne sont jamais accompagnés des dimensions des pompes sur lesquelles ont été effectuées les expériences, et il n'est pas possible, dès lors, de rechercher les courbes calculées.

Une coïncidence absolue entre les courbes résultant d'expériences et les courbes théoriques ne peut d'ailleurs jamais exister, sauf aux environs du débit pour lequel la pompe a été calculée. En effet, la théorie précédente suppose que les angles du distributeur et du diffuseur sont déterminés pour chaque débit, de manière à rendre minimum les chocs à l'entrée de la roue et du diffuseur; cette condition ne saurait évidemment être réalisée dans les expériences.

Du tracé des deux courbes expérimentales du coefficient manométrique (avec ou sans diffuseur), il est possible, en tout cas, de déterminer avec une certaine rigueur, les valeurs de φ , ψ et ψ' , par conséquent d'établir a priori, par le calcul, les courbes caractéristiques pour une pompe de même construction, et cela avec une grande approximation.

Avant de formuler, d'une manière précise, des conclusions concernant l'angle β_1 et la valeur de x qu'il convient d'adopter dans les projets, il est nécessaire de rechercher comment varie, avec le débit, le rendement effectif.

(A continuer).

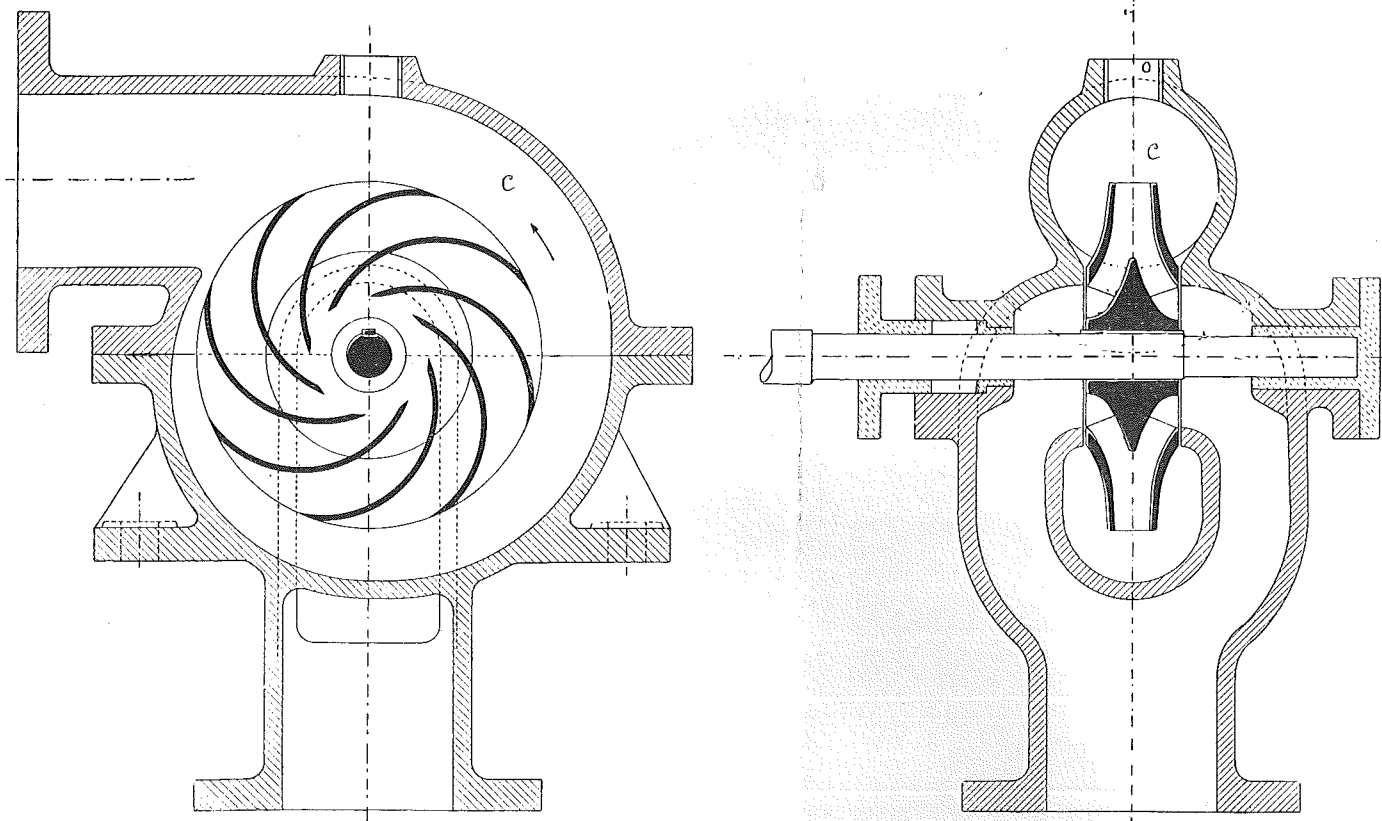


Fig. 1. — Échelle 1/5.

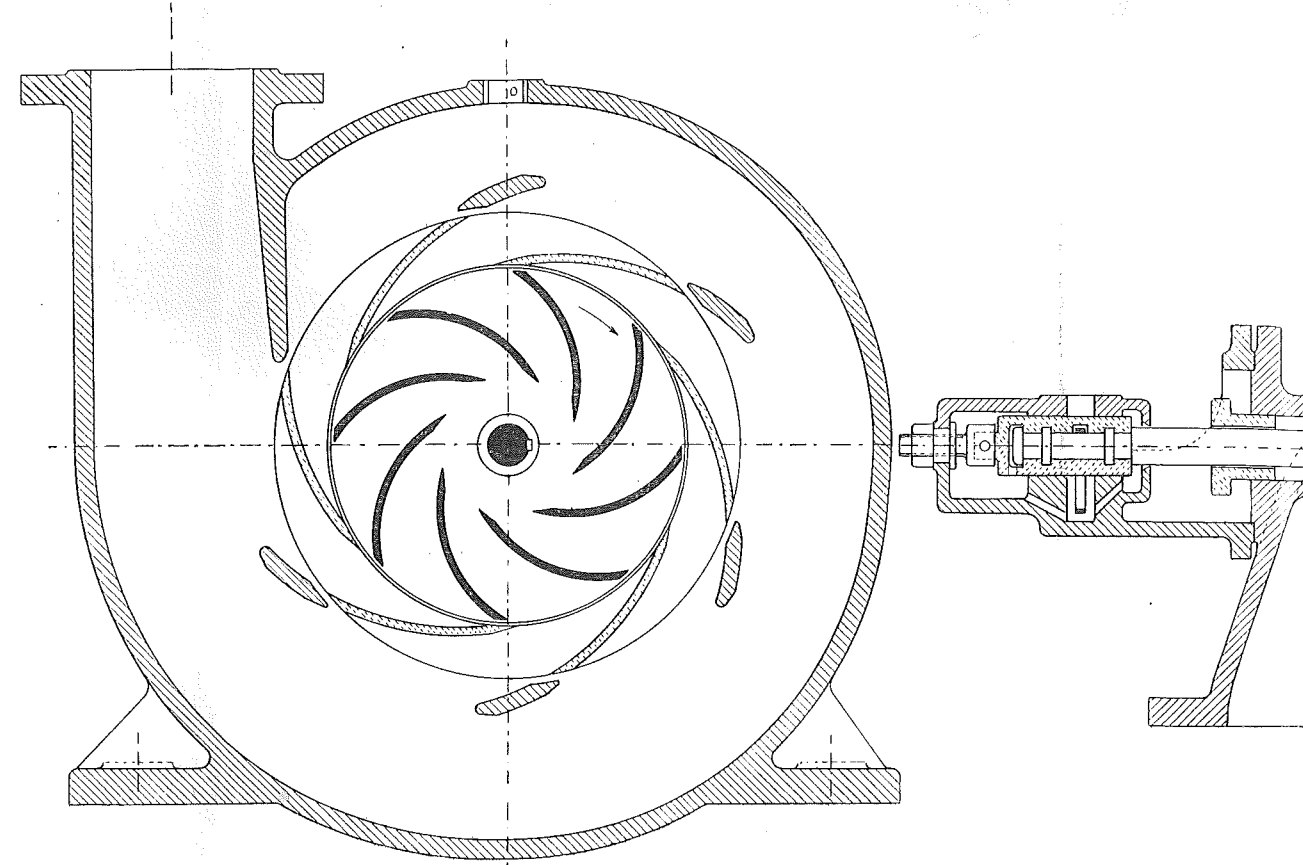


Fig. 2. — Echelle 1/5.

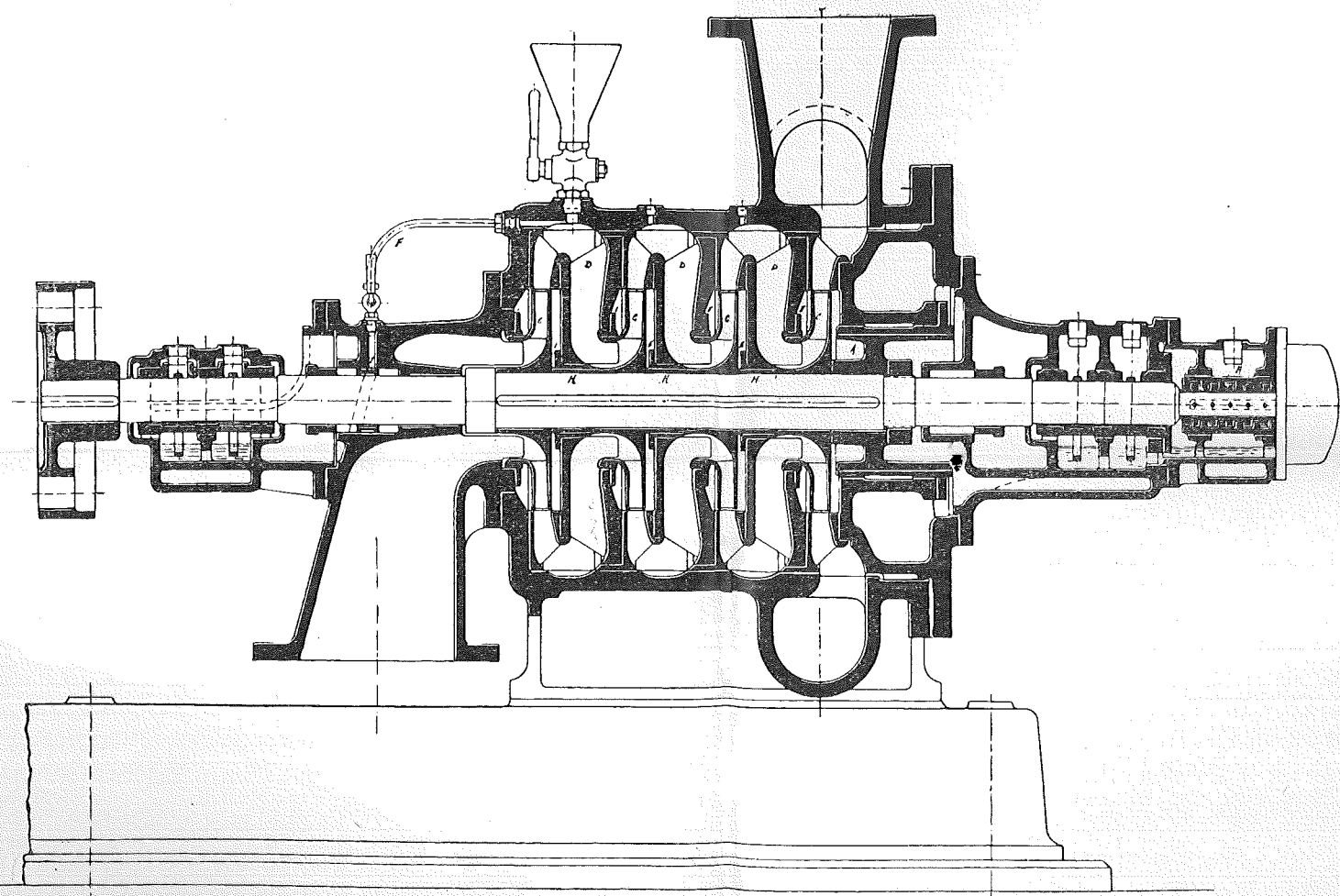


Fig. 3.

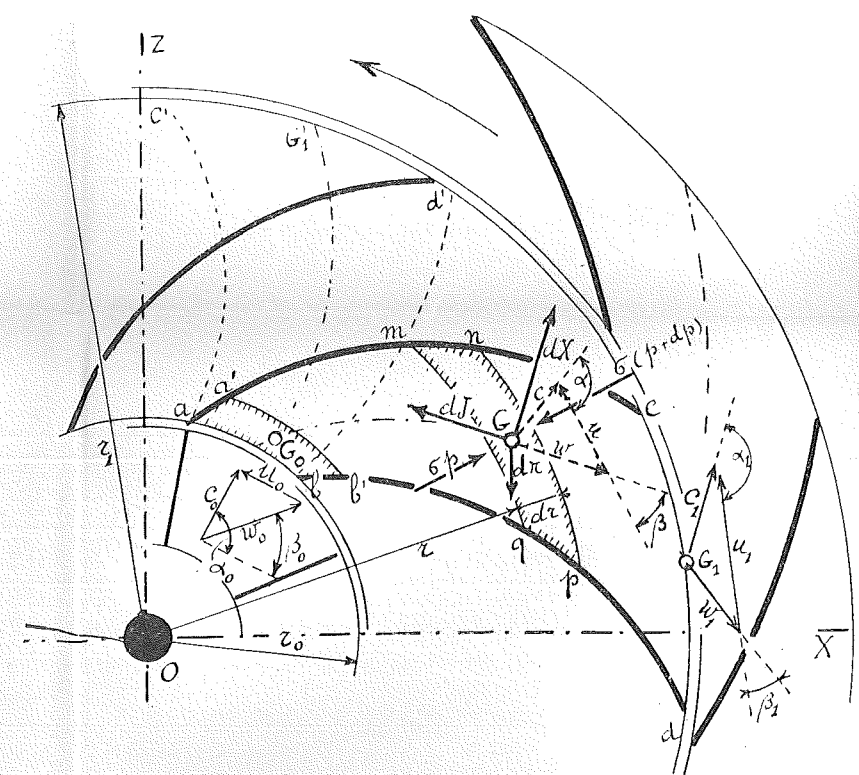


Fig. 4.

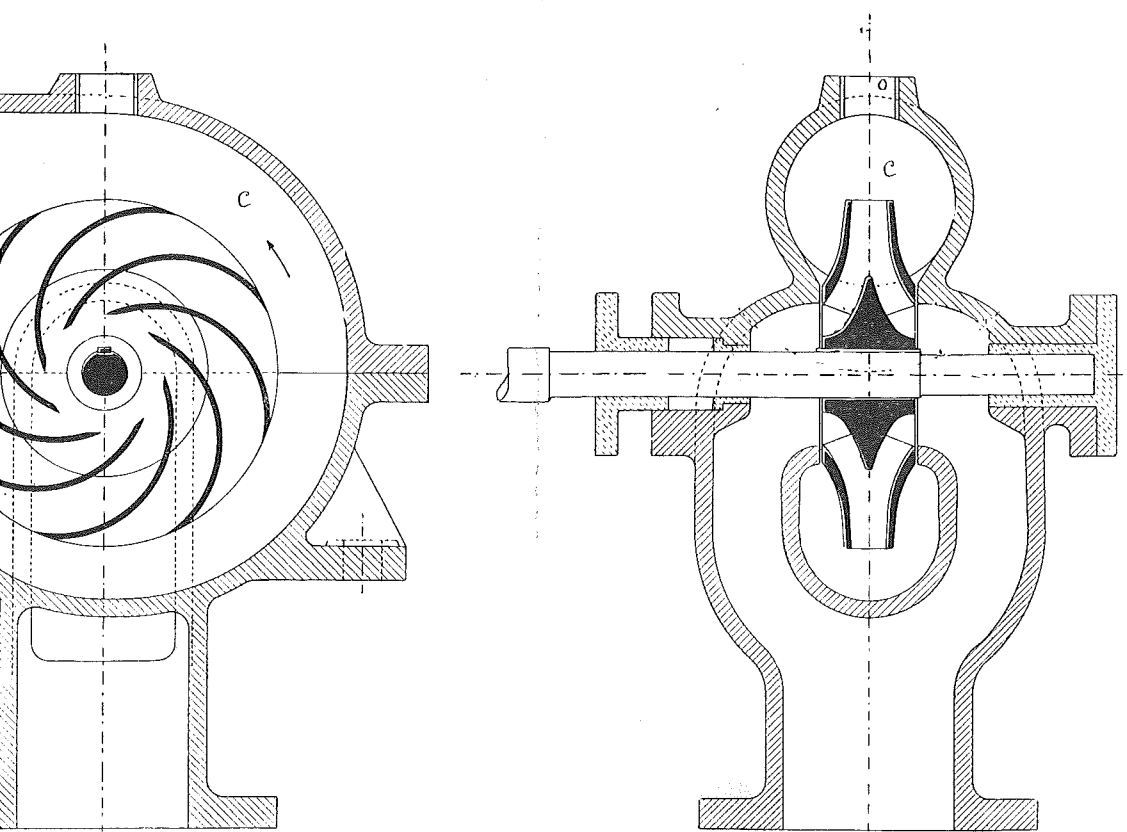


Fig. 1. - Échelle 1/5.

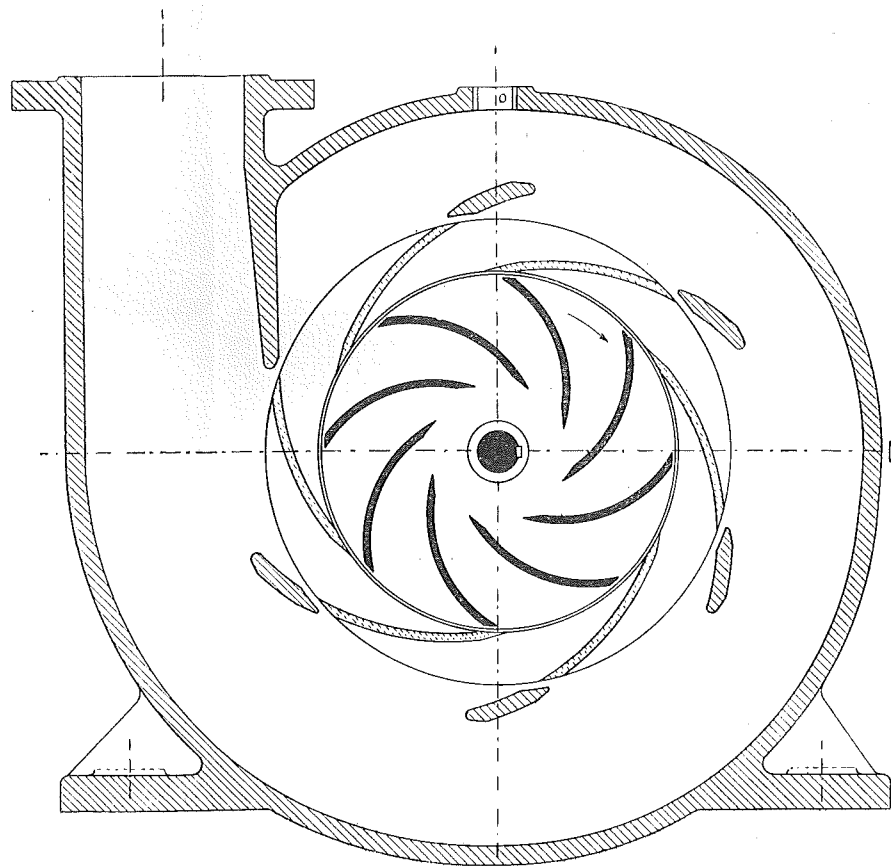


Fig. 2. - Échelle 1/5.

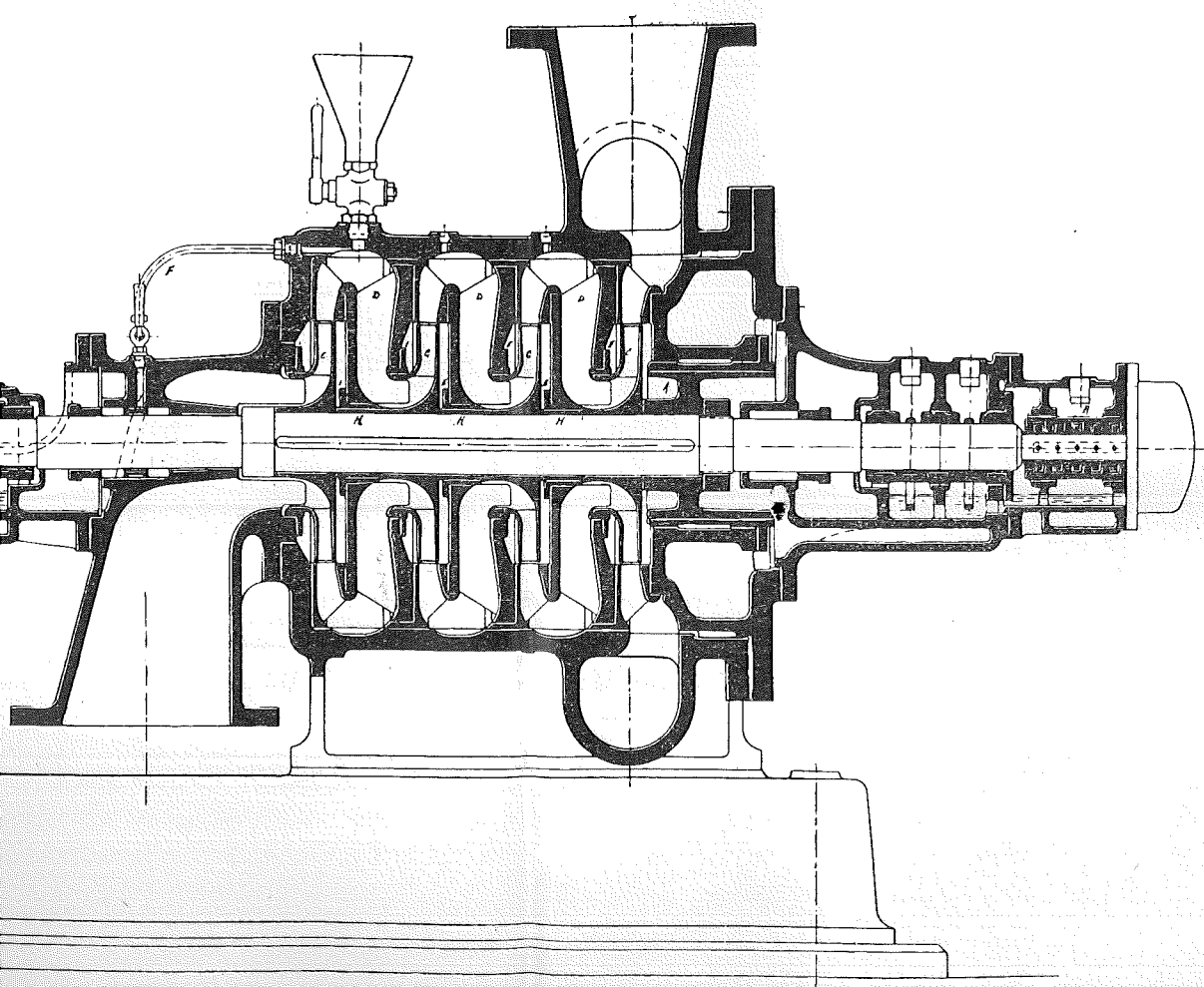
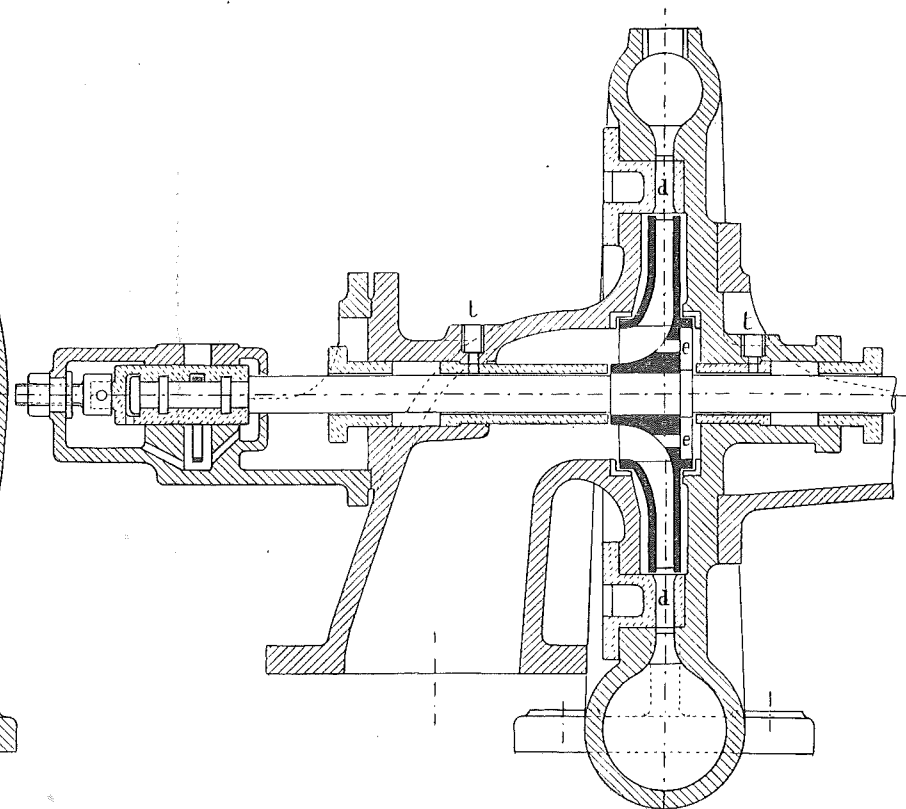


Fig. 3.

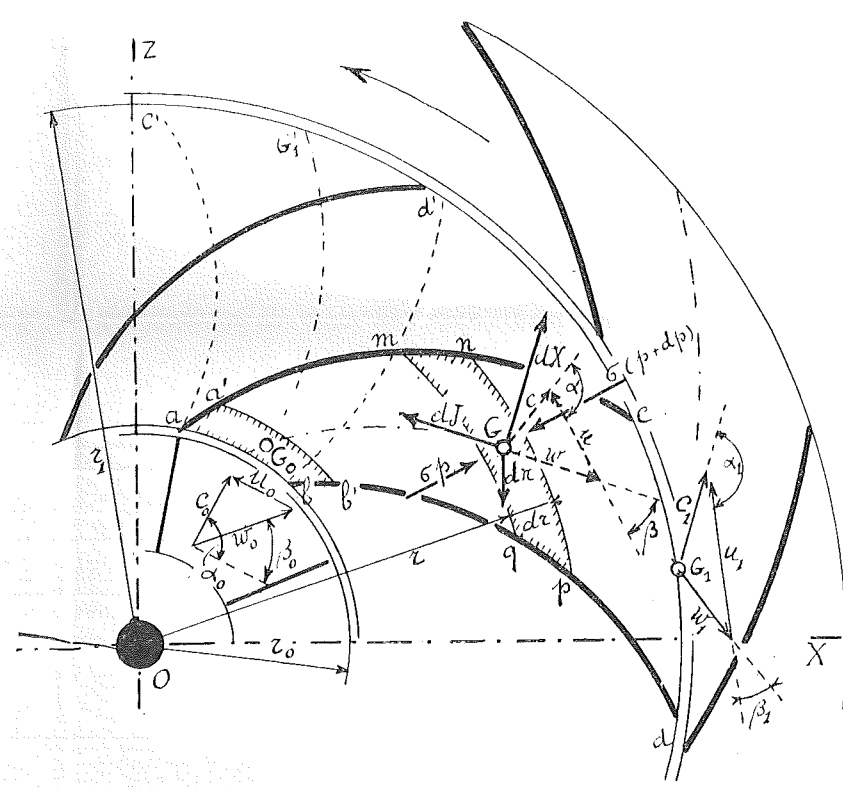
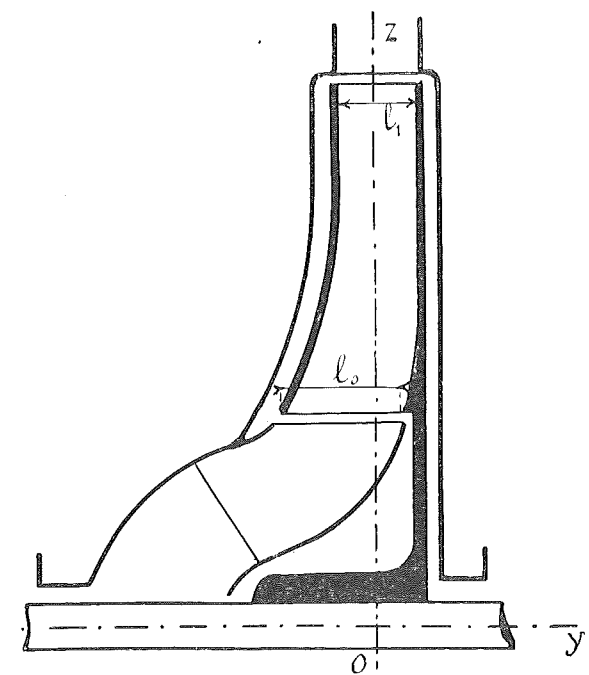


Fig. 4.



coupe suivant oz

Fig. 4bis.

SOMMAIRE.

	Pages.
1. Le dragage en Guyane, par A. BORDEAUX, ingénieur	189
2. Les pompes centrifuges, par CH. HANOCQ, ingénieur, répétiteur à l'Université de Liège	214
3. Les cordeaux détonants et le nouveau procédé d'amorçage des mines, par P. CHALON, ingénieur, à Paris	258
4. Les procédés de transformation du laitier de haut-fourneau en ciment, par MAX LEPERSONNE, ingénieur, directeur de la Société des ciments Portland de Buda à Haren	274

BULLETIN.

L'industrie charbonnière et sidérurgique en 1908. Notes statistiques par P. TRASENSTER, ingénieur honoraire des mines. 291

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de ponts métalliques professé à l'Ecole des Ponts et Chaussées, par JEAN RESAL, inspecteur général des Ponts et Chaussées. — Construction des machines et appareils électriques. — Traité complet d'analyse chimique appliquée aux essais industriels, par Post, professeur à l'Université de Goettingue, et NEUMANN, professeur à la Hochschule de Darmstadt. — Rohrleitungen. — Liste des ouvrages reçus 301

Pl. 6.

REVUE UNIVERSELLE DES MINES, ETC., TOME XXV. 1909. — 5^e Numéro.

REVUE UNIVERSELLE

DES 232 / 1

MINES, DE LA MÉTALLURGIE

DES

TRAVAUX PUBLICS, DES SCIENCES ET DES ARTS

APPLIQUÉS A L'INDUSTRIE

53^e ANNÉE. — QUATRIÈME SÉRIE

ANNUAIRE DE L'ASSOCIATION DES INGÉNIEURS SORTIS DE L'ÉCOLE DE LIÈGE
CINQUIÈME SÉRIE

MARS 1909

TOME XXV. — 3^e NUMÉRO

Société Géologique
de Belgique
Secrétaire
7, Place du 20 août, 7
LIÈGE

LIÈGE

18, Rue Bonne-Femme, 18

PARIS

H. Le Soudier, 174, Boulevard Saint-Germain

ST-PÉTERSBOURG, C. RICKER. ODESSA, G. ROUSSEAU.

MADRID, FUENTES Y CAPDEVILLE. BERLIN, ERNST & KORN. LEIPZIG, ARTHUR FÉLIX

FREIBERG (SAXE), CRAZ ET GERLACH. MILAN, ADMINISTRAZIONE DEL *Politecnico*

LONDRES, WILLIAM ET NORGATE. TURIN, BOCCA FRÈRES.

REPRODUCTION INTERDITE

Le dépôt légal a été fait en France, en Belgique et en Angleterre