

REVUE UNIVERSELLE  
DES  
MINES, DE LA MÉTALLURGIE  
DES  
TRAVAUX PUBLICS, DES SCIENCES ET DES ARTS  
APPLIQUÉS A L'INDUSTRIE

---

LES HÉLICES AÉRIENNES

PAR

**Ch. HANOCQ,**

Ingénieur A. I. Lg.-A. I. M., Répétiteur à l'Université de Liège.

Communication faite à l'Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liège (Section de Liège), le 5 Novembre 1911.

INTRODUCTION

L'étude des hélices aériennes est à l'ordre du jour, comme l'une des questions les plus importantes qui touchent à l'aviation. De nombreuses études théoriques ont déjà été publiées, des expériences très intéressantes ont été effectuées sur les hélices au point fixe, et dans ces derniers temps sur des hélices en translation. Cependant, à notre connaissance, le calcul des dimensions à donner aux hélices, dans des conditions déterminées, n'a jamais été exposé complètement; aucune des théories connues, n'est parvenue à établir d'une manière précise certaines propriétés fondamentales des propulseurs hélicoïdaux en mouvement de translation, propriétés que les expériences récentes du capitaine Dorand ont mises en lumière.

TOME XXXVII, 4<sup>e</sup> SÉRIE.

1

COMITÉ DE RÉDACTION :

- A. Gillon**, professeur émérite à l'Université de Liège, *Président*.  
**H. Dechamps**, professeur de construction de machines et d'architecture industrielle à l'Université de Liège.  
**P. Habets**, directeur-gérant des Charbonnages de l'Espérance et Bonne-Fortune, à Liège, professeur d'exploitation des mines à l'Université de Bruxelles.  
**H. Hubert**, professeur de mécanique appliquée et de physique industrielle à l'Université de Liège.  
**P. Trasenster**, ingénieur, à Liège.

Comme on l'a déjà fait remarquer, et comme cela ressort des expériences plus anciennes sur les hélices marines, les propriétés des propulseurs hélicoïdaux ne diffèrent pas essentiellement qu'ils fonctionnent dans un fluide compressible comme l'air, ou incompressible comme l'eau. Il en résulte que la théorie des hélices aériennes pourra s'appliquer, aux coefficients près, aux hélices marines, et que le sujet prend de ce fait, une ampleur considérable.

Les théories connues peuvent se diviser en deux catégories : 1° celles où leurs auteurs étudient le phénomène *en gros*, voyant dans l'hélice un appareil prenant le fluide sur une section égale au cercle balayé, à une vitesse nulle, et le portant à une vitesse moyenne  $V$ , subissant de ce chef une poussée égale à  $MV$  et exigeant une puissance  $\frac{MV^2}{2}$ ,  $M$  étant la masse déplacée par seconde ; 2° celles où l'hélice est considérée comme constituée d'éléments infiniment petits, attaquant la masse fluide sous un certain angle d'incidence, subissant de ce chef une poussée élémentaire et exigeant un travail correspondant que les expériences récentes sur l'aérodynamique permettent de déterminer.

C'est à cette dernière méthode que nous avons eu recours ; mais ce que nous avons cherché, à la différence des auteurs qui nous ont précédé dans cette voie, ce sont des formules capables de donner, en *fonction de la vitesse de translation axiale de l'hélice* et des éléments caractéristiques de celles-ci, la poussée, le travail utile, le travail absorbé et le rendement.

Nous aurions hésité à publier cette étude dont les développements mathématiques sont longs et plutôt ardu, si les conclusions auxquelles nous avons été conduit, n'étaient extrêmement intéressantes, si les formules trouvées ne permettaient de coordonner les résultats d'expériences, et de traiter dans toute sa généralité,

grâce aux coefficients de l'aérodynamique, le problème suivant :

« Déterminer les dimensions d'une hélice capable de donner une poussée de  $P$  kg à la vitesse de rotation de  $N$  tours par seconde, en remorquant un appareil à la vitesse de  $c$  mètres par seconde, de manière à obtenir le maximum de rendement possible. Si le nombre de tours  $N$  n'est pas imposé, déterminer la vitesse angulaire la plus favorable. Calculer la puissance absorbée dans les deux cas. »

## CHAPITRE I<sup>er</sup>

### Description des deux types principaux d'hélice aérienne. Éléments caractéristiques de ceux-ci.

La fig. 1 donne les projections, verticale et horizontale, d'une hélice aérienne à deux pales, construite *en bois*. La fig. 2 représente, de la même manière, une hélice construite *en acier*. On voit que dans ce dernier système la partie centrale est supprimée et que les surfaces travaillantes sont reliées au moyeu, par des bras en acier rivés à celles-ci. Au point de vue du fonctionnement, il n'y a pas de différence caractéristique ; le dernier mode de construction présente cependant l'inconvénient de déterminer à la surface dorsale de la pale, et sur une certaine longueur de celle-ci, un ressaut du fluide en mouvement, dû à la présence du bras rivé, et partant des remous de nature à diminuer le rendement.

La *surface théorique* d'une hélice, c'est-à-dire celle qui serait réalisée si on pouvait donner à la pale une épaisseur faible et uniforme, est engendrée par le déplacement d'une droite s'appuyant sur l'axe  $yy'$  de l'hélice et sur la ligne hélicoïdale tracée à la surface du cylindre

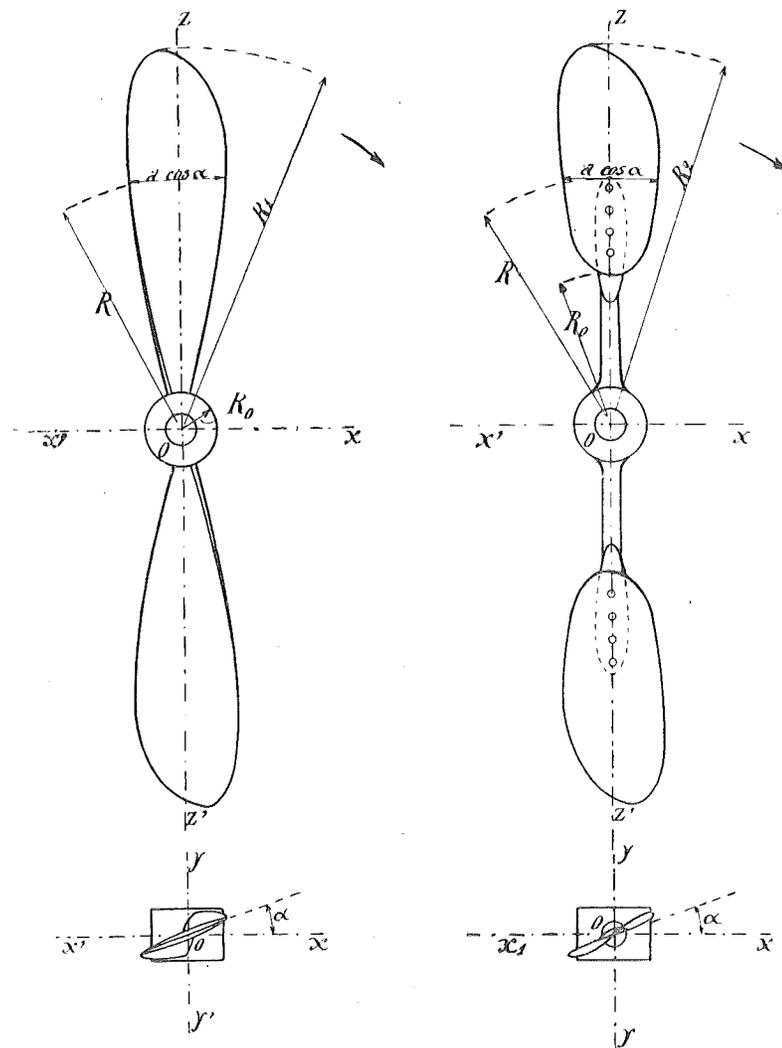


Fig. 1

Fig. 2

ficatif de rayon  $R_1$ , cette droite restant constamment parallèle au plan perpendiculaire à l'axe  $yy'$ . L'hélice théorique est donc une portion de surface hélicoïde à plan directeur.

Nous appellerons *pas* du propulseur, le pas  $p$  de la ligne hélicoïdale tracée à la surface du cylindre fictif de rayon  $R_1$ . Toute section cylindrique faite à une distance quelconque  $R$  du centre, donnera une ligne hélicoïdale de même pas  $p$ . En projection horizontale, la section se présentera, sur la faible longueur correspondant à la pale, comme une ligne sensiblement droite, inclinée sur l'axe d'un angle  $\alpha$ , variable avec le rayon, et défini par la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2 \pi R}.$$

Dans les hélices construites en acier, on peut réaliser à peu près le cas théorique que nous venons d'envisager. Dans les hélices en bois, au contraire, les sections successives d'une pale devant croître sensiblement vers le moyeu, on est obligé de faire varier la forme de celles-ci.

La fig. 3 donne les coupes faites respectivement à la distance  $R_1$ ,  $0,7R_1$  et  $0,4R_1$  de l'axe  $O$  d'une des hélices en bois essayées au laboratoire de Koutchino ; les sections sont rabattues dans le plan de projection par une rotation autour de la ligne  $eb$  parallèle à l'axe  $x x'$  de l'hélice. Le

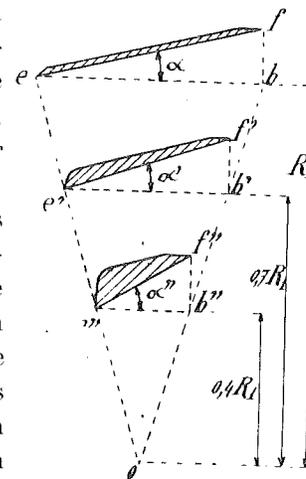


Fig. 3

pas de la face inférieure est constant mais la ligne profilant la face dorsale est inclinée d'un angle constant sur l'axe. Or, il est évident que la déviation du fluide

par la surface de l'aile, ne dépend pas seulement de l'angle de la face inférieure, mais aussi de celui de la face dorsale. Ce n'est donc plus qu'avec une certaine approximation que l'on peut parler du pas de l'hélice; dans le cas de la fig. 3, le pas de la surface hélicoïdale qui produirait le même effet que l'hélice en question, irait diminuant vers le moyeu.

Pour réaliser une hélice travaillant comme surface hélicoïdale pure, il suffit de choisir un profil symétrique comme celui de la fig. 4, la ligne médiane déterminant le pas de l'hélice.

En ce qui concerne la largeur  $a$  de la pale, on peut dire que presque tous les constructeurs la font croître régulièrement du moyeu à la périphérie, sauf à arrondir l'extrémité de manière à éviter les remous qui tendent à se former à cet endroit. En projection verticale, la largeur mesurée a pour valeur  $a \cos \alpha$ .

REMARQUE. — On peut se proposer de construire des hélices à pas décroissant vers le moyeu de façon à réaliser, dans le fonctionnement en translation, un angle constant, sur toute la largeur de l'aile, entre la direction relative du flux d'air qui frappe la surface, et la direction de cette surface.

D'autre part, on peut choisir pour profiler les sections des pales, deux arcs de cercle formant un croissant, comme il est indiqué fig. 5, ou un arc de cercle et une droite de manière à donner un segment de flèche variable avec le

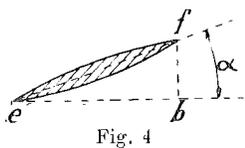


Fig. 4

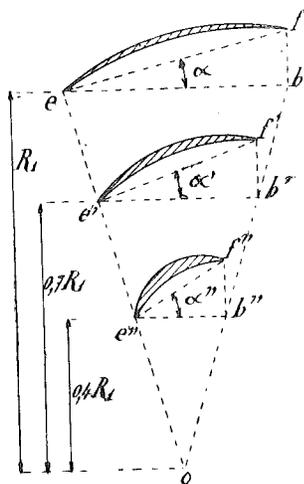


Fig. 5

rayon  $R$ . C'est ce dernier profil qui est particulièrement employé. On fait en sorte, dans ce cas, que la corde sous-tendant les arcs de cercle soit inclinée d'un angle  $\alpha$ , tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2 \pi R},$$

$p$  étant constant.

Les hélices aériennes sont ordinairement construites avec deux pales, mais il en existe à trois, quatre et même cinq pales.

Nous examinerons au chapitre III, l'influence des éléments caractéristiques que nous venons de définir, sur la poussée fournie et le travail absorbé par l'hélice, sur le rendement correspondant.

Ces généralités étant exposées d'une manière aussi succincte que possible, il reste avant d'entamer la théorie,

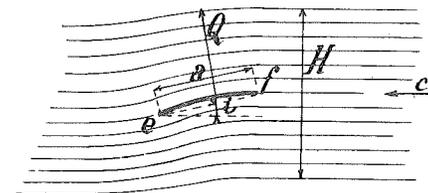


Fig. 6

à étudier les phénomènes qui accompagnent le déplacement dans l'air, d'une surface faisant un angle d'incidence  $i$  avec la direction du déplacement, ou ce qui revient au même, les phénomènes qui accompagnent la déviation d'un flux d'air d'épaisseur illimitée par une surface inclinée du même angle d'incidence  $i$  (fig. 6) sur la direction du flux.

## CHAPITRE II.

## Rappel des formules fondamentales de l'aérodynamique.

## § 1. — Formules théoriques pour l'attaque oblique d'un flux d'air, par une surface plane ou courbe.

Ainsi que le montrent les expériences remarquables de Riabouchinsky, les filets d'air animés d'une certaine vitesse  $c$  (fig. 6) sont déviés par la présence d'une plaque (plane ou courbe), sur une hauteur  $H$  qui dépend principalement : 1° de la longueur  $a$  dans le lit du vent, 2° de l'angle d'inclinaison  $i$  de la plaque, sur la direction du flux, et probablement de la vitesse  $c$  elle-même.

L'angle de déviation des filets varie d'un angle maximum pour ceux qui touchent la surface, à un angle nul pour ceux éloignés d'une longueur suffisante de celle-ci.

De la déviation, par la surface, du fluide animé d'une vitesse  $c$ , résulte une force  $Q$  dirigée à peu près normalement à la corde  $ef$ . Cette force  $Q$  varie nécessairement en grandeur et en direction avec la vitesse  $c$  du flux, la largeur  $a$ , la profondeur ou envergure  $l$  de la plaque, l'angle d'inclinaison  $i$  de la corde.

Il serait évidemment impossible de déduire de considérations mathématiques pures, une formule qui, tenant compte du phénomène complexe que nous venons de décrire, donnerait la valeur de  $Q$  en grandeur et en direction en fonction des éléments caractéristiques.

La seule chose que l'on puisse faire pratiquement, c'est d'envisager un cas limite, celui où la surface serait une surface cylindrique de rayon  $r_0$  dont le bord d'attaque serait tangentiel à la direction du flux de vitesse  $c$

(fig. 7), ce flux étant limité à une épaisseur  $(r_1 - r_2)$  et étant dévié complètement d'un angle  $\alpha$ .

Considérons un élément limité par deux cylindres de rayon  $r$  et  $r + dr$ , et par deux plans infiniment voisins faisant un angle au centre  $d\theta$ . La force centrifuge agissant sur cet élément aura pour valeur

$$df = (l \times r \times d\theta dr) \frac{\delta}{g} \frac{c^2}{r}$$

$c$  désignant la vitesse du flux;

$l$  l'envergure de la surface;

$\delta$  le poids de l'unité de volume d'air.

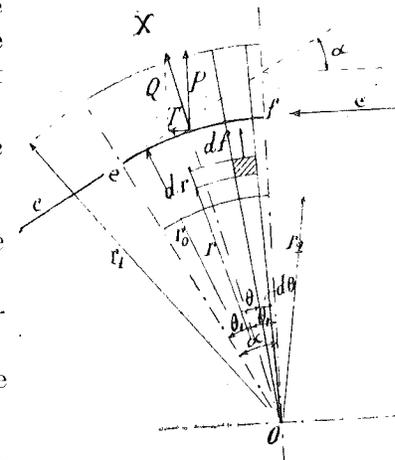


Fig. 7

Etant donné la faible variation de la pression aux différents points d'un même rayon, on peut considérer  $\delta$  comme constant et intégrer entre  $r_2$  et  $r_1$ , par rapport à  $r$ , pour obtenir l'effort résultant  $dF$  correspondant à tous les éléments compris dans une tranche d'angle au centre  $d\theta$  :

$$dF = \frac{\delta}{g} l d\theta c^2 (r_1 - r_2).$$

Chacune des forces élémentaires  $dF$  correspondant à une valeur  $\theta$ , peut être décomposée en deux autres, l'une dirigée suivant OX, bissectrice de l'angle  $\alpha$ , l'autre dirigée perpendiculairement à celle-ci.

Les composantes suivant OX de ces différentes valeurs  $dF$  auront pour résultante  $Q$ , obtenue en intégrant l'expression

$$dF \cos \theta = \frac{\delta}{g} l c^2 (r_1 - r_2) \cos \theta d\theta$$

entre  $o$  et  $\theta_1$ , et en multipliant par 2, pour tenir compte des deux parties symétriques d'angle  $\theta_1$  :

$$Q = 2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin \theta_1 \quad (I)$$

Les composantes perpendiculaires à OX s'équilibrent deux à deux, puisque tout est symétrique, et que la vitesse  $c$  est supposée constante.

Si nous décomposons maintenant la résultante totale  $Q$  appliquée au centre de gravité de la surface, en deux autres, l'une suivant la perpendiculaire à la direction du flux non dévié, et l'autre dans la direction de celui-ci, nous aurons les valeurs de  $P$  et de  $T$  désignées ordinairement sous le nom de *poussée* et *trainée*.

$$P = 2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1$$

ou

$$P = \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin \alpha \quad (II)$$

$$T = 2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (III)$$

La formule II ci-dessus peut s'étendre avec une approximation suffisante au cas réel d'un flux d'épaisseur illimitée, comme le montrent les expériences réalisées dans ces dernières années, tout au moins pour les faibles valeurs de l'angle  $\alpha$ . Entre 0 et 10 ou 15°, on trouve pour  $(r_1 - r_2)$ , une valeur à peu près constante, qui varie dans des limites relativement restreintes avec le rapport  $\frac{l}{a}$  de l'envergure  $l$ , à la longueur  $a$  de la plaque dans le lit du vent.

La formule III qui ne tient compte ni du frottement de l'air sur la surface, ni des remous au bord d'attaque, doit être corrigée comme nous le montrerons plus loin pour donner des résultats concordants avec ceux de l'expérience.

Il est regrettable cependant que des expériences n'aient pas été faites en vue d'établir les coefficients relatifs au cas particulier que nous venons d'envisager, d'une surface de courbure variable, dont le bord d'attaque fût resté constamment tangentiel au flux. Nous savons bien que dans la pratique habituelle de l'aviation, on fait varier l'angle  $\alpha$ , non pas en courbant plus ou moins l'aile à l'arrière, mais en inclinant plus ou moins toute la surface, de forme invariable, sur la direction du flux. Néanmoins, en envisageant le cas où les phénomènes accessoires ont une influence minimum, on eût pu mieux se rendre compte de l'approximation limite des formules employées.

Il est vrai que l'on pourrait déduire des expériences entreprises par M. Rateau, M. Eiffel, M. Riabouchinsky, sur les plaques courbes de flèche variable, les données nécessaires à la vérification cherchée; mais dans bien des cas, on est frappé des différences obtenues par les différents expérimentateurs. C'est ainsi qu'il ressort des expériences de M. Eiffel que la poussée maximum  $P$  se présente toujours, lorsqu'on fait varier l'angle d'inclinaison  $i$  (fig. 8) d'une plaque courbe donnée, pour la valeur qui correspond à l'orientation du bord d'attaque dans la direction tangentielle au flux. Dans les diagrammes présentés par M. Riabouchinsky pour des plaques d'angle  $\alpha$  variable, cette remarque n'apparaît plus.

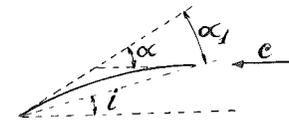


Fig. 8

Il semble que le besoin d'arriver premier fasse un peu perdre de vue la nécessité de coordonner les résultats

obtenus, de les comparer et de déterminer la raison d'être des différences constatées.

Quoi qu'il en soit, nous allons dans les deux paragraphes suivants, comparer les formules trouvées ci-dessus à celles ordinairement adoptées, et déterminer la valeur des coefficients qui doivent les affecter lorsqu'on les applique au cas d'une surface plane, ou d'une surface courbe, inclinée d'un angle  $i$  variable avec la direction du flux.

§ 2. — Comparaison entre les différentes formules proposées.

Ordinairement les formules employées, qui sont d'ailleurs identiques à celles que nous venons d'établir, sont déduites du théorème des quantités de mouvement de la manière suivante :

AB étant la vitesse du flux au bord d'attaque (fig. 9) d'une plaque plane ou courbe

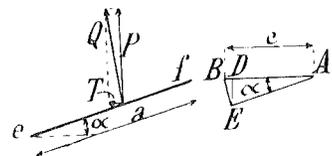


Fig. 9

ef, AE sera la vitesse du flux à la sortie, l'angle BAE étant égal à  $\alpha$ . Sans erreur appréciable nous pouvons supposer :

$$AE = AB ;$$

la variation de vitesse dans la direction perpendiculaire au flux sera donc

$$ED = c \sin \alpha ,$$

et la force P résultante, dirigée suivant ED, c'est-à-dire perpendiculairement au flux, à l'entrée, sera

$$P = M c \sin \alpha , \quad (1)$$

M désignant la masse déviée par seconde.

Par le même raisonnement, nous arriverions à la relation

$$T = M \times BD = M c (1 - \cos \alpha)$$

ou 
$$T = 2 M c \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

Ces formules sont identiques à celles que nous avons établies au paragraphe précédent. En effet :  $(r_1 - r_2)$  représentant l'épaisseur du flux dévié,  $l(r_1 - r_2) \frac{\delta}{g} c$  n'est autre chose que la masse M déviée par seconde.

Les formules ci-dessus ont souvent été mises sous une autre forme, en observant que  $(r_1 - r_2)$  est approximativement proportionnel à  $a$  pour les faibles valeurs de  $\alpha$ , et que par conséquent,  $l(r_1 - r_2) \frac{\delta}{g}$  est proportionnel à la S surface du plan.

En remplaçant  $l(r_1 - r_2) \frac{\delta}{g}$  par KS, il viendra :

$$P = K S c^2 \sin \alpha - k_y S c^2 \quad (3)$$

$$T = 2 K S c^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = k_x S c^2 \quad (4)$$

$k_y$  et  $k_x$  étant des coefficients à déterminer par l'expérience.

REMARQUE I. — Il pourrait paraître superflu d'établir les formules par la méthode que nous avons suivie au paragraphe précédent, alors que l'on arrive aux mêmes résultats par l'application si simple du théorème des quantités de mouvement. Mais nous ferons observer que, par la méthode que nous avons employée, nous nous sommes rendu compte très exactement des hypothèses implicites que ces formules contiennent.

REMARQUE II. — Contrairement à ce qui est ordinairement écrit à ce sujet, la résultante Q des composantes P et T n'est pas normale au plan, mais est bissectrice de l'angle formé par le plan et la direction du flux.

REMARQUE III. — Théoriquement le point d'application de la résultante se trouve au centre de gravité de la surface. Pratiquement on constate que ce point d'application est reporté vers le bord d'attaque. Cela tient à ce

que la déviation des filets se produit particulièrement au bord d'attaque comme en témoignent les diagrammes des pressions sur la face inférieure et des dépressions sur la face dorsale, relevés par M. Eiffel sur les plaques planes et sur les plaques courbes.

La poussée n'est évidemment pas proportionnelle à la surface  $S$ , car l'épaisseur du flux influencé ( $r_1 - r_2$ ) n'est pas proportionnelle à la longueur  $a$  de la plaque dans le lit du vent.

Pour une plaque donnée ( $r_1 - r_2$ ) varie avec l'inclinaison  $\alpha$ , comme le montrent les expériences de M. Rateau et de M. Eiffel.

Pour les valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $20^\circ$ , on constate que la formule II n'est plus applicable, le phénomène de l'écoulement du fluide le long de la plaque, étant complètement différent de celui que nous avons envisagé au paragraphe 1.

A partir d'un angle voisin de  $25^\circ$  ou  $30^\circ$ , ainsi qu'en témoignent les expériences de M. Riabouchinsky, les filets

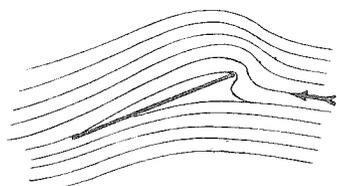


Fig. 10

qui viennent en contact avec la face inférieure du bord d'attaque rebrousse vers le haut, comme l'indique la fig. 10, et il ne peut plus exister qu'une approximation très relative dans la loi que traduisent les formules II et III.

Au delà de  $20^\circ$ , les valeurs expérimentales de  $P$  correspondent mieux à celles données par la formule

$$P' = P \cos \alpha = \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ou

$$P' = \frac{1}{2} \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin 2 \alpha \quad \text{II}'$$

Nous emploierons donc la formule II ou la formule II', qui donnent des résultats très peu différents, pour les valeurs de  $\alpha$  inférieures à  $20^\circ$ , et nous conserverons exclusivement la formule II' pour les valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $20^\circ$ .

### § 3. — Détermination des coefficients expérimentaux.

#### A. — Plaques planes.

Recherchons, au moyen des valeurs de  $k_x$  et  $k_y$  fournies par les expériences de M. Rateau et de M. Eiffel pour les plaques planes, les valeurs qu'il faut donner à  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  pour qu'il y ait égalité entre les valeurs calculées de  $P$  et les valeurs observées. Pour cela posons l'égalité :

$$k_y S c^2 = \frac{1}{2} \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin 2 \alpha ;$$

nous en déduisons :

$$k_y = \frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2 \alpha \frac{l (r_1 - r_2)}{S} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2 \alpha \frac{r_1 - r_2}{a}$$

et par conséquent

$$\frac{r_1 - r_2}{a} = \frac{k_y}{\frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2 \alpha} \quad (4)$$

Si nous introduisons la valeur de ( $r_1 - r_2$ ) ainsi trouvée en fonction de  $a$ , pour chaque valeur de  $\alpha$ , dans l'équation III, nous pourrions déterminer la valeur de  $T$  et, par conséquent, le rapport  $\frac{T'}{T}$  entre la valeur réelle et la valeur théorique.

$$\frac{T'}{T} = \frac{k_x S c^2}{2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) c^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{k_x}{2 \frac{\delta}{g} \frac{r_1 - r_2}{a} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (5)$$

Dans le tableau I ci-contre, nous avons donné les valeurs de  $\frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2\alpha$  et de  $2 \frac{\delta}{g} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ , en prenant pour  $\delta$ , 1,293 kg. Nous avons transcrit ensuite les valeurs expérimentales de  $k_x$  et  $k_y$ , fournies par les essais sur une plaque plane de  $0^m50 \times 0^m30$ , et sur une autre de  $0^m85 \times 0^m15$ .

Les valeurs calculées de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  et de  $\frac{T'}{T}$  ont été mises en diagramme (fig. 11). Les courbes pointillées donnent les valeurs de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  et les courbes en trait plein donnent le rapport de  $\frac{T'}{T}$ , en fonction de  $\sin \frac{\alpha}{2}$ .

Les points noirs correspondent à la plaque de  $0^m85 \times 0^m15$  expérimentée par M. Eiffel.

On voit que

1° pour les petits angles, jusqu'à 4 ou 5°, l'épaisseur du flux influencé est presque indépendant de la longueur  $a$ , puisque  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  est égal à 3 pour  $a = 0^m15$  et est égal à 1,35 pour  $a = 0^m30$ ;

2° pour les valeurs supérieures à 20°,  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  est sensiblement constant pour un même angle, quelle que soit la valeur  $a$ , mais il varie avec cet angle;

3° les valeurs du rapport  $\frac{T'}{T}$  diminuent avec la valeur de  $\frac{l}{a}$ , rapport de l'envergure  $l$  à la longueur  $a$ .

Cette dernière remarque s'expliquerait par l'influence proportionnellement plus grande du bord d'attaque dans les expériences B, où le rapport  $\frac{l}{a}$  est voisin de 6, alors qu'il n'est que de 1,65 pour la plaque utilisée dans les expériences A.

TABLEAU I.

$\alpha$	A EXPÉRIENCES DE M. RATEAU plaque de $0^m50 \times 0^m30$						B EXPÉRIENCES DE M. EIFFEL plaque de $0^m85 \times 0^m15$							
	$\sin \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\sin \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2\alpha$	$2 \frac{\delta}{g} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$	$k_y$	$k_x$	$\frac{r_1 - r_2}{a}$	$\frac{T'}{T}$	$k_y$	$k_x$	$\frac{r_1 - r_2}{a}$	$\frac{T'}{T}$
1°	0,0174	0,0349	0,0087	0,000075	0,00230	0,0000198	0,0030	0,0003	1,302	11,62	0,0088	0,0019	2,96	32,4
2	0,0349	0,0698	0,0174	0,000302	0,00461	0,0000796	0,0061	0,0006	1,321	5,70	0,0140	0,0033	3,04	13,6
4	0,0698	0,1392	0,0349	0,001217	0,00917	0,0003210	0,0124	0,0014	1,352	3,23	0,0280	0,0061	3,05	6,25
6	0,1045	0,2079	0,0523	0,002740	0,01371	0,000722	0,0187	0,0025	1,363	2,54	0,0371	0,0083	2,71	4,24
8	0,1392	0,2756	0,0698	0,004870	0,01820	0,001285	0,0245	0,0039	1,343	2,26	0,0406	0,0100	2,24	3,48
10	0,1736	0,3420	0,0872	0,007600	0,0226	0,002020	0,0303	0,0057	1,340	2,12	0,0431	0,0113	1,91	2,96
15	0,2588	0,5000	0,1305	0,01705	0,0330	0,00449	0,0420	0,0120	1,272	2,10	0,0452	0,0142	1,37	2,31
20	0,3420	0,6428	0,1736	0,03015	0,0424	0,00795	0,0502	0,0185	1,182	1,965	0,0472	0,0180	1,00	2,24
25	0,4226	0,7660	0,2164	0,04690	0,0506	0,01237	0,0498	0,0237	0,985	1,940	0,0483	0,0237	0,955	2,00
35	0,5736	0,9397	0,3007	0,09000	0,0620	0,02378	0,0465	0,0320	0,750	1,80	0,0480	0,0348	0,755	1,89
45	0,7071	1,0000	0,3820	0,1458	0,0660	0,03850	0,0415	0,0403	0,628	1,67	0,0420	0,0451	0,636	1,84
60	0,8660	0,8660	0,5000	0,2500	0,0471	0,06395	0,0310	0,0515	0,657	1,20	0,0315	0,0585	0,668	1,33

Dans les limites de l'approximation nécessaire à de tels calculs, nous pourrions représenter la courbe des valeurs de  $\frac{T'}{T}$  en fonction de  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , en posant

$$\frac{T'}{T} = \frac{k_1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + k_3 \quad \text{IV}$$

$k_1$  et  $k_3$  étant déterminés de telle manière que les valeurs calculées coïncident avec les valeurs expérimentales dans le voisinage des angles de 4 à 10° qui sont les angles d'attaque les plus favorables dans le fonctionnement des hélices.

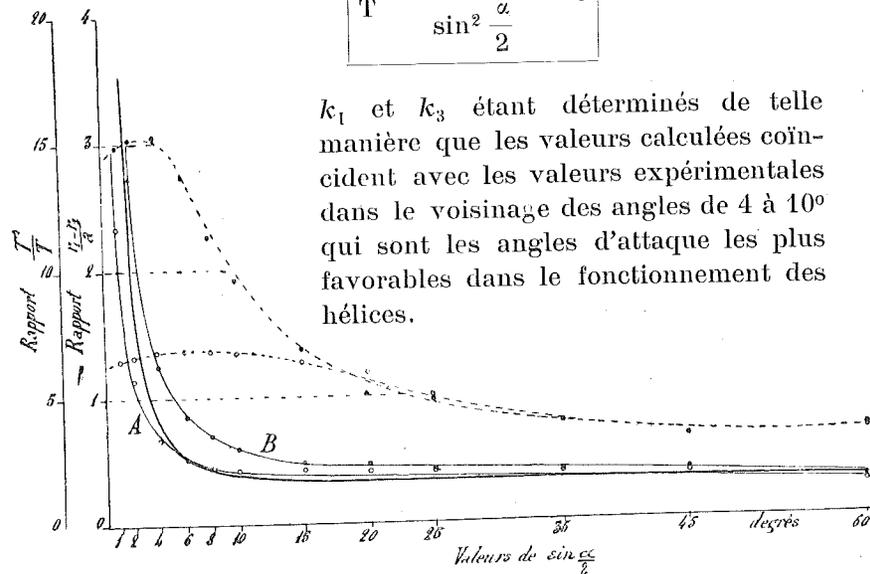


Fig. 11

Nous avons tracé en trait fort (fig. 11) la courbe théorique correspondant à

$$k_1 = 0,003 \quad k_3 = 1,5.$$

Comme on le voit, la courbe coïncide très approximativement avec celle correspondant aux expériences de M. Rateau. Pour se rapprocher de la courbe correspondant à la plaque de grande envergure où le bord d'attaque joue un rôle plus important, il aurait fallu choisir

$$k_1 = 0,006 \quad k_3 = 1,8.$$

REMARQUE. — Il eût été intéressant de dresser des tableaux identiques à celui indiqué ci-dessus (tabl. I) pour une série de plaques de même épaisseur, même bord d'attaque, dont le rapport  $\frac{l}{a}$  eût varié entre  $\frac{1}{4}$  et 6, par exemple, en passant par les valeurs  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 1, etc.

Malheureusement nous ne possédons pas les données expérimentales suffisantes. M. Eiffel a bien publié les diagrammes, en fonction de l'angle  $\alpha$ , des poussées qui s'exercent sur des surfaces de rapports  $\frac{l}{a}$  différents, en prenant comme poussée unitaire celle qui s'exerce sur la même surface placée orthogonalement, mais ces diagrammes ne permettent aucune déduction utile.

Il eût au contraire été facile, par un simple coup d'œil sur les diagrammes tracés comme nous venons de le faire, de déterminer le rapport  $\frac{l}{a}$  le plus favorable entre deux angles donnés, soit au point de vue de la poussée, soit au point de vue de la traînée. Il est évident que la surface qui présente le plus faible rapport  $\frac{T'}{T}$  pour un angle donné, est celle qui donne le meilleur rendement.

En recherchant deux équations pour représenter en fonction de  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , les valeurs de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  et de  $\frac{T'}{T}$ , on aurait pu, par la simple connaissance de coefficient correspondant au rapport  $\frac{l}{a}$  choisi, déterminer P et T' par des formules, et coordonner ainsi tous les résultats trouvés.

Pour se rendre compte de l'influence des conditions d'expériences sur les résultats, notamment de l'épaisseur du flux d'air dirigé sur la plaque, il eût été nécessaire cependant de répéter la série d'expériences signalées ci-dessus, en prenant  $a$  égal à 0 m 10, 0 m 20 et 0 m 30, par exemple.

B. — Plaques courbes.

Cherchons à étendre les formules générales au cas d'une surface dont la corde, sous-tendant l'arc formé par la section médiane, fait un angle variable  $i$  avec la direction du flux (fig. 12).

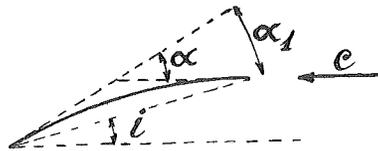


Fig. 12

$\alpha_1$  étant l'angle de la corde avec la tangente à la face dorsale, on voit que ce que nous avons appelé l'angle de déviation  $\alpha$  devient égal à

$$\alpha = \alpha_1 + i.$$

Mais est évident que pour  $i$  égal à zéro, par exemple, le flux n'est pas dévié d'un angle  $\alpha_1$ ; il se produit bien une forte dépression au bord d'attaque, mais la direction des filets à la sortie est peu différente de la direction à l'entrée et l'on constate que

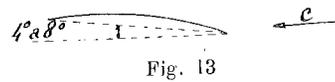


Fig. 13

pour un angle  $i$  négatif de 4 à 8° suivant la valeur de  $\alpha_1$  et du profil de la section, la poussée devient nulle (fig. 13). Appelons  $\gamma$  l'angle  $i$  pour lequel la poussée  $P$  est nulle, et désignons par  $\alpha$ , l'angle ( $i + \gamma$ ).

$$\alpha = i + \gamma \tag{6}$$

Déterminons, comme nous l'avons fait pour la surface plane, la variation  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  en fonction de l'angle  $\alpha$  ainsi défini, puis celle de  $\frac{T'}{T}$ .

Le tableau II donne les valeurs calculées pour deux plaques courbes :

- l'une A de 0 m 50 x 0 m 30 avec  $\alpha_1 = 10^\circ$
- l'autre de 0 m 90 x 0 m 15 avec  $\alpha_1 = 16^\circ 5'$ .

TABLEAU II.

$i$	EXPÉRIENCES DE M. RATEAU plaque de 0m50 x 0m30										EXPÉRIENCES DE M. EIFFEL plaque de 0m90 x 0m15				
	Expér. A	Expér. B	$\alpha$	$\sin \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\frac{\alpha}{2}$	$\sin^2 \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \sin 2\alpha$	$\frac{\delta}{2g}$	$\frac{\delta}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$	$k_y$	$k_x$	$\frac{r_2 - r_1}{a} = e$	$\frac{T'}{T}$
-3°			1°	0,0174	0,0349	0,00871	0,000075	0,00230	0,0000198	0,0031	0,0031	0,0042	0,0063	1,83	174
-2			2	0,0349	0,698	0,0174	0,000302	0,00461	0,0000776	0,0064	0,0064	0,0084	0,0055	1,82	38
			4	0,0698	0,1392	0,0349	0,001217	0,00917	0,000321	0,0128	0,0128	0,0170	0,0040	1,85	6,75
			6	0,1045	0,2079	0,0523	0,002740	0,01371	0,000722	0,0194	0,0194	0,0260	0,0032	1,89	2,35
			8	0,1392	0,2756	0,0698	0,00487	0,01830	0,001285	0,0250	0,0250	0,0340	0,0029	1,87	1,21
			10	0,1736	0,3420	0,0872	0,00760	0,02226	0,00200	0,0312	0,0312	0,0428	0,0033	1,89	0,575
			15	0,2588	0,5000	0,1305	0,01705	0,03330	0,00449	0,0450	0,0450	0,0614	0,0066	1,86	0,79
			20	0,3420	0,6428	0,1736	0,03015	0,04424	0,00795	0,0566	0,0566	0,0740	0,0128	1,75	0,92
			25	0,4226	0,7660	0,2164	0,04690	0,0506	0,01137	0,0650	0,0650	0,0900	0,0192	1,58	1,12
			35	0,5736	0,9397	0,3007	0,09000	0,0620	0,02378	0,0850	0,0850	0,1200	0,0310	1,02	1,28
			45	0,7071	1,0000	0,3820	0,1450	0,0660	0,03850	0,0501	0,0501	0,0760	0,0430	0,88	1,24
			60	0,8660	0,8660	0,5000	0,2500	0,0471	0,06595	0,0380	0,0380	0,0560	0,0555	0,97	0,87

Nous avons porté, en fonction de  $\sin \frac{\alpha}{2}$  (fig. 14), les valeurs de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$  et de  $\frac{T'}{T}$ . Les courbes pointillées se rapportent aux valeurs de  $\frac{r_1 - r_2}{a}$ ; les points noirs correspondent aux valeurs expérimentales trouvées pour la plaque de  $0,90 \times 0,15$  m.

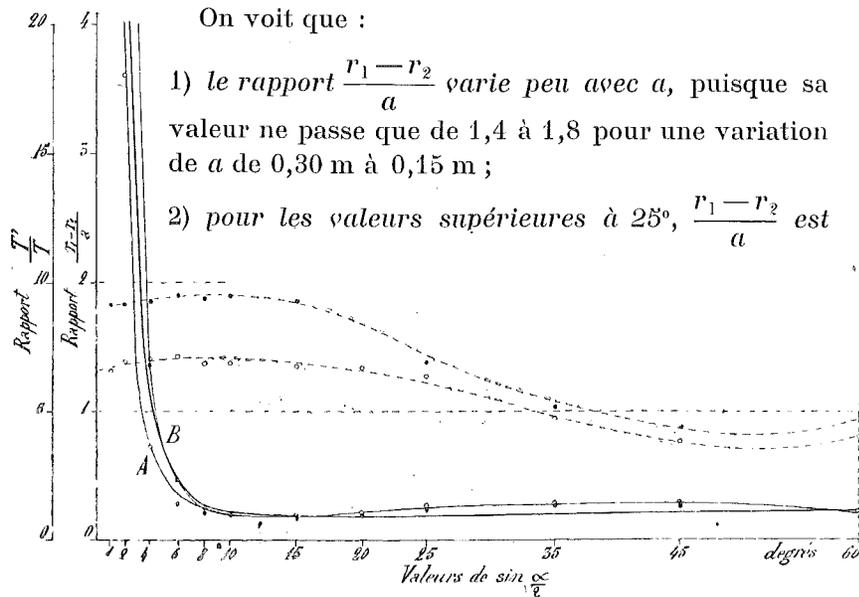


Fig. 14

sensiblement constant, pour un même angle, quelle que soit la valeur de  $a$ , mais varie avec cet angle ;

3) les valeurs de  $\frac{T'}{T}$  diminuent avec la valeur de  $\frac{l}{a}$ , rapport de l'auvergure  $l$  à la longueur  $a$ , mais moins que dans le cas des plaques planes ;

4) au-dessus de  $4^\circ$ , les valeurs du rapport  $\frac{T'}{T}$  sont

sensiblement plus faibles pour un même angle  $\alpha$ , que dans le cas des plaques planes, ce qui explique la supériorité des surfaces courbes.

Les courbes A et B de la fig. 14 répondent mieux à une équation de la forme

$$\frac{T'}{T} = \frac{k_1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{k_2}{\sin \frac{\alpha}{2}} + k_3 \quad \text{V}$$

La courbe tracée en trait fort correspond aux coefficients suivants :

$$k_1 = 0,010 \quad k_2 = 0,14 \quad k_3 = 1,4$$

(Les courbes A et B coïncident sensiblement entre  $\alpha = 8^\circ$  et  $\alpha = 60^\circ$ .)

### CHAPITRE III.

#### Théorie des hélices propulsives.

##### § 4. — Théorie élémentaire des hélices au point fixe.

Soit  $yy'$  (fig. 15) l'axe d'une hélice représentée en projection horizontale ; soit  $ef$  la projection d'un élément à la distance  $R$  de l'axe, incliné d'un angle  $\alpha$  sur la direction  $xx'$  perpendiculaire à l'axe de rotation.

Supposons que l'hélice fonctionne au point fixe et soit  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation. La vitesse  $u$  de l'élément sera égale à  $\omega R$  et la vitesse du flux d'air par rapport à celui-ci, c'est-à-dire la vitesse relative  $\omega_0$ , sera égale et de signe contraire à  $u$ .

Sous l'action de l'élément  $ef$ , le flux sera dévié d'un angle  $\alpha$  sur la direction primitive, et la vitesse relative à la sortie  $\omega_1$ , sera tangentielle à  $ef$ . Si nous faisons abstraction de la perte de vitesse toujours

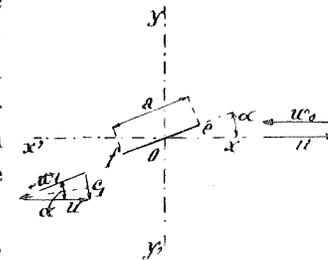


Fig. 15

très faible, résultant du choc au bord d'attaque et des frottements sur les faces de l'élément  $ef$ , nous aurons :

$$\omega_1 = \omega_0;$$

en construisant le triangle des vitesses avec  $\omega_1$  et  $u$  comme côtés, nous obtiendrons la vitesse absolue  $c_1$  de sortie.

D'après ce que nous avons vu [équation (1)], nous aurons pour expression de la poussée.

$$P = M u \sin \alpha = M c_1 \quad (7)$$

puisque dans le triangle isocèle formé par  $u$  et  $\omega_1$

$$c_1 = 2 u \sin \frac{\alpha}{2}$$

et que dans les limites de l'approximation nécessaire, on peut poser, tout au moins pour les faibles valeurs de  $\alpha$ ,

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \quad \text{et} \quad c_1 = u \sin \alpha$$

Pour déterminer la valeur du travail absorbé par seconde, nous n'aurons qu'à appliquer l'équation (2)

$$\tilde{\mathcal{C}} = T \times u = 2 M u^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

ce qui revient à

$$\tilde{\mathcal{C}} = \frac{M c_1^2}{2} \quad (8)$$

en tenant compte de la relation ci-dessus

Les formules (7) et (8) sont identiques à celles que l'on obtient en partant du théorème des quantités de mouvements pour évaluer la poussée, et du théorème des faces vives pour évaluer le travail.

Lorsqu'on admet, comme on le fait quelquefois

$$T = M u \sin^2 \alpha$$

on trouve pour  $\tilde{\mathcal{C}}$  une valeur double de la précédente :

$$\tilde{\mathcal{C}} = M c_1^2$$

On a longuement discuté cette question du coefficient 2, dans l'expression du rapport

$$\frac{P}{\tilde{\mathcal{C}}} = E$$

qui représente la poussée par unité de puissance.

Lorsqu'on part des équations (7) et (8), on trouve, en effet,

$$\frac{P}{\tilde{\mathcal{C}}} = \frac{2}{c_1} \quad (9)$$

alors qu'en adoptant pour  $T$  la valeur

$$M u \sin^2 \alpha,$$

on obtient

$$\frac{P}{\tilde{\mathcal{C}}} = \frac{1}{c_1}.$$

On a discuté cette question d'autant plus longuement que le travail  $\tilde{\mathcal{C}}'$  réellement absorbé paraît être le double environ du travail théorique  $\tilde{\mathcal{C}}$ , dans certaines expériences faites sur des hélices au point fixe.

La formule

$$T = M u \sin^2 \alpha$$

n'ayant aucune base théorique, il serait absurde de vouloir s'en servir pour établir que *théoriquement* on doit admettre :

$$\tilde{\mathcal{C}} = M c_1^2$$

Les valeurs expérimentales du rapport  $\frac{T'}{T}$  calculées dans le tableau I, montre que la traînée réelle  $T'$ , est toujours sensiblement plus grande que la traînée théorique  $T$  dans le cas d'une *plaque plane*, et que par conséquent

$$\tilde{\mathcal{C}}' = T \times u = \frac{M c_1^2}{2} \times K$$

ou  $K$  est un coefficient voisin de 1,5.

REMARQUE. — Il y a lieu de faire remarquer que contrairement à ce que l'on croit généralement, la vitesse absolue  $c_1$ , de sortie ne doit pas être *théoriquement* dirigée suivant l'axe de l'hélice, mais obliquement par rapport à celui-ci, comme le montre la construction du triangle des vitesses à la sortie (fig. 15).

L'inclinaison de la vitesse absolue de sortie sur l'axe, est d'autant plus grande que  $\alpha$  est plus grand, et que la perte de vitesse relative, due au frottement et aux chocs, est plus grande. Les expériences de M. Riabouchinsky montrent que dans la réalité, il en est bien ainsi.

§ 5. — Théorie de l'hélice en mouvement de translation suivant l'axe. — Formules fondamentales.

Soit encore  $yy'$  (fig. 16) l'axe d'une hélice représentée en projection horizontale; soit  $ef$  un élément d'une des pales de celle-ci de hauteur  $dR$ , de longueur  $a$ , situé à la

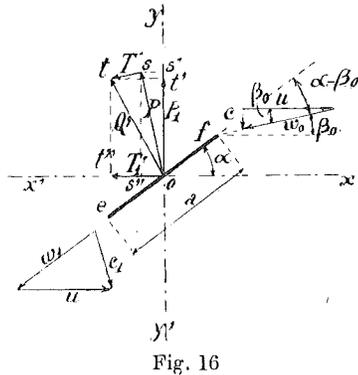


Fig. 16

distance  $R$  de l'axe. Appelons  $\alpha$  l'angle de l'élément  $ef$  avec la direction  $xx'$ , perpendiculaire à l'axe.

Supposons que l'hélice se déplace suivant son axe, avec une vitesse  $c$  et soit animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire  $\omega$ . La vitesse relative  $\omega_0$  du flux par rapport à l'élément sera donnée par le

triangle des vitesses construit sur  $c$  et sur  $u = \omega R$ , et l'angle de déviation du flux par l'élément sera, non plus  $\alpha$ , mais  $(\alpha - \beta_0)$ .

La vitesse relative  $\omega_1$ , à la sortie sera un peu plus faible que  $\omega_0$ , mais cette différence pourra être négligée, et le triangle des vitesses construit sur  $\omega_1$  et sur  $u$ ,

comme côtés, donnera la vitesse absolue  $c_1$  en grandeur et en direction.

La composante  $P$  de l'action du flux sur l'élément, composante qui est perpendiculaire à la direction de ce flux, c'est-à-dire dans ce cas à  $\omega_0$ , étant représentée par  $os$ , la résistance réelle à l'avancement ou trainée  $T$ , étant représentée par  $st$ , la résultante totale de l'action du flux sera égale à  $Q' = ot$ .

Appelons  $P_1$  et  $T_1'$  les deux composantes de  $Q'$  dirigées l'une suivant l'axe  $yy'$  de l'hélice, et l'autre suivant la perpendiculaire  $xx'$  à cette direction; nous aurons

$$P_1 = ot' - s't' = P \cos \beta_0 - T' \sin \beta_0. \quad (10)$$

$$T_1' = os'' + s''t'' = P \sin \beta_0 + T' \cos \beta_0. \quad (11)$$

Or, l'effort de *puissance* ou de *traction* fournie par l'une des pales de l'hélice ne sera rien d'autre que la somme des valeurs de  $P_1$  pour tous les éléments de cette pale, de même que la puissance absorbée correspondante, sera fournie par l'intégrale

$$\mathcal{E}' = \int_0^1 \omega R dT_1',$$

$dT_1'$  représentant la valeur élémentaire de  $T_1'$ , pour une portion de pale de hauteur  $dR$ .

Les valeurs de  $P$  et de  $T'$  sont fournies, en fonctions des données de la question par les formules II', III et V.

Cependant pour ne pas nous heurter à des difficultés insurmontables, nous emploierons la formule II au lieu de II', pour évaluer  $P$ ; les deux donnent des valeurs sensiblement les mêmes jusqu'à  $20^\circ$ , et dans les environs du rendement maximum des hélices, les angles d'attaque sont toujours plus faibles que  $20^\circ$ .

Pour les hélices fonctionnant au point fixe, l'erreur résultant de ce chef sera d'autant plus importante que le pas  $p$  sera plus grand, et pour nous rendre compte de la

différence, nous calculerons au paragraphe 10, pour ce cas particulier, la poussée  $P_1$ , en partant de la formule II'. Cette manière de procéder permettra de lever tout doute sur l'exactitude et sur la valeur des formules obtenues.

En tenant compte de cette remarque et en observant 1° que la valeur de  $l$  de la formule est égale à  $dR$ ;

2° que la valeur  $c$  de la vitesse du flux doit être remplacée ici par  $\omega_0$ , et l'angle d'attaque  $\alpha$  par  $(\alpha - \beta_0)$ ;

3° que, d'autre part, on peut admettre sans trop d'erreur, que  $a$  varie proportionnellement à  $R$  et que, par conséquent

$$\boxed{(r_1 - r_2) = e \times a = kR} \quad (12)$$

il viendra

$$\begin{aligned} P_1 &= k \frac{\delta}{g} \left[ \int_0^1 \omega_0^2 \sin(\alpha - \beta_0) \cos \beta_0 R dR \right. \\ &- 2 \int_0^1 \left( k_1 - k_2 \sin \frac{\alpha - \beta_0}{2} + k_3 \sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2} \right) \omega_0^2 \sin \beta_0 R dR \left. \right] \\ \mathcal{C}' &= k \frac{\delta \omega}{g} \left[ \int_0^1 \omega_0^2 \sin(\alpha - \beta_0) \sin \beta_0 R^2 dR \right. \\ &+ 2 \int_0^1 \left( k_1 - k_2 \sin \frac{\alpha - \beta_0}{2} + k_3 \sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2} \right) \omega_0^2 \cos \beta_0 R^2 dR \left. \right] \end{aligned}$$

REMARQUE. — Dans ces relations 0 et 1, sont mis pour  $R_0$  et  $R_1$ , rayons intérieurs et extérieurs limitant la pale. Pour obtenir les formules correspondant à l'hélice dont les sections des pales se présentent comme un plan mince, ou avec un profil symétrique, tel que celui de la fig. 5, il suffit de faire  $k_2 = 0$ , puisque nous avons vu que dans ce cas le rapport  $\frac{T'}{T}$  est donné par la formule IV.

Pour pouvoir faire les intégrations, il faut chercher à

exprimer  $\omega_0$ ,  $\sin(\alpha - \beta_0)$ ,  $\sin \frac{\alpha - \beta_0}{2}$ ,  $\sin \beta_0$ ,  $\cos \beta_0$  en fonction de  $R$ . Pour cela remarquons que

$$1^\circ \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{c}{u} = \frac{c}{\omega R}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{2\pi R}, \quad \omega_0^2 = c^2 + \omega^2 R^2;$$

$p$  désignant le pas de l'hélice, défini comme nous l'avons fait au chapitre I,  $\omega$  étant la vitesse angulaire ;

$$2^\circ \quad \sin(\alpha - \beta_0) \cos \beta_0 = \sin \alpha \cos^2 \beta_0 - \cos \alpha \sin \beta_0 \cos \beta_0$$

$$\sin(\alpha - \beta_0) \sin \beta_0 = \sin \alpha \sin \beta_0 \cos \beta_0 - \cos \alpha \sin^2 \beta_0$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta_0}{2} = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta_0) \quad (\text{approximativement})$$

$$\sin^2 \frac{\alpha - \beta_0}{2} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos(\alpha - \beta_0) \right] = \frac{1}{2} [1 - \cos \alpha \cos \beta_0 - \sin \alpha \sin \beta_0]$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{P}{2\pi R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{2\pi R}\right)^2}} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{2\pi R}\right)^2}}$$

$$\sin \beta_0 = \frac{\frac{c}{\omega R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}} \quad \cos \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega R}\right)^2}}$$

Nous aurons, toutes réductions faites, les deux formules

$$\begin{aligned} P_1 &= k \frac{\delta}{g} \omega^2 \left\{ \left( \frac{P}{2\pi} - \frac{c}{\omega} + k_3 \frac{c}{\omega} \right) \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \right. \\ &- (2k_1 + k_3) \frac{c}{\omega} \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR \\ &+ k_2 \left[ \frac{P}{2\pi} \frac{c}{\omega} - \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR \\ &\left. + k_3 \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \left( \frac{P}{2\pi} \right) \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{P}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}' = k \frac{\delta}{g} \omega^3 \left\{ \frac{c}{\omega} \left[ \frac{p}{2\pi} - \frac{c}{\omega} \right] - k_3 \frac{c}{\omega} \frac{p}{2\pi} \right\} \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \\ + (2k_1 + k_3) \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR \\ - k_2 \left[ \frac{p}{2\pi} - \frac{c}{\omega} \right] \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR \\ - k_3 \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

## § 6. — Résolution des intégrales.

Résolvons séparément les intégrales ci-dessus :

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR; \\ \text{II.} \quad & \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR; \quad \text{III.} \quad \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR \\ \text{IV.} \quad & \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR; \quad \text{V.} \quad \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR \\ \text{VI.} \quad & \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR; \quad \text{VII.} \quad \int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR \end{aligned}$$

Pour simplifier les transcriptions, nous écrivons :

$$R_0 = n R_1, \quad \frac{p}{2\pi R_1} = m, \quad \frac{c}{\omega R_1} = x$$

## Intégrale I.

$$\text{En posant} \quad R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 = t^2,$$

nous aurons :

$$R dR = t dt, \quad \int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR = \int t^{-1} \times t dt = t$$

D'où

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R dR = R_1 \left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

## Intégrale II.

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR = \int \left[ 1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} R dR.$$

Posons

$$1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} = t^2;$$

$$\text{il viendra} \quad dR = - \frac{R^5}{\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2} t dt$$

$$\text{et} \quad R^2 = \frac{\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2}{t^2 - 1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int \left[ 1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} R dR = \\ - \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2} = \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \int \frac{(t^2 - 1 - t^2) dt}{(t^2 - 1)^2} \\ = \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{dt}{t^2 - 1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{t - 1}{t + 1} \\ \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^2} = \int t \frac{t dt}{(t^2 - 1)^2} = - \frac{t}{2} (t^2 - 1)^{-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 1} \end{aligned}$$

(pour cette dernière, en intégrant par partie, et en écrivant  $u = t \quad d\varphi = \frac{t dt}{(t^2 - 1)^2}$ )

Donc

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR = \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \left[ \frac{1}{4} l \frac{t-1}{t+1} + \frac{t}{2} (t^2-1)^{-1} \right]$$

et comme

$$\left[ \frac{t-1}{t+1} \right]_1 = \frac{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}+1}, \quad \left[ \frac{t-1}{t+1} \right]_0 = \frac{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}-n}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}+n}$$

$$\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \frac{t}{2} (t^2-1)^{-1} = \frac{t}{2} R^2$$

il viendra finalement

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^2 dR = \frac{1}{2} R_1^2 f_1(m)$$

où

$$f_1(m) = \frac{m^2}{2} l \frac{\left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}}-1 \right] \left[ (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}+n \right]}{\left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}}+1 \right] \left[ (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}-n \right]} + (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - n^2 (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

### Intégrale III.

En posant  $R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 = t^2$ , nous aurons :

$$R dR = t dt, \quad \int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR = \frac{1}{3} t^3 - \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 t$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR = R_1^3 f_2(m)$$

$$f_2(m) = \frac{1}{3} \left[ (1+m^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2+m^2)^{\frac{3}{2}} \right] - m^2 \left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - n^2 (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

### Intégrale IV.

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = \int \left[ 1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} R^3 dR$$

Posons

$$1 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 R^{-2} = t^2;$$

il viendra

$$dR = - \frac{R^5}{\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2} t dt, \quad R^2 = \frac{\left( \frac{p}{2\pi} \right)^2}{t^2-1},$$

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = - \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{dt}{(t^2-1)^3}$$

$$= \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{(t^2-1-t^2) dt}{(t^2-1)^5}$$

$$= \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} - \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^5}.$$

Or

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^5} = \frac{1}{2} \int t \frac{2t dt}{(t^2-1)^5} = - \frac{t}{4} (t^2-1)^{-2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t^2-1)^2}$$

en intégrant par partie, et en écrivant

$$u = t \quad dv = \frac{2t dt}{(t^2-1)^3}.$$

Donc

$$\int \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = \left( \frac{p}{2\pi} \right)^4 \left[ \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} + \frac{t}{4} (t^2-1)^{-2} \right]$$

et comme nous avons trouvé, page 31, que

$$- \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 \frac{dt}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{2} R_1^2 f_1(m)$$

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^4 dR = \frac{3}{8} R_1^4 \left\{ - m^2 f_1(m) + \frac{2}{3} \left[ (1+m^2)^{\frac{1}{2}} - n^2 (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

## Intégrale V.

En posant  $R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = t^2$

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR = \frac{t^5}{5} - 2 \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \frac{t^3}{3} + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^4 t$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} R^5 dR = R_1^5 f_3(m)$$

où  $f_3(m)$  a pour valeur :

$$f_3(m) = \frac{1}{5} \left[ (1 + m^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{5}{2}} \right] - \frac{2}{3} m^2 \left[ (1 + m^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}} \right] + m^4 \left[ (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

## Intégrale VI.

Cette intégrale se résout directement, car elle est de la forme  $\int x^m dx$

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR = \frac{1}{3} \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R dR = \frac{R_1^3}{3} \left[ (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \right]$$

## Intégrale VII.

En posant  $R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 = t^2$

il viendra

$$\int \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR = \int t \left[ t^2 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right] t dt = \frac{t^5}{5} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{t^3}{3}$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \left[ R^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R^3 dR = R_1^3 \left\{ \frac{1}{5} \left[ (1 + x^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{5}{2}} \right] - \frac{x^2}{3} \left[ (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}$$

§ 7. — Expression de la poussée  $P$ , du travail absorbé  $\mathcal{C}'$  et du rendement  $\eta$ .

En introduisant les formules (13) et (14), les valeurs que nous venons de trouver pour les intégrales, nous aurons toutes réductions faites :

$$P_1 = k \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^4 \alpha_1 \quad \text{VI}$$

$$\mathcal{C}' = k \frac{\delta}{g} \omega^3 R_1^5 \beta_1 \quad \text{VII}$$

$\alpha_1$  et  $\beta_1$  étant des fonctions de  $m$  et de  $x$ , c'est-à-dire du rapport du pas à la circonférence du cercle balayé par l'hélice, et du rapport de la vitesse de propulsion à la vitesse périphérique.

Dans ces formules

$$\alpha_1 = m f_2(m) + \left[ (k_3 - 1) f_2(m) + \frac{1}{2} k_2 m f_1(m) \right] x - \left[ \frac{1}{2} k_2 f_1(m) - k_3 m b \right] x^2 - (2k_1 + k_3) \frac{x}{3} c_x \quad (15)$$

$$\beta_1 = -k_3 f_3(m) - \frac{3}{8} k_2 m \left[ \frac{2}{3} a - m^2 f_1(m) \right] - \left[ (k_3 - 1) m f_2(m) - \frac{3}{8} k_2 \left( \frac{2}{3} a - m^2 f_1(m) \right) \right] x - f_2(m) x^2 + (2k_1 + k_3) \left[ \frac{1}{5} d_x - \frac{x^2}{3} c_x \right] \quad (16)$$

les lettres  $a, b, c, d, c_x$  et  $d_x$  ayant pour valeur :

$$\begin{aligned} a &= (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} & a_1 &= (n^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \\ b &= (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} = a - a_1 \\ c &= (1 + m^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}} \\ d &= (1 + m^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2 + m^2)^{\frac{5}{2}} \\ c_x &= (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \\ d_x &= (1 + x^2)^{\frac{5}{2}} - (n^2 + x^2)^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

D'autre part, les fonctions  $f_1(m)$ ,  $f_2(m)$  et  $f_3(m)$  peuvent s'écrire avec les notations ci-dessus

$$f_1(m) = \frac{m^2}{2} l \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a_1+n}{a_1-n} + (a-n^2 a_1)$$

$$f_2(m) = \frac{1}{3} c - m^2 b$$

$$f_3(m) = \frac{1}{5} d - \frac{2}{3} m^2 c + m^4 b$$

Par définition le rendement de l'hélice est égal à

$$\eta = \frac{P_1 \times c}{\mathcal{C}'} = \frac{P_1 \times x \omega R_1}{\mathcal{C}'}$$

puisque

$$x = \frac{c}{\omega R_1}.$$

En remplaçant  $P_1$  et  $\mathcal{C}'$  par les valeurs VI et VII, il viendra :

$$\eta = \frac{\alpha_1 x}{\beta_1} \quad \text{VIII}$$

### § 8. — Conclusions.

Les formules VI et VII montrent que les deux relations proposées par tous les auteurs

$$P_1 = \alpha N^2 D^4 \quad (17)$$

$$\mathcal{C}' = \beta N^5 D^5 \quad (18)$$

pour les hélices au point fixe, ne sont que des cas particuliers des formules générales se rapportant aux hélices en translation suivant l'axe.

De la formule VIII il résulte que toutes les hélices géométriquement semblables ont le même rendement, pour la même valeur du rapport de la vitesse propulsion à la vitesse périphérique.

REMARQUE I. — N désignant le nombre de tours par seconde, nous aurons entre  $\alpha$  et  $\alpha_1$ ,  $\beta$  et  $\beta_1$  les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{1}{16} k \frac{\delta}{g} (2\pi)^2 \alpha_1 \quad (19)$$

$$\beta = \frac{1}{32} k \frac{\delta}{g} (2\pi)^3 \beta_1 \quad (20)$$

Si N désignait le nombre de tours par minute, il faudrait remplacer  $2\pi$  par  $\frac{2\pi}{60}$ .

REMARQUE II. — Pour le fonctionnement au point fixe, les valeurs  $\alpha_1$  fournies par la relation (15) s'écartent d'autant plus des valeurs théoriques réelles, que le pas  $p$  est plus grand. Cela résulte de ce que nous avons adopté pour calculer P, la formule II au lieu de la formule II', ainsi que nous l'avons fait remarquer au début du paragraphe 5. Nous avons, au paragraphe 10, calculé, en partant de la formule II', la valeur théorique réelle de  $\alpha_1$ , pour le cas particulier du fonctionnement au point fixe, c'est-à-dire pour  $x=0$ . Dans le tableau III, ci-après, nous avons consigné les valeurs de  $\alpha_1$  calculées au moyen de la nouvelle formule, pour différentes valeurs de  $m$ . Il y aura donc lieu, lorsqu'on étudiera le fonctionnement des hélices au point fixe, d'adopter pour  $\alpha_1$ , les valeurs du tableau III

$$\alpha_1 = m f_4(m),$$

au lieu de celles données par la formule (15)

$$\alpha_1 = m f_2(m).$$

REMARQUE III. — Entre le rapport  $\frac{P}{D}$  que les auteurs ont ordinairement désigné par  $m$  ou par  $a$ , et la valeur  $\frac{P}{2\pi R_1}$  que nous avons représentée également par  $m$ , il existe la relation

$$\frac{P}{D} = \frac{P}{2\pi R_1} \times \pi = m \times \pi. \quad (21)$$

TABLEAU III.

$x$ ou $m$	$x^2$ ou $m^2$	$m b$	$f_1(m)$	$f_2(m)$	$m f_2(m)$	$f_3(m)$	$f_4(m)$	$m f_4(m)$	$\frac{2}{3} a - m^2 f_1(m)$	$\frac{1}{3} x c_x$	$\frac{1}{5} d_x - \frac{x^2}{3} c_x$
0,000	0,000000	0,000000	1,000	0,333333	0,000000	0,200000	0,3333	0,000000	0,6666	0,000000	0,200000
0,050	0,002500	0,047562	0,992	0,332160	0,016608	0,199560	0,3310	0,016550	0,6650	0,016727	0,200390
0,075	0,005625	0,063585	0,985	0,330770	0,024807	0,199060	0,3283	0,024620	0,6630	0,025199	0,200920
0,100	0,010000	0,090500	0,982	0,328960	0,032896	0,198370	0,3248	0,032480	0,6602	0,033801	0,201656
0,125	0,015625	0,110260	0,963	0,327080	0,040885	0,197450	0,3204	0,040050	0,6563	0,042607	0,202560
0,150	0,022500	0,129180	0,953	0,324140	0,048621	0,196440	0,3157	0,047355	0,6525	0,051528	0,203700
0,175	0,030625	0,147035	0,940	0,321120	0,056213	0,195190	0,3103	0,054302	0,6481	0,060719	0,205030
0,200	0,040000	0,163960	0,928	0,318060	0,063612	0,193784	0,3043	0,060860	0,6428	0,070170	0,206506
0,225	0,050625	0,180000	0,914	0,314670	0,070800	0,192260	0,2981	0,067032	0,6368	0,079913	0,208190
0,250	0,062500	0,195200	0,900	0,311060	0,077765	0,190620	0,2913	0,072825	0,6309	0,089965	0,210060
0,275	0,075625	0,209570	0,887	0,307290	0,084504	0,188850	0,2848	0,078320	0,6244	0,100353	0,212080
0,300	0,090000	0,223200	0,871	0,303370	0,091011	0,186960	0,2779	0,083370	0,6176	0,111099	0,214260
0,325	0,105625	0,236110	0,857	0,299340	0,097285	0,185000	0,2707	0,087970	0,6106	0,122222	0,216620
0,350	0,122500	0,248320	0,842	0,295320	0,103327	0,182960	0,2640	0,092400	0,6031	0,133745	0,219130
0,375	0,140625	0,259870	0,827	0,291030	0,109136	0,180830	0,2570	0,096375	0,5957	0,145680	0,221780
0,400	0,160000	0,270800	0,814	0,286800	0,114720	0,178690	0,2490	0,099600	0,5880	0,158048	0,224580
0,450	0,202500	0,290970	0,785	0,278240	0,125208	0,174230	0,2355	0,105970	0,5725	0,184126	0,230580
0,500	0,250000	0,309000	0,758	0,268680	0,134840	0,169070	0,2221	0,111050	0,5555	0,212090	0,237100
0,550	0,3025	0,325210	0,731	0,261180	0,143649	0,165050	0,2084	0,114620	0,5401	0,242022	0,244060
0,600	0,3600	0,339720	0,705	0,253840	0,152304	0,160410	0,1964	0,117840	0,5237	0,274002	0,251430
0,700	0,4900	0,364400	0,656	0,236780	0,164746	0,151320	0,1732	0,121240	0,4924	0,344844	0,267240
0,800	0,6400	0,384000	0,609	0,222140	0,177712	0,142400	0,1525	0,122000	0,4641	0,423472	0,281560
0,900	0,8100	0,400800	0,552	0,207930	0,187137	0,134340	0,1342	0,120780	0,4498	0,511830	0,302760
1,000	1,0000	0,414200	0,533	0,193270	0,195270	0,126520	0,1193	0,119300	0,4098	0,609470	0,321790

§ 9. — Courbes de rendement. — Angle d'attaque le plus favorable.  
Influence du profil des pales.

Nous supposons dans ce qui va suivre, que le rayon intérieur  $R_0$  limitant la pale est nul, ce qui est sensiblement le cas pour les hélices en bois; nous examinons plus loin l'influence du rapport  $n = \frac{R_0}{R_1}$  sur le rendement de l'hélice.

Pour simplifier les calculs, nous avons dressé le tableau III des valeurs de

$$f_1(m), f_2(m), f_3(m), \text{ etc.},$$

pour les valeurs de  $m$  comprises entre 0 et 1, ainsi que les valeurs de

$$\frac{1}{3} x c_x \quad \text{et de} \quad \left( \frac{1}{5} d_x - \frac{x^2}{3} c_x \right)$$

pour les valeurs de  $x$  comprises également entre 0 et 1,  $n$  étant supposé nul.

A. — Profil droit.

Déterminons d'abord les courbes de rendement correspondant à un profil assimilable à un plan mince ou à un fuseau symétrique comme celui de la fig. 5.

Nous avons vu que pour ce cas, les coefficients  $k_2$  et  $k_3$  paraissent avoir, pour valeurs minima,

$$k_1 = 0,003, \quad k_3 = 1,5,$$

$k_2$  étant nul.

Nous avons tracé fig. 17 (Pl. 1) les courbes de rendement en fonction de  $x = \frac{c}{\omega R_1}$ , pour  $m$  égal à

$$0,1, \quad 0,2, \quad 0,3, \quad 0,4, \quad 0,5,$$

$k_1$  et  $k_3$  ayant les valeurs ci-dessus.

On voit que la courbe enveloppe de toutes les courbes de rendement, passe par un maximum, et que ce maximum maximum ne dépasse pas 0,74.

Fig. 18, nous avons tracé, en fonction de  $m$ , la courbe des valeurs du rendement maximum, et en pointillés, la courbe des valeurs de

$$(m - x_m),$$

$x_m$  désignant la valeur de  $x$  correspondant au rendement maximum. Nous désignerons par la suite cette quantité sous le nom de recul relatif.

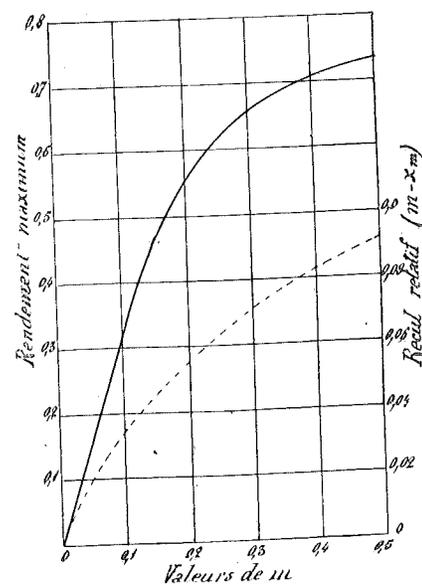


Fig. 18

Calculons les valeurs de l'angle d'attaque  $(\alpha - \beta_0)$  à l'extrémité de l'aile, qui correspondent au rendement maximum pour les différentes valeurs de  $m$ ; remarquons pour cela que

$$\operatorname{tg} \alpha = m, \quad \operatorname{tg} \beta_0 = x,$$

et que par conséquent

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{m - x}{1 + m x}.$$

Pour

$$\begin{aligned} m = 0,1 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,035}{1 + 0,1 \times 0,065} = 0,0348, & (\alpha - \beta_0) = 2^{\circ}0' \\ m = 0,2 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,055}{1 + 0,2 \times 0,145} = 0,0534, & (\alpha - \beta_0) = 3^{\circ}03' \\ m = 0,3 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,071}{1 + 0,3 \times 0,229} = 0,0663, & (\alpha - \beta_0) = 3^{\circ}48' \\ m = 0,4 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,083}{1 + 0,4 \times 0,317} = 0,0737, & (\alpha - \beta_0) = 4^{\circ}13' \\ m = 0,5 & \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta_0) = \frac{0,091}{1 + 0,5 \times 0,409} = 0,0755, & (\alpha - \beta_0) = 4^{\circ}19' \end{aligned}$$

REMARQUE I. — Contrairement à ce que l'on croit d'habitude, la poussée  $P_1$  et par conséquent le rendement deviennent nuls pour une valeur de  $x$  inférieure à  $m$ .

La différence entre les deux valeurs est d'autant plus grande que  $p$  est plus grand; elle est d'ailleurs toujours faible relativement à  $m$ .

Cette différence s'explique par le fait que la composante axiale  $s't'$  de la traînée (fig. 16) peut faire équilibre à un moment donné, à la composante axiale  $ot'$  de la poussée.

REMARQUE II. — Les valeurs calculées ci-dessus pour l'angle d'attaque  $(\alpha - \beta_0)$ , correspondent sensiblement aux valeurs déduites des expériences du capitaine Dorand sur les hélices en translation suivant l'axe. Elles sont par contre très différentes de celles que M. Drzewiecki, avait déduites d'une théorie qui fait autorité, et qui est ordinairement considérée, comme la plus complète. Le chiffre de  $1^{\circ}50'$  proposé par lui comme l'angle d'attaque le plus favorable et qui paraissait peu vraisemblable, est aujourd'hui reconnu erroné.

REMARQUE III. — Nous avons vu page 18, que pour une valeur  $\frac{l}{a}$ , rapport de l'envergure à la longueur  $a$ , voisine de 6, les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  prenaient des valeurs sensiblement supérieures à celles adoptées ci-dessus.

Le rapport  $\frac{l}{a}$  dans une pale d'hélice est assez mal défini puisque la largeur  $a$  varie avec le rayon  $R$ .

Dans le cas d'une pale tracée comme il est indiqué fig. 2, on pourrait prendre pour  $l$  la valeur  $(R_1 - 0,40 R_1)$ , et pour  $a$ , celle qui correspond à  $R = \frac{2}{3} R_1$ . On trouverait ainsi

$$\frac{l}{a} = \frac{0,6 R_1}{0,28 R_1} = 2,14.$$

Ce chiffre pourrait être adopté également pour le tracé de la fig. 1, car la partie centrale de l'hélice ne joue qu'un rôle peu important dans le fonctionnement de celle-ci.

Lorsque la largeur  $a$  de la pale diminue, le rapport  $\frac{l}{a}$  croît et par conséquent les valeurs de  $k_1$  et  $k_3$  augmentent. Il ne saurait être question de déterminer les valeurs de ces coefficients en fonction de  $\frac{l}{a}$ , sans faire des expériences sur une série d'hélices construites de la même manière, et où l'on ferait varier la largeur  $a$  ou le rapport  $\frac{a}{R}$ . Il nous suffira ici de faire observer que le rendement diminue avec la largeur  $a$ . Nous montrerons plus loin qu'il y a une valeur maximum de  $\frac{a}{R}$  à partir de laquelle le rendement tend à diminuer, par conséquent qu'il y a une valeur de  $\frac{a}{R}$  qui procure le maximum de rendement pour un profil donné.

REMARQUE IV. — Si nous faisons dans les formules  $k_1 = 0$ ,  $k_3 = 1$ , nous obtiendrions la valeur du rendement correspondant au cas limite de l'hélice fonctionnant

sans perte par frottement ou par choc. Les formules montrent que, dans cette hypothèse, le rendement est nul pour  $x = 0$  et égal à l'unité pour  $x = m$ , quelle que soit la valeur de  $m$ .

Si nous supposons que les seules pertes proviennent du frottement de l'air sur les pales, et des chocs au bord d'attaque, et si nous admettons que ces pertes soient proportionnelles au carré de la vitesse, la valeur de la traînée réelle  $T'$  qui a servi à calculer  $\mathcal{C}$  et le rendement  $\eta$ , sera donnée par la relation

$$T' = T + K c^2,$$

et par conséquent  $\frac{T'}{T}$  sera égal à

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{K}{T} c^2.$$

Or, nous pouvons toujours poser

$$K = 2 \frac{\delta}{g} l (r_1 - r_2) k_1.$$

Donc, en remplaçant  $T$  par sa valeur tirée de la formule III

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{k_1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

On voit que pour obtenir le rendement dans les hypothèses ci-dessus, il suffit de faire dans les formules VI, VII et VIII

$$k_3 = 1.$$

Nous avons tracé fig. 19 (Pl. 1) les courbes de rendement en fonction de  $x$ , pour

$$k_1 = 0,003 \quad k_3 = 1;$$

fig. 20 nous avons tracé, en fonction de  $m$ , la courbe des valeurs du rendement maximum, et en pointillé la courbe des valeurs du recul relatif correspondant.

Le maximum maximum atteint cette fois 0,80 environ; pour  $m = 0,3$  le rendement maximum passe de 0,65 à 0,70.

Les valeurs du recul relatif sont un peu plus grandes.

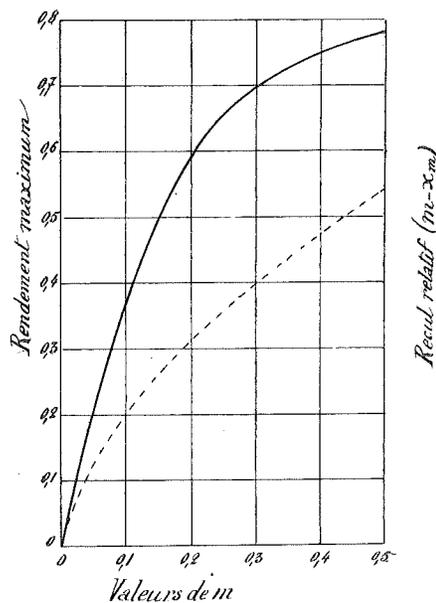


Fig. 20

## B. — Profil courbe.

Nous avons trouvé page 23, pour deux plaques courbes, expérimentées l'une par M. Rateau l'autre par M. Eiffel, les valeurs des coefficients

$$k_1 = 0,010 \quad k_2 = 0,140 \quad k_3 = 1,400$$

Adoptons ces coefficients pour le calcul du rendement des hélices à profil courbe.

Nous avons tracé fig. 21 (Pl. 1) les courbes correspondant à  $m$  égale

$$0,1, \quad 0,2, \quad 0,3, \quad 0,4, \quad 0,5,$$

en fonction de  $x$ .

Fig. 22, nous avons tracé en trait plein, en fonction de  $m$ , la courbe des valeurs du rendement maximum, en trait pointillé la courbe du recul relatif correspondant.

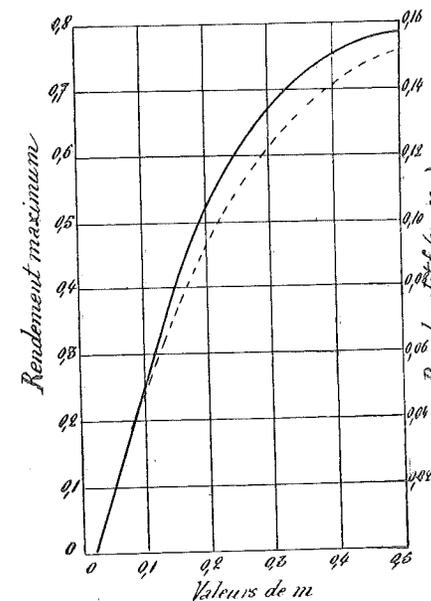


Fig. 22

Nous voyons en comparant ces résultats à ceux trouvés par le profil droit :

1) que le recul relatif correspondant au maximum est beaucoup plus grand; (1,7 environ les valeurs du diagramme de la fig. 17.)

2) que pour une même valeur de  $x$ , le rendement est plus élevé, tout au moins à partir de  $x = 0,15$  environ ;

3) que le rendement maximum est plus élevé à partir  $m = 0,25$ ;

4) que le maximum maximum est d'environ 0,79 et correspond probablement à  $x = 0,6$ .

REMARQUE I. Il est important de remarquer que dans le cas des profils courbes, le pas réel  $p$  à introduire dans la formule qui détermine  $m$

$$m = \frac{p}{2\pi R_1}$$

ne peut être déterminé en mesurant le pas de la corde sous-tendant le profil. En effet nous avons vu, dans les considérations de la page 21, que la poussée  $P$  ne devenait nulle, que pour un angle  $i = -\gamma$ .

Le pas réel serait donc donné par l'inclinaison d'une droite faisant un angle positif  $\gamma$  avec la corde.

Cet angle pourrait être déterminé très approximativement en faisant les expériences nécessaires pour déterminer le point où la courbe de poussée coupe l'axe des  $x$ ; la valeur de  $x$  correspondante est en effet sensiblement égale à  $m$ .

REMARQUE II. — Appelons  $p'$  le pas de la corde, et  $p$  le pas réel.

En posant

$$\operatorname{tg} i = \frac{p'}{2\pi R_1}$$

nous aurons :

$$m = \operatorname{tg}(i + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} i + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} i \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{p'}{2\pi R_1} + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \frac{p'}{2\pi R_1} \operatorname{tg} \gamma};$$

et, en appelant  $p''$  la valeur définie par la relation

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{p''}{2\pi R_1} \quad (22)$$

$$m = \frac{p}{2\pi R_1} = \frac{\frac{p'}{2\pi R_1} + \frac{p''}{2\pi R_1}}{1 - \frac{p'}{2\pi R_1} \frac{p''}{2\pi R_1}} \quad (23)$$

ou approximativement

$$m = \frac{p'}{2\pi R_1} + \frac{p''}{2\pi R_1} = \frac{p'}{2\pi R_1} + \operatorname{tg} \gamma.$$

Pour les nombreux profils essayés par M. Rateau et M. Eiffel,  $\gamma$  varie entre  $4^\circ$  et  $8^\circ$ . Si à défaut de renseignements plus précis, nous adoptons  $\gamma = 6^\circ$ , nous voyons que

$$m = \frac{p'}{2\pi R_1} + 0,1051.$$

Ainsi, pour un rapport

$$\frac{p'}{2\pi R_1} = 0,2 \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{2R_1} = \frac{p'}{D} = 0,628,$$

le rapport  $m$  à introduire dans les formules est

$$m = 0,3051 \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{2R_1} = \frac{p'}{D} = 0,957.$$

Comme il est fort probable que le pas indiqué par les expérimentateurs, est le pas apparent  $p'$  mesuré par l'inclinaison de la corde, on voit qu'il faudrait changer l'axe des abscisses des diagrammes fig. 21 et fig. 22 pour pouvoir comparer les résultats du calcul à ceux de l'expérience.

Avec la valeur  $\gamma = 6^\circ$ , le rendement maximum serait de

$$\begin{aligned} \eta &= 0,70 & \text{pour} & \frac{p'}{2\pi R_1} = 0,2 & \text{ou} & \frac{p'}{D} = 0,628. \\ \eta &= 0,75 & \text{pour} & \frac{p'}{2\pi R_1} = 0,3 & \text{ou} & \frac{p'}{D} = 0,942. \\ \eta &= 0,785 & \text{pour} & \frac{p'}{2\pi R_1} = 0,4 & \text{ou} & \frac{p'}{D} = 1,256. \end{aligned}$$

cette dernière valeur correspondant à peu près au maximum maximorum. Nous reviendrons plus loin sur ces résultats.

REMARQUE III. — Lorsqu'on construit une hélice de telle manière que le pas  $p'$  déterminé par la corde soit constant, on n'obtient pas une hélice à pas réel constant.

En effet, l'angle  $i$  de la corde à une distance  $R$  quelconque de l'axe est donné par l'équation

$$\operatorname{tg} i = \frac{p'}{2\pi R}$$

Si nous supposons que les différentes sections d'une pale soit telles que l'on puisse considérer  $\gamma$  comme constant et égal à  $6^\circ$ , nous aurons, d'après la relation (23),

$$\frac{p}{2\pi R} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (i + \gamma) = \frac{\frac{p'}{2\pi R} + \frac{p''}{2\pi R_1}}{1 - \frac{p'}{2\pi R} \frac{p''}{2\pi R_1}}$$

Pour  $\frac{p'}{2\pi R_1} = 0,3$  et  $R = 0,3 R_1$ , il vient :

$$\frac{p}{2\pi R} = \frac{1 + 0,1051}{1 - 0,1051} = \frac{1,1051}{0,8949} = 1,235;$$

d'où  $p = 1,235 \times 2\pi \times 0,3 R_1 = 2,33 R_1$ ,  
alors que pour  $R = R_1$

$$p = \frac{0,3 + 0,1051}{1 - 0,3 \times 0,1051} \times 2\pi R_1 = 2,63 R_1.$$

On voit que  $p$  diminue avec  $R$ , lorsque  $p'$  est constant, mais que cette diminution n'est pas relativement très grande pour les valeurs de  $\frac{p'}{2\pi R_1}$  supérieures à 0,2.

REMARQUE IV. — Si l'on calcule les angles d'attaque correspondant au maximum, on trouve pour

$m = 0,1$	$(\alpha - \beta_0) = 2^\circ 44'$
$m = 0,2$	$(\alpha - \beta_0) = 5^\circ 15'$
$m = 0,3$	$(\alpha - \beta_0) = 6^\circ 36'$
$m = 0,4$	$(\alpha - \beta_0) = 7^\circ 12'$
$m = 0,5$	$(\alpha - \beta_0) = 7^\circ 19'$

Ces angles sont beaucoup plus grands que ceux trouvés pour le profil droit.

Si nous évaluons d'autre part, l'angle d'attaque rapporté à la corde ( $i - \beta_0$ ), comme le font la plupart des auteurs, nous trouvons, en prenant  $\gamma$  égal à la valeur minimum  $4^\circ$ , pour

$m = 0,1$	$(i - \beta_0) = -1^\circ 16'$
$m = 0,2$	$(i - \beta_0) = +1^\circ 15'$
$m = 0,3$	$(i - \beta_0) = +2^\circ 36'$
$m = 0,4$	$(i - \beta_0) = +3^\circ 12'$
$m = 0,5$	$(i - \beta_0) = +3^\circ 19'$

Si  $\gamma$  avait été pris égal à  $8^\circ$ , nous aurions obtenu des valeurs négatives pour tous les angles ( $i - \beta_0$ ).

C'est parce qu'on confondait l'angle ( $i - \beta_0$ ) avec l'angle d'attaque ( $\alpha - \beta_0$ ) que l'on a obtenu assez souvent, dans les expériences sur des hélices marines, des *reculs négatifs* : les navires propulsés par celles-ci semblaient se déplacer, par tour d'hélice, d'une quantité plus grande que le pas. Cette constatation qui jetait quelque trouble dans les idées, était due à ce que l'on prenait, comme nous venons de le faire voir, pour *pas* de l'hélice, le pas apparent donné par la corde.

#### CONCLUSIONS.

Il résulte des diagrammes et des considérations qui précèdent :

1° que la valeur de  $m$  doit être choisie dans les calculs d'hélices, autant que possible entre 0,3 et 0,5, ce qui revient à dire que l'on doit avoir :

$$0,9 < \frac{p}{D} < 1,5;$$

2° que la valeur de  $x$ , pour une valeur donnée de  $m$ , doit être inférieure à la valeur  $x_m$ , le rendement croissant peu avec  $x$  aux environs du maximum ;

3° qu'il y a lieu de préférer un profil courbe à un profil droit, tout au moins lorsqu'on peut adopter pour  $m$  une valeur supérieure à 0,25 ;

4° que pour un profil courbe, le pas est donné par la relation ;

$$m = \frac{p}{2\pi R_1} = \frac{p'}{2\pi R_1} + \operatorname{tg} \gamma$$

où  $\gamma$  varie entre 4° et 8°, suivant la forme du profil, et où  $p'$  représente le pas de la corde.

La valeur de  $x$  qu'il convient d'adopter pour une valeur donnée de  $m$ , peut être fournie par une équation de la forme :

$$x = am - b \quad (24)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes qui varient avec le profil et avec les valeurs des coefficients,  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$ .

Avec les valeurs des coefficients que nous avons adoptées,

$$a = 0,875 \quad b = 0,052$$

pour le profil droit ;

$$a = 0,750 \quad b = 0,075$$

pour le profil courbe.

REMARQUE. — Il serait nécessaire pour formuler des conclusions définitives, de déterminer les coefficients  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , par des expériences sur des surfaces, non seulement profilées à la manière de celles adoptées pour les hélices, mais construites avec la même matière, polies de la même façon. Il serait intéressant alors de se rendre compte dans quelle mesure les courbes déduites du calcul au moyen des formules proposées, correspondent aux courbes expérimentales.

(A suivre.)

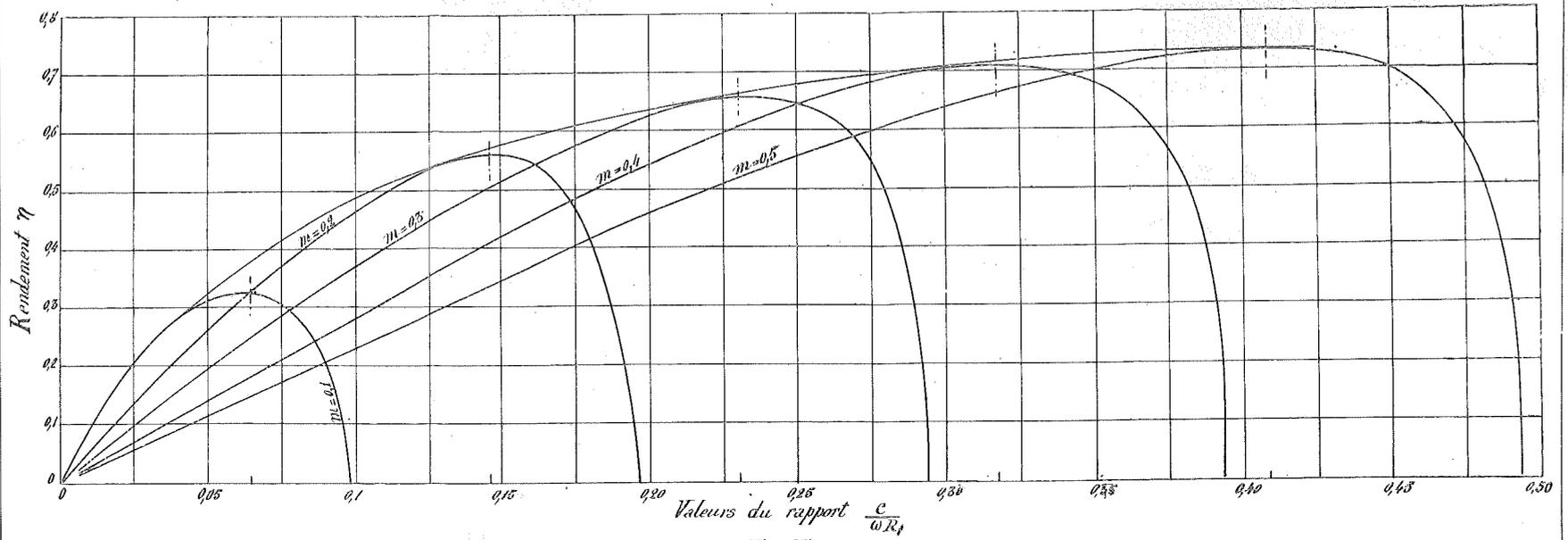


Fig. 17

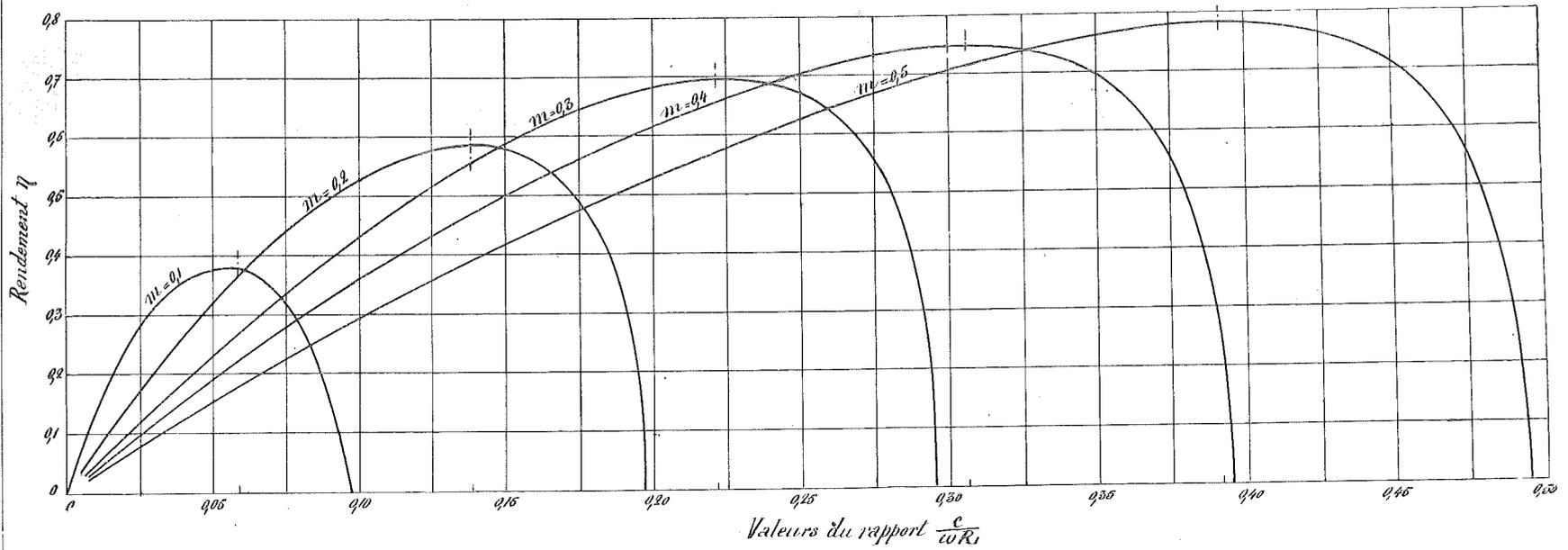


Fig. 19

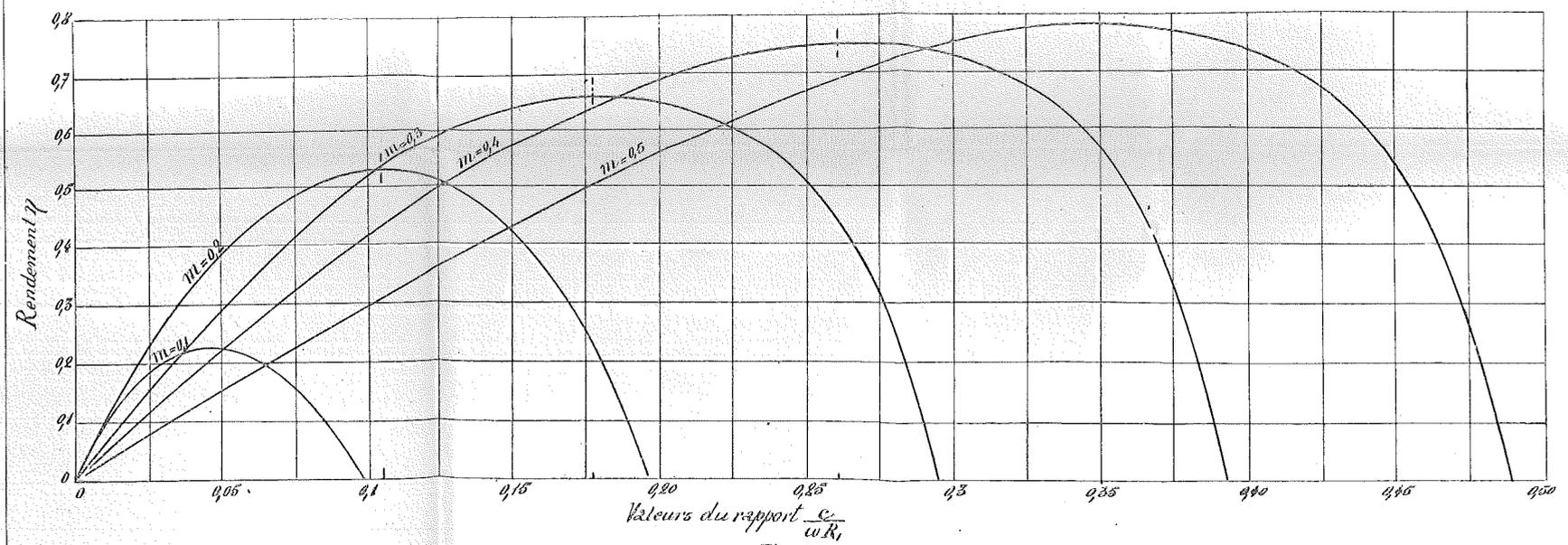


Fig. 21

## SOMMAIRE.

	Pages.
1. Les hélices aériennes, par Ch. HANOCQ, Ingénieur A. I. Lg.- A. I. M., Répétiteur à l'Université de Liège . . . . .	1
2. Théorie du couplage des sources d'énergie électrique, par PHILIPPE BANNEUX, ingénieur principal honoraire au Corps des mines (2 <sup>e</sup> partie) (voir tome XXXV, 3 <sup>e</sup> numéro, 1911, page 251) . . . . .	51

## BULLETIN.

Aéroplane-laboratoire volant. . . . .	115
---------------------------------------	-----

## BIBLIOGRAPHIE.

Traité de chimie générale, par W. NERNST. Ouvrage traduit sur la 6 <sup>e</sup> édition allemande, par A. CORVISKY . . . . .	124
---	-----

Pl. 1 à 7.

# REVUE UNIVERSELLE DES MINES, DE LA MÉTALLURGIE

DES

TRAVAUX PUBLICS, DES SCIENCES ET DES ARTS

APPLIQUÉS A L'INDUSTRIE

56<sup>e</sup> ANNÉE. — QUATRIÈME SÉRIE

ANNUAIRE DE L'ASSOCIATION DES INGÉNIEURS SORTIS DE L'ÉCOLE DE LIÈGE  
CINQUIÈME SÉRIE.

JANVIER 1912

TOME XXXVII. — 1<sup>er</sup> NUMÉRO

Société Géologique  
de Belgique  
Secrétaire  
7, Place du 20 août, 7,  
LIÈGE

LIÈGE

18, Rue Bonne-Femme, 18

PARIS

H. Le Soudier, 174, Boulevard Saint-Germain

ST-PÉTERSBOURG, C. RICKER. ODESSA, G. ROUSSEAU.  
MADRID, FUENTES Y CAPDEVILLE. BERLIN, ERNST & KORN. LEIPZIG, ARTHUR FÉLIX.  
FREIBERG (SAXE), CRAZ ET GERLACH. MILAN, AMMINISTRAZIONE DEL *Politecnico*.  
LONDRES, WILLIAM ET NORGATE. TURIN, BOCCA FRÈRES.

REPRODUCTION INTERDITE

Le dépôt légal a été fait en France, en Belgique et en Angleterre